গণিত প্রকাশ

দশম শ্রেণি

এই পুস্তকটি পশ্চিমবঙ্গ সরকারের আর্থিক আনুকূল্যে কেবলমাত্র সরকারি, সরকার পোষিত ও সরকারি অনুদানপ্রাপ্ত বিদ্যালয়ের ছাত্র-ছাত্রীদের বিনামূল্যে বিতরণের জন্য।

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ

ভারতের সংবিধান

<u>প্রস্তাবনা</u>

আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে একটি **সার্বভৌম সমাজতান্ত্রিক ধর্মনিরপেক্ষ গণতান্ত্রিক সাধারণতন্ত্র** রূপে গড়ে তুলতে সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করছি এবং তার সকল নাগরিক যাতে: সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক **ন্যায়বিচার**; চিন্তা, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম এবং উপাসনার **স্বাধীনতা**; সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন ও সুযোগের **সমতা** প্রতিষ্ঠা করতে পারে এবং তাদের সকলের মধ্যে ব্যক্তি-সম্ভ্রম ও জাতীয় ঐক্য এবং সংহতি সুনিশ্চিত করে **সৌভ্রাতৃত্ব** গড়ে তুলতে; **আমাদের গণপরিষদে**, আজ, 1949 সালের 26 নভেম্বর, **এতদ্দ্বারা এই সংবিধান গ্রহণ করছি, বিধিবদ্ধ করছি** এবং **নিজেদের অর্পণ করছি**।

THE CONSTITUTION OF INDIA

<u>PREAMBLE</u>

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC and to secure to all its citizens : JUSTICE, social, economic and political; LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship; EQUALITY of status and of opportunity and to promote among them all – FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation; IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November 1949, do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

ভূমিকা

জাতীয় পাঠক্রমের রূপরেখা ২০০৫ এবং শিক্ষা অধিকার আইন ২০০৯ দলিলদুটিকে গুরুত্ব দিয়ে ২০১১ সালে পশ্চিমবঙ্গ সরকার কর্তৃক গঠিত 'বিশেষজ্ঞ কমিটি'কে বিদ্যালয়স্তরের পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তকগুলির সমীক্ষা ও পুনর্বিবেচনার দায়িত্ব দেওয়া হয়েছিল। এই কমিটির বিষয় বিশেষজ্ঞদের আন্তরিক চেষ্টা ও নিরলস পরিশ্রমের ফসল হলো এই বইটি।

এই গণিত বইটি দশম শ্রেণির পাঠ্যসূচি অনুযায়ী প্রণয়ন করা হয়েছে ও নামকরণ করা হয়েছে 'গণিত প্রকাশ'। বইটিতে গণিতকে ভাষা হিসাবে চর্চা করার প্রতিষ্ঠিত ধারা অনুসৃত হয়েছে যাতে করে গণিতের ভাষায় ভাষান্তরিত সমস্যাটি দেখে শিক্ষার্থীরা বুঝতে পারে সংশ্লিষ্ট সমস্যায় কোন গাণিতিক প্রক্রিয়া, সূত্র বা পদ্ধতি প্রয়োগের প্রয়োজন।

পাটিগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি, ত্রিকোণমিতি ও রাশিবিজ্ঞান বিষয়গুলিকে সুন্দর ও সহজভাষায় এমনভাবে বর্ণনা করা হয়েছে যাতে করে সমস্ত শিক্ষার্থী ভালোভাবে বিষয়টি আয়ত্ত করতে পারে। গণিতকে শিক্ষার্থীর ব্যক্তি জীবন, পরিবার ও সমাজের নানা সমস্যা সমাধানের সফল হাতিয়ার হিসাবে প্রতিষ্ঠিত করার চেষ্টাকে অধিকতর ভালোভাবে প্রসারিত করা হয়েছে।

প্রথিতযশা শিক্ষক, শিক্ষাপ্রেমী শিক্ষাবিদ, বিষয় বিশেষজ্ঞ ও অলংকরণের জন্য বিখ্যাত শিল্পীবৃন্দ — যাঁদের ঐকান্তিক চেষ্টায় ও নিরলস পরিশ্রমের ফলে এই সর্বাঙ্গসুন্দর গুরুত্বপূর্ণ বইটির প্রকাশ সম্ভব হয়েছে তাঁদের সকলকে পর্ষদের পক্ষ থেকে আন্তরিক ধন্যবাদ ও কৃতজ্ঞতা জানাই।

এই প্রকল্পকে কার্যকরী করার জন্য মাননীয় শিক্ষামন্ত্রী ড. পার্থ চ্যাটার্জী, পশ্চিমবঙ্গ সরকার; পশ্চিমবঙ্গ সরকারের বিদ্যালয় শিক্ষাদপ্তর; পশ্চিমবঙ্গ বিদ্যালয় শিক্ষা অধিকার এবং পশ্চিমবঙ্গ সর্বশিক্ষা মিশন সাহায্য করে পর্ষদকে কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করেছেন।

আশা করি পর্ষদ প্রকাশিত এই 'গণিত প্রকাশ' বইটি শিক্ষার্থীদের কাছে গণিতের বিষয়গুলি আকর্ষণীয় করে তুলতে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করবে এবং মাধ্যমিকস্তরে গণিতচর্চার মান উন্নততর করতে সহায়ক হবে। ছাত্রছাত্রীরাও উদ্বুদ্ধ হবে। এইভাবে সার্থক হবে পর্ষদের সামাজিক দায়বদ্ধতা।

সমস্ত শিক্ষাপ্রেমী, শিক্ষিকা/শিক্ষক ও সংশ্লিষ্ট সকলের কাছে আমার সনির্বন্ধ অনুরোধ তাঁরা যেন বিনা দ্বিধায় বইটির ত্রুটি-বিচ্যুতি পর্ষদের নজরে আনেন যাতে করে পরবর্তী সংস্করণে সংশোধনের সুযোগ পাওয়া যায়। এতে বইটির মান উন্নত হবে এবং ছাত্রসমাজ উপকৃত হবে। ইংরেজিতে একটি আপ্তবাক্য আছে যে, 'even the best can be bettered'। বইটির উৎকর্ষ বৃদ্ধির জন্য শিক্ষক সমাজের ও বিদ্যোৎসাহী ব্যক্তিদের গঠনমূলক মতামত ও সুপরামর্শ সাদরে গৃহীত হবে।

কল্যাণময় গঙ্গোপাধ্যায়

ডিসেম্বর, ২০১৭
৭৭/২ পার্ক স্ট্রিট
কলকাতা: ৭০০ ০১৬

প্রশাসক
পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ

প্রাক্‌কথন

পশ্চিমবঙ্গের মাননীয়া মুখ্যমন্ত্রী শ্রীমতী মমতা বন্দ্যোপাধ্যায় ২০১১ সালে বিদ্যালয় শিক্ষার ক্ষেত্রে একটি ‘বিশেষজ্ঞ কমিটি’ গঠন করেন। এই বিশেষজ্ঞ কমিটির ওপর দায়িত্ব ছিল বিদ্যালয় স্তরের সমস্ত পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তকের পর্যালোচনা, পুনর্বিবেচনা এবং পুনর্বিন্যাসের প্রক্রিয়া পরিচালনা করা। সেই কমিটির সুপারিশ অনুযায়ী নতুন পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তক নির্মিত হয়। ইতোপূর্বে প্রাক্-প্রাথমিক থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত সমস্ত পাঠ্যপুস্তক জাতীয় পাঠক্রমের রূপরেখা ২০০৫ এবং শিক্ষার অধিকার আইন ২০০৯ নথিদুটিকে অনুসরণ করে নির্মিত হয়েছে। ২০১৪ সালে নবম শ্রেণির নতুন পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি অনুযায়ী পাঠ্যপুস্তকগুলি নির্মিত হয়েছে। ২০১৫ সালে দশম শ্রেণির নতুন পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি অনুযায়ী পাঠ্যপুস্তকগুলি নির্মিত হলো।

দশম শ্রেণির গণিত বইয়ের নাম ‘গণিত প্রকাশ’। বইটিতে ধাপে ধাপে গাণিতিক সমস্যাবলি সমাধানের পদ্ধতি শেখানো হয়েছে। শিক্ষার্থীর সুবিধার জন্য প্রতিটি ক্ষেত্রেই সযত্নে মৌল ধারণাগুলিকে প্রাঞ্জল ভাষায় এবং হাতেকলমে পদ্ধতিতে উপস্থাপন করা হয়েছে। ‘গণিত’ বিষয়টিকে বৈচিত্র্যময় এবং আকর্ষণীয় করে তোলার সযত্ন প্রয়াস বইটিতে সহজেই লক্ষ করা যাবে। শিক্ষার্থীর প্রায়োগিক সামর্থ্যবৃদ্ধির দিকেও আমরা তীক্ষ্ণ নজর রেখেছি। আশা করা যায় শিক্ষার্থীমহলে বইটি সমাদৃত হবে।

একথা বলা বিশেষ প্রয়োজন যে, প্রথম শ্রেণি থেকে দশম শ্রেণি পর্যন্ত পরিকল্পিত নতুন পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচি অনুযায়ী নির্মিত পাঠ্যপুস্তকে ধারাবাহিকভাবে গণিতের বিভিন্ন ধারণা (Concept) এবং অনুশীলনীগুলি বিন্যস্ত করা হয়েছে। শিক্ষার্থীরা ক্রমোচ্চশ্রেণিতে উত্তীর্ণ হয়ে এই পাঠ্যপুস্তকগুলি অনুসরণ করলে সহজেই গণিতে পারদর্শিতা অর্জন করবে।

নির্বাচিত শিক্ষাবিদ, শিক্ষিকা-শিক্ষক এবং বিষয়-বিশেষজ্ঞবৃন্দ অল্প সময়ের মধ্যে বইটি প্রস্তুত করেছেন। পশ্চিমবঙ্গের মাধ্যমিক শিক্ষার সারস্বত নিয়ামক পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ পাঠ্যপুস্তকটিকে অনুমোদন করে আমাদের বাধিত করেছেন। বিভিন্ন সময়ে পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ, পশ্চিমবঙ্গ সরকারের শিক্ষা দপ্তর, পশ্চিমবঙ্গ সর্বশিক্ষা মিশন, পশ্চিমবঙ্গ শিক্ষা অধিকার প্রভূত সহায়তা প্রদান করেছেন। তাঁদের ধন্যবাদ।

পশ্চিমবঙ্গের মাননীয় শিক্ষামন্ত্রী ড. পার্থ চ্যাটার্জী প্রয়োজনীয় মতামত এবং পরামর্শ দিয়ে আমাদের বাধিত করেছেন। তাঁকে আমাদের কৃতজ্ঞতা জানাই।

বইটির উৎকর্ষ বৃদ্ধির জন্য শিক্ষাপ্রেমী মানুষের মতামত, পরামর্শ আমরা সাদরে গ্রহণ করব।

অভীক মজুমদার

চেয়ারম্যান
‘বিশেষজ্ঞ কমিটি’
বিদ্যালয় শিক্ষা দপ্তর, পশ্চিমবঙ্গ সরকার

ডিসেম্বর, ২০১৭
নিবেদিতা ভবন, ষষ্ঠতল
বিধাননগর, কলকাতা : ৭০০ ০৯১

বিশেষজ্ঞ কমিটি পরিচালিত পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন পর্ষদ

নির্মাণ ও বিন্যাস

অভীক মজুমদার (চেয়ারম্যান, বিশেষজ্ঞ কমিটি)

রথীন্দ্রনাথ দে (সদস্য সচিব, বিশেষজ্ঞ কমিটি)

শংকরনাথ ভট্টাচার্য

সুমনা সোম

তপসুন্দর বন্দ্যোপাধ্যায়

মলয় কৃষ্ণ মজুমদার

পার্থ দাস

পরামর্শ ও সহায়তা

ড. নূরুল ইসলাম

প্রচ্ছদ ও অলংকরণ

শংকর বসাক

মুদ্রণ সহায়তা

বিপ্লব মণ্ডল

পাঠ্যসূচি

1. একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ

i) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের ধারণা।
ii) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq0$)-এর ধারণা।
iii) উৎপাদকে বিশ্লেষণের সাহায্যে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান।
iv) পূর্ণবর্গাকারে প্রকাশের সাহায্যে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান।
v) শ্রীধর আচার্যের সূত্রের ধারণা।
vi) বীজদ্বয়ের প্রকৃতি সম্বন্ধে ধারণা।
vii) বীজদ্বয় জানা থাকলে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠনের ধারণা।
viii) বাস্তব সমস্যার সমাধানে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের প্রয়োগ।

2. সরল সুদকষা

i) আসল, সুদ, শতকরা বার্ষিক সুদের হার, সুদ-আসল, সময় - এদের ধারণা।
ii) $(I=\frac{prt}{100})$ সূত্রের ধারণা।
iii) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

3. বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য

i) একই বৃত্তে অথবা সমান বৃত্তে সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
ii) একই বৃত্তে অথবা সমান বৃত্তে যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তারা পরস্পর সমান। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
iii) তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
iv) ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যাকে বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করলে সরলরেখাটি জ্যা-এর উপর লম্ব হবে — প্রমাণ।
v) ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর কেন্দ্র দিয়ে অঙ্কিত কোনো লম্বরেখা জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে — প্রমাণ।
vi) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

4. আয়তঘন

i) বাস্তবে দেখা আয়তঘনাকার ও ঘনক আকার বস্তুর ধারণা।
ii) তলসংখ্যা, ধারসংখ্যা, শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা এবং কর্ণের সংখ্যার ধারণা।
iii) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্র গঠনের ধারণা।
iv) আয়তনের সূত্র গঠনের ধারণা।
v) কর্ণের দৈর্ঘ্যের সূত্র গঠনের ধারণা।
vi) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

5. অনুপাত ও সমানুপাত

i) বীজগণিতে অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা।
ii) বিভিন্ন ধরনের অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা।
iii) সমানুপাতের বিভিন্ন ধর্ম সমানুপাতের সমস্যায় প্রয়োগের ধারণা।

6. চক্রবৃদ্ধি সুদ (3 বছর পর্যন্ত) ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস

i) সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদের পার্থক্যের ধারণা।
ii) চক্রবৃদ্ধি সুদের হার বার্ষিক, ষাণ্মাসিক এবং ত্রৈমাসিক হলে সমূল চক্রবৃদ্ধির সূত্র গঠনের ধারণা।
iii) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

iv) সমূল চক্রবৃদ্ধির সূত্র থেকে সমহারে বৃদ্ধি বা হ্রাসের সূত্র গঠনের ধারণা।
v) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

7. বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য

i) কেন্দ্রস্থ কোণ ও বৃত্তস্থ কোণের ধারণা।
ii) একই বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ — প্রমাণ।
iii) কোনো বৃত্তের একই বৃত্তাংশস্থ কোণ সকল সমান — প্রমাণ।
iv) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ — প্রমাণ।
v) একটি সরলরেখাংশের একই পার্শ্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে সরলরেখাংশটি সমান কোণ উৎপন্ন করলে বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
vi) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

8. লম্ব বৃত্তাকার চোঙ

i) বাস্তবে দেখা লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি বস্তুর ধারণা।
ii) লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতল ও সমতলের ধারণা।
iii) বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্র গঠনের ধারণা।
iv) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্র গঠনের ধারণা।
v) আয়তনের সূত্রের ধারণা।
vi) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

9. দ্বিঘাত করণী

i) অমূলদ সংখ্যার ধারণা।
ii) দ্বিঘাত করণীর ধারণা।
iii) শুদ্ধ, মিশ্র, সদৃশ ও অসদৃশ দ্বিঘাত করণীর ধারণা।
iv) অনুবন্ধী করণীর ধারণা।
v) হরের করণী নিরসক উৎপাদকের ধারণা।
vi) দ্বিঘাত করণীর যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের ধারণা।
vii) দ্বিঘাত করণীর বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের ধারণা।

10. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য

i) বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক - প্রমাণ।
ii) কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
iii) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

11. সম্পাদ্য : ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন

i) একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন।
ii) একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন।
iii) একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কন। (মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)

12. গোলক

i) বাস্তবে দেখা গোলক আকার ও অর্ধগোলক আকার ঘনবস্তুর ধারণা।
ii) গোলকের ও অর্ধগোলকের তলের ধারণা।
iii) গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের ধারণা।
iv) অর্ধগোলকের বক্রতল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের ধারণা।
v) গোলক ও অর্ধগোলকের আয়তনের ধারণা।
vi) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

13. ভেদ

i) সরল ভেদ, ব্যস্ত ভেদ ও যৌগিক ভেদের ধারণা।
ii) ভেদ সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা ও বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

14. অংশীদারি কারবার

i) অংশীদারি কারবার সম্বন্ধে ধারণা।
ii) সরল ও মিশ্র অংশীদারি কারবার সম্বন্ধে ধারণা।
iii) মূলধন সম্বন্ধে ধারণা।
iv) লভ্যাংশ বণ্টনের ধারণা।
v) অংশীদারি কারবার সংক্রান্ত বিভিন্ন বাস্তব সমস্যায় অনুপাতের প্রয়োগ।

15. বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য

i) একটি বৃত্তের স্পর্শক ও ছেদকের ধারণা।
ii) একটি বৃত্তের স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব — প্রমাণ।
iii) একটি বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা হলে বহিঃস্থ বিন্দু ও স্পর্শবিন্দু সংযোগকারী সরলরেখাংশদ্বয় সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে — প্রমাণ।
iv) সরল সাধারণ স্পর্শক ও তির্যক সাধারণ স্পর্শকের ধারণা।
v) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করলে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয় এবং স্পর্শবিন্দু সমরেখ। - প্রমাণ
vi) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

16. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু

i) বাস্তবে দেখা লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতি ঘনবস্তুর ধারণা।
ii) লম্ব বৃত্তকার শঙ্কুর বক্রতল ও সমতলের ধারণা।
iii) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের ধারণা।
iv) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের ধারণা।
v) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তনের ধারণা।
vi) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের।

17. সম্পাদ্য : বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন

i) বৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কনের ধারণা।
ii) বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কনের ধারণা।

18. সদৃশতা

i) সদৃশ জ্যামিতিক চিত্রের ধারণা।
ii) ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ত্রিভুজের অপর দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করে। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
iii) কোনো সরলরেখা ত্রিভুজের দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করলে সরলরেখাটি তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হয়। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
iv) দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
v) দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান অর্থাৎ তারা পরস্পর সদৃশ। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
vi) দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
vii) একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করলে যে দুটি ত্রিভুজ পাওয়া যায় তারা মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ এবং তারা পরস্পর সদৃশ — প্রমাণ।
viii) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

19. বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যা

i) একের অধিক ঘনবস্তুর (আয়তঘন, ঘনক, লম্ব বৃত্তাকার চোঙ, গোলক, অর্ধগোলক, লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু) সম্পর্কযুক্ত বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধান।

20. ত্রিকোণমিতি : কোণ পরিমাপের ধারণা

i) ত্রিকোণমিতির উদ্ভব, বিকাশ ও বাস্তব প্রয়োজনীয়তার ব্যাখ্যা।
ii) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণের ধারণা।
iii) কোণ পরিমাপের ধারণা।
iv) ষষ্ঠিক পদ্ধতি ও বৃত্তীয় পদ্ধতির ধারণা, তাদের সম্পর্ক ও বিভিন্ন সমস্যায় প্রয়োগের ধারণা।

21. সম্পাদ্য : মধ্যসমানুপাতী নির্ণয়

i) জ্যামিতিক পদ্ধতিতে দুটি সরলরেখাংশের মধ্যসমানুপাতী নির্ণয়।
ii) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কন।
iii) ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন।

22. পিথাগোরাসের উপপাদ্য

i) পিথাগোরাসের উপপাদ্য — প্রমাণ।
ii) পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য — প্রমাণ।
iii) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

23. ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

i) সমকোণী ত্রিভুজের সাপেক্ষে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধারণা।
ii) বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পারস্পরিক সম্পর্কের ধারণা।
iii) কয়েকটি আদর্শ কোণের (0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় ও বিভিন্ন সমস্যায় প্রয়োগের ধারণা।
iv) বিভিন্ন সমস্যায় ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রয়োগের ধারণা।
v) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থেকে একটি কোণ (যেমন, θ) অপনয়নের ধারণা।

24. পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

i) পূরক কোণের ধারণা।
ii) একটি কোণের পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধারণা এবং বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের ধারণা।

25. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব

i) উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণের ধারণা।
ii) সমকোণী ত্রিভুজ, উন্নতি কোণ এবং অবনতি কোণের সাহায্যে ত্রিকোণমিতিক পদ্ধতিতে বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা ।

26. রাশিবিজ্ঞান : গড়, মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান

i) মধ্যমগামিতা মাপকসমূহের ধারণা।
ii) গড় বা যৌগিক গড়ের ধারণা।
iii) যৌগিক গড় নির্ণয়ের তিনটি পদ্ধতি : (a) প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (b) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (c) ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি - এর ধারণা।
iv) মধ্যমা নির্ণয়ের প্রয়োজনীয়তার ধারণা।
v) মধ্যমা নির্ণয়ের সূত্রের ধারণা এবং বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।
vi) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বক্ররেখা বা ওজাইভ-এর ধারণা।
vii) ওজাইভ থেকে মধ্যমা নির্ণয়ের ধারণা।
viii) সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের প্রয়োজনীয়তা।
ix) সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের সূত্রের ধারণা এবং বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।
x) যৌগিক গড়, মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরুমানের সম্পর্ক সম্বন্ধে ধারণা।

প্রথম পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়নের নম্বর বিভাজন

(Summative-I)

বিষয়	বহু পছন্দভিত্তিক প্রশ্ন	সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন **	মোট নম্বর
পাটিগণিত	2 (1×2)	2 (2×1)	5 (5×1)	9
বীজগণিত	2 (1×2)	2 (2×1)	10 (3+4+3)	14
জ্যামিতি	2 (1×2)	4 (2×2)	5 (5×1)	11
পরিমিতি	-	2 (2×1)	4 (4×1)	6
মোট নম্বর	**6**	**10**	**24**	**40**
	6 + 10 = 16			

অন্তর্বর্তী প্রস্তুতিকালীন মূল্যায়ন - 10 নম্বর

**** দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন**

পাটিগণিত

(i) সরল সুদকষা
(ii) চক্রবৃদ্ধি সুদ
(iii) সমহার বৃদ্ধি ও হ্রাস
} —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

বীজগণিত

(i) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর

(ii) বাস্তব সমস্যার সমাধানে দ্বিঘাত সমীকরণের প্রয়োগ —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 4×1 নম্বর = 4 নম্বর
[সমীকরণ গঠন ও সমাধান]

(iii) অনুপাত ও সমানুপাত
(iv) দ্বিঘাত করণী
} —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর

জ্যামিতি

(i) বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য
(ii) বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য
(iii) বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য
} উপপাদ্য —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

পরিমিতি

(i) আয়তঘন
(ii) লম্ববৃত্তাকার চোঙ
} —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 4×1 নম্বর = 4 নম্বর

দ্বিতীয় পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়নের নম্বর বিভাজন

(Summative-II)

বিষয়	বহু পছন্দভিত্তিক প্রশ্ন	সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন **	মোট নম্বর
পাটিগণিত	1 (1×1)	-	5 (5×1)	6
বীজগণিত	2 (1×2)	2 (2×1)	3 (3×1)	7
জ্যামিতি	2 (1×2)	2 (2×1)	13 (5+5+3)	17
পরিমিতি	2 (1×2)	4 (2×2)	4 (4×1)	10
মোট নম্বর	**7**	**8**	**25**	**40**
	7 + 8 = 15			

অন্তর্বর্তী প্রস্তুতিকালীন মূল্যায়ন - 10 নম্বর

** **দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন**

পাটিগণিত

(i) অংশীদারি কারবার ———— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

বীজগণিত

(i) ভেদ
(ii) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান } ———— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর

জ্যামিতি

(i) বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য
(ii) সদৃশতা সংক্রান্ত উপপাদ্য } উপপাদ্য ———— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

(iii) ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন — সম্পাদ্য ———— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

(iv) উপপাদ্যের প্রয়োগ ———— 1টি প্রশ্ন : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর

পরিমিতি

(i) গোলক
(ii) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু } ———— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 4×1 নম্বর = 4 নম্বর

তৃতীয় পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়ন/নির্বাচনী পরীক্ষার নম্বর বিভাজন

(Summative-III)

বিষয়	বহু পছন্দভিত্তিক প্রশ্ন (1×6)	অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন: শূন্যস্থান পূরণ 6টির মধ্যে 5টি (1×5)	অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন: সত্য অথবা মিথ্যা 6টির মধ্যে 5টি (1×5)	সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন 12টির মধ্যে 10টি (2×10)	দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন **	
পাটিগণিত	1	1	1	4 (2×2)	5 (5×1)	
বীজগণিত	1	1	1	4 (2×2)	9 (3+3+3)	
জ্যামিতি	1	1	1	6 (2×3)	13 (5+3+5)	
ত্রিকোণমিতি	1	1	1	4 (2×2)	11 (3+3+5)	
পরিমিতি	1	1	1	4 (2×2)	8 (4+4)	
রাশিবিজ্ঞান	1	1	1	2 (2×1)	8 (4+4)	
মোট নম্বর	**6**	**5**	**5**	**20**	**54**	**90**
	6 + 5 + 5 + 20 = 36					

অন্তর্বর্তী প্রস্তুতিকালীন মূল্যায়ন : 10 নম্বর

** **দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন**

পাটিগণিত

(i) সরল সুদকষা
(ii) চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস
(iii) অংশীদারি কারবার
} —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

বীজগণিত

(i) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর
(ii) ভেদ
(iii) দ্বিঘাত করণী
} —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর
(iv) অনুপাত ও সমানুপাত —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর

জ্যামিতি

2টি উপপাদ্যের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর
উপপাদ্যের প্রয়োগে জ্যামিতিক সমস্যা সমাধান 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর
2টি সম্পাদ্যের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

ত্রিকোণমিতি

(i) কোণ পরিমাপের ধারণা
(ii) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি
(iii) পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
} —— 3টি প্রশ্নের মধ্যে 2টি : 3×2 নম্বর = 6 নম্বর
(iv) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব —— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

পরিমিতি

(i) আয়তঘন
(ii) লম্ব বৃত্তাকার চোঙ
(iii) গোলক
(iv) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু
(v) বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত সমস্যা
} —— 3টি প্রশ্নের মধ্যে 2টি : 4×2 নম্বর = 8 নম্বর

রাশিবিজ্ঞান

গড়, মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান —— 3টি প্রশ্নের মধ্যে 2টি : 4×2 নম্বর = 8 নম্বর

সূচিপত্র

অধ্যায়	বিষয়	পৃষ্ঠা

অধ্যায়	বিষয়	পৃষ্ঠা
18	সদৃশতা (Similarity)	233
19	বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যা (Real life Problems related to different Solid Objects)..	261
20	ত্রিকোণমিতি : কোণ পরিমাপের ধারণা (Trigonometry : Concept of Measurment of Angle)	268
21	সম্পাদ্য : মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় (Construction : Determination of Mean Proportional)	278
22	পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Pythagoras Theorem)	284
23	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি (Trigonometric Ratios and Trigonometric Identities)	291
24	পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Complementrary angle)	313
25	ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব (Application of Trigonometric Ratios : Heights & Distances)	318
26	রাশিবিজ্ঞান : গড়, মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান (Statistics : Mean , Median , Ogive , Mode)...	329

1 একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ
QUADRATIC EQUATIONS WITH ONE VARIABLE

আজ রবিবার। আমরা আজকে ধ্রুবদের বাগানে খেলা করতে পারব না। আজ ওদের বাগান পরিষ্কার করা হবে এবং বাগানের নারকেল গাছ থেকে নারকেল পেড়ে নেওয়া হবে।

(1) ধ্রুবদের বাগানে যতগুলি নারকেল গাছ ছিল প্রতি গাছ থেকে তার থেকে একটি বেশি নারকেল পাড়া হয়েছে। ধ্রুবদের বাগান থেকে মোট 132 টি নারকেল পাড়া হলো। কিন্তু ওদের বাগানে কতগুলি নারকেল গাছ ছিল কীভাবে পাব?

ধরি, ধ্রুবদের বাগানে x টি নারকেল গাছ ছিল।

∴ প্রতিটি গাছ থেকে নারকেল পাড়া হয়েছে $(x+1)$ টি।

∴ মোট নারকেলের সংখ্যা $= x(x+1)$ টি

শর্তানুসারে, $x(x+1) = 132$

বা, $x^2 + x = 132$

বা, $x^2 + x - 132 = 0$ ———— (i)

ধ্রুবদের নারকেল গাছের সংখ্যা (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

কিন্তু (i) নং সমীকরণটিকে কী বলা হয়?

(i) নং সমীকরণটি একটি **বাস্তব সহগ যুক্ত একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ** ।

যে সমীকরণকে $ax^2+bx+c = 0$ আকারে লেখা যায়, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$, তাকে **একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ** বলা হয়।

(2) ধ্রুবদের আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য প্রস্থের চেয়ে 5 মিটার বেশি এবং বাগানের ক্ষেত্রফল 204 বর্গ মিটার। বাগানের প্রস্থ কীভাবে পাবো দেখি।

ধরি, ধ্রুবদের আয়তাকার বাগানের প্রস্থ x মিটার।

∴ বাগানের দৈর্ঘ্য $(x+5)$ মিটার।

সুতরাং, বাগানের ক্ষেত্রফল $= x(x+5)$ বর্গ মিটার।

শর্তানুসারে, $x(x+5) = 204$

বা, $x^2+5x-204 = 0$ ———— (ii)

ধ্রুবদের বাগানের প্রস্থ (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং (ii) নং একটি ☐ [একঘাত/দ্বিঘাত] সমীকরণ।

[নিজে লিখি]

(3) ধ্রুবদের বাগানে যতজন বাগান পরিষ্কার করছিল প্রত্যেককে ততগুণ 30 টাকা দেওয়া হলো। যদি মোট 1080 টাকা দেওয়া হয়ে থাকে, তবে কতজন বাগান পরিষ্কার করছিল সেটি পাবার জন্য একটি সমীকরণ তৈরি করি।

ধরি, ধ্রুবদের বাগান x জন পরিষ্কার করছিল।

$\therefore$ প্রত্যেকে পায় = $x \times 30$ টাকা = $30x$ টাকা

$\therefore$ মোট দেওয়া হয়েছে = $30x \times x$ টাকা = $30x^2$ টাকা

শর্তানুসারে, $30x^2 = 1080$

বা, $x^2 = 36$

বা, $x^2 - 36 = 0$ ________ (iii)

যতজন ধ্রুবদের বাগান পরিষ্কার করেছিল সেই সংখ্যা (iii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং (iii) নং একটি ☐ [একঘাত/দ্বিঘাত] সমীকরণ। **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 1. আমি নীচের সমীকরণগুলিকে $ax^2+bx+c = 0$,যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$, আকারে লেখা যায় কিনা দেখি।

(i) $(x+1)(x+3) - x(x+2) = 15$ (ii) $x^2 - 3x = 5(2-x)$ (iii) $x - 1 + \frac{1}{x} = 6 \ (x \neq 0)$

(iv) $(x-2)^2 = x^3-4x+4$ (v) $(x-3)^3 = 2x(x^2-1)$

(i) $(x+1)(x+3) - x(x+2) = 15$

বা, $x^2 + x + 3x + 3 - x^2 - 2x = 15$

বা, $2x + 3 - 15 = 0$

বা, $2x - 12 = 0$

বা, $x - 6 = 0$ ________ (i)

(i) নং সমীকরণটির আকার $ax^2+bx+c = 0$ [যেখানে, a, b, c বাস্তব সংখ্যা, $a \neq 0$]-এর মতো নয়।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ নয়।

$\therefore$ কোনো সমীকরণ আপাত দেখে দ্বিঘাত সমীকরণ মনে হলেও সর্বদা দ্বিঘাত সমীকরণ নাও হতে পারে।

(ii) $x^2 - 3x = 5(2-x)$

বা, $x^2 - 3x = 10 - 5x$

বা, $x^2 - 3x + 5x - 10 = 0$

বা, $x^2 + 2x - 10 = 0$ ________ (ii)

(ii) নং সমীকরণটির আকার $ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$]-এর মতো।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(iii) $x - 1 + \frac{1}{x} = 6$

বা, $\frac{x^2-x+1}{x} = 6$

বা, $x^2 - x + 1 = 6x$

বা, $x^2 - 7x + 1 = 0$ ________ (iii)

(iii) নং সমীকরণ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। কারণ নিজে বুঝে লিখি।

(iv) $(x-2)^2 = x^3 - 4x + 4$

বা, $x^2 - 4x + 4 = x^3 - 4x + 4$

বা, $-x^3 + x^2 = 0$ ———— (iv)

(iv) নং সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ কিনা নিজে বুঝে লিখি ও কারণ দেখাই, **[নিজে করি]**

(v) নং সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ কিনা নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 2. আমরা নবম ও দশম শ্রেণির শিক্ষার্থীরা মুখ্যমন্ত্রীর ত্রাণ তহবিলে 1824 টাকা জমা দিয়েছি। চাঁদা হিসাবে দশম ও নবম শ্রেণির প্রত্যেক শিক্ষার্থী যথাক্রমে তাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সংখ্যার সমান 50 পয়সা এবং 1 টাকা করে দিয়েছি। নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীর সংখ্যা যদি দশম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের থেকে 8 বেশি হয়, তবে একচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় করি।

মনে করি, দশম শ্রেণির শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x জন

$\therefore$ নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীর সংখ্যা হবে $(x+8)$ জন

নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীরা দিয়েছে $(x+8)\times 1\times(x+8)$ টাকা = $(x+8)^2$ টাকা

দশম শ্রেণির শিক্ষার্থীরা দিয়েছে $(x\times 50\times x)$ পয়সা = $x \times \frac{1}{2} \times x$ টাকা = $\frac{x^2}{2}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{x^2}{2} + (x+8)^2 = 1824$

বা, $\frac{x^2+2(x+8)^2}{2} = 1824$

বা, $x^2 + 2(x^2 + 16x + 64) = 3648$

বা, $x^2 + 2x^2 + 32x + 128 - 3648 = 0$

বা, $3x^2 + 32x - 3528 = 0$ ———— (i)

$\therefore$ (i) নং সমীকরণটি হলো নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ।

প্রয়োগ : 3. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, প্রস্থের চেয়ে 36 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 460 বর্গ মিটার। বিবৃতিটি থেকে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি ও x^2, x ও x^0 -এর সহগ নির্ণয় করি।

ধরি, প্রস্থ = x মিটার

$\therefore$ দৈর্ঘ্য = $(x+36)$ মিটার এবং ক্ষেত্রফল = $x(x+36)$ বর্গ মিটার।

শর্তানুসারে, $x(x+36) = 460$

বা, $x^2 + 36x = 460$

বা, $x^2 + 36x - 460 = 0$ ———— (i)

(i) নং হলো নির্ণেয় একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ, এখানে x^2-এর সহগ 1, x-এর সহগ 36 এবং x^0-এর সহগ -460

অন্যভাবে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার। $\therefore$ প্রস্থ = $(x-36)$ মিটার

সুতরাং, ক্ষেত্রফল = $x(x-36)$ বর্গ মিটার

প্রশ্নানুসারে, $x(x-36) = 460$

বা, $x^2 - 36x - 460 = 0$ ———— (i)

$\therefore$ (i) নং হলো নির্ণেয় একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। এখানে x^2-এর সহগ ☐, x-এর সহগ ☐ এবং x^0-এর সহগ ☐। **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 4. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের চেয়ে 2 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 24 বর্গ মিটার। একচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 5. আমি $x^3-4x^2-x+1 = (x+2)^3$ সমীকরণটিকে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপে প্রকাশ করে x^2, x ও x^0-এর সহগ লিখি।

$x^3-4x^2-x+1=(x+2)^3$

বা, $x^3-4x^2-x+1=x^3+6x^2+12x+8$

বা, $-10x^2-13x-7=0$

বা, $10x^2+13x+7=0$

$\therefore$ x^2-এর সহগ 10, x-এর সহগ ☐ এবং x^0-এর সহগ ☐ (নিজে লিখি)

কষে দেখি 1.1

1. নীচের বহুপদী সংখ্যামালার মধ্যে কোনটি/কোনগুলি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা বুঝে লিখি।
   (i) x^2-7x+2 (ii) $7x^5-x(x+2)$ (iii) $2x(x+5)+1$ (iv) $2x-1$

2. নীচের সমীকরণগুলির কোনটি $ax^2+bx+c=0$, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$, আকারে লেখা যায় তা লিখি।
   (i) $x-1+\frac{1}{x}=6, (x\neq 0)$ (ii) $x+\frac{3}{x}=x^2, (x\neq 0)$ (iii) $x^2-6\sqrt{x}+2=0$ (iv) $(x-2)^2=x^2-4x+4$

3. $x^6-x^3-2=0$ সমীকরণটি চলের কোন ঘাতের সাপেক্ষে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ তা নির্ণয় করি।

4. (i) $(a-2)x^2+3x+5=0$ সমীকরণটি a-এর কোন মানের জন্য দ্বিঘাত সমীকরণ হবে না তা নির্ণয় করি।

   (ii) $\frac{x}{4-x}=\frac{1}{3x}$, $(x\neq 0, x\neq 4)$-কে $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের আকারে প্রকাশ করলে x-এর সহগ কত হবে তা নির্ণয় করি।

   (iii) $3x^2+7x+23=(x+4)(x+3)+2$-কে $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণ আকারে প্রকাশ করি।

   (iv) $(x+2)^3=x(x^2-1)$ সমীকরণটিকে $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের আকারে প্রকাশ করি এবং x^2, x ও x^0-এর সহগ লিখি।

5. নীচের বিবৃতিগুলি থেকে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি।

   (i) 42-কে এমন দুটি অংশে বিভক্ত করি যাতে এক অংশ অপর অংশের বর্গের সমান হয়।

   (ii) দুটি ক্রমিক ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল 143

   (iii) দুটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 313

6. নীচের বিবৃতিগুলি থেকে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি।

   (i) একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 15 মিটার এবং তার দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 3 মিটার বেশি।

   (ii) এক ব্যক্তি 80 টাকায় কয়েক কিগ্রা. চিনি ক্রয় করলেন। যদি ওই টাকায় তিনি আরও 4 কিগ্রা. চিনি বেশি পেতেন, তবে তার কিগ্রা. প্রতি চিনির দাম 1 টাকা কম হতো।

   (iii) দুটি স্টেশনের মধ্যে দূরত্ব 300 কিমি.। একটি ট্রেন প্রথম স্টেশন থেকে সমবেগে দ্বিতীয় স্টেশনে গেল। ট্রেনটির গতিবেগ ঘণ্টায় 5 কিমি. বেশি হলে ট্রেনটির দ্বিতীয় স্টেশনে যেতে 2 ঘণ্টা কম সময় লাগত।

(iv) একজন ঘড়ি বিক্রেতা একটি ঘড়ি ক্রয় করে 336 টাকায় বিক্রি করলেন। তিনি যত টাকায় ঘড়িটি ক্রয় করেছিলেন শতকরা তত টাকা তাঁর লাভ হলো।

(v) স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 কিমি. হলে, রতনমাঝির স্রোতের অনুকূলে 21 কিমি. গিয়ে ওই দূরত্ব ফিরে আসতে 10 ঘণ্টা সময় লাগে।

(vi) আমাদের বাড়ির বাগান পরিষ্কার করতে মহিম অপেক্ষা মজিদের 3 ঘণ্টা বেশি সময় লাগে। তারা উভয়ে একসঙ্গে কাজটি 2 ঘণ্টায় শেষ করতে পারে।

(vii) দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা 6 বেশি এবং অঙ্কদ্বয়ের গুণফল সংখ্যাটির চেয়ে 12 কম।

(viii) 45 মিটার দীর্ঘ ও 40 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তক্ষেত্রাকার খেলার মাঠের বাইরের চারিপাশে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে এবং ওই রাস্তার ক্ষেত্রফল 450 বর্গ মিটার।

4 ধ্রুবদের বাগানের নারকেল গাছের সংখ্যা $x^2+x-132 = 0$ ______ (i) এই দ্বিঘাত সমীকরণকে সিদ্ধ করে। কিন্তু এই নারকেল গাছের সংখ্যা কীভাবে পাব?

$x^2+x-132 = 0$ —এই দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ $x^2+x-132$ —একটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা।

আমি $x^2+x-132$ —দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$$\begin{aligned} x^2+x-132 &= x^2+12x-11x-132 \\ &= x(x+12)-11(x+12) \\ &= (x+12)(x-11) \end{aligned}$$

$\therefore$ $x^2+x-132 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণকে লিখতে পারি $(x+12)(x-11) = 0$

যেহেতু, $pq = 0$ $\therefore p = 0$ অথবা $q = 0$, যেখানে p, q বাস্তব সংখ্যা

$\therefore$ $(x+12)(x-11) = 0$ হলে পাই,

হয়, $x+12 = 0$ $\therefore x = -12$

অথবা, $x-11 = 0$ $\therefore x = 11$

$\therefore x = 11$, অথবা $x = -12$.

কিন্তু নারকেল গাছের সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore x \neq -12$

$\therefore$ ধ্রুবদের বাগানে নারকেল গাছ আছে 11টি।

5 আমি (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণে $x = 11$ ও $x = -12$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$x^2+x-132 = 0$ ________ (i)

(i) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষে $x = 11$ ও $x = -12$ বসিয়ে দেখছি, $(11)^2+11-132 = 0$ এবং $(-12)^2+(-12)-132 = 0$

অর্থাৎ $x = 11$ ও $x = -12$ মানগুলি (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে সিদ্ধ করেছে।

11 ও –12 সংখ্যা দুটিকে (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণের কী বলা হয়?

11 এবং –12 (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি **বীজ (roots)**। এই $x = 11$ ও $x = -12$ (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান (Solution)।

একটি বাস্তব সংখ্যা α, $ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ হবে যদি $a\alpha^2+b\alpha+c = 0$ হয়। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে $x = \alpha$, $ax^2+bx+c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$\therefore$ ax^2+bx+c [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যগুলোই (Zeroes) $ax^2+bx+c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ (Roots) হবে।

যেহেতু, দ্বিঘাত সংখ্যামালার শূন্য ☐ [1/2] টি, সুতরাং, দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ ☐ [1/2] টি।

6 আমি $x^2+5x-204 = 0$ ____ (ii) দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজ নির্ণয় করে ধ্রুবদের বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ লিখি।

$x^2+5x-204=0$ ______ (ii)

বা, $x^2+17x-12x-204=0$

বা, $x(x+17)-12(x+17)=0$

বা, $(x+17)(x-12)=0$

হয়, $x+17 = 0 \quad \therefore x = -17$

অথবা, $x-12 = 0 \quad \therefore x = 12$

যেহেতু, $x = -17$ ও $x = 12$ (ii) নং দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান (Solution),

সুতরাং (ii) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি -17 ও 12

যেহেতু, বাগানের প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না, সুতরাং $x \neq -17$

$\therefore x = 12$;

$\therefore$ বাগানের প্রস্থ 12 মিটার এবং বাগানের দৈর্ঘ্য = (x+5) মিটার = 17 মিটার।

প্রয়োগ : 6. পাশের কোনগুলি $2x^2-5x-3 = 0$ সমীকরণের বীজ বুঝে লিখি। (i) 5 (ii) 3 (iii) $-\frac{1}{2}$

$2x^2-5x-3=0$ ________ (I)

(i) (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষে $x = 5$ বসিয়ে পাই,

$2.(5)^2-5.5-3 = 50-25-3 = 22 \neq 0$

$\therefore x = 5$, (I) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। $\therefore$ 5, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নয়।

(ii) (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$2\times3^2-5.3-3 = 0$

$\therefore x = 3$, (I) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। $\therefore$ 3, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ।

(iii) (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণে $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে দেখছি $-\frac{1}{2}$, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 7. k -এর মান কত হলে $kx^2+2x-3 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ 2 হবে হিসাব করে লিখি।

যেহেতু, $kx^2+2x-3 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ 2

সুতরাং, $k\times2^2+2.2-3 = 0$

বা, $4k + 1 = 0$

বা, $k = -\frac{1}{4}$

$\therefore k = -\frac{1}{4}$ হলে $kx^2+2x-3 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ 2 হবে।

প্রয়োগ : 8. k -এর মান কত হলে $x^2+kx+3 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ 1 হবে হিসাব করে লিখি।
[নিজে করি]

প্রয়োগ : 9. আমি নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সমাধান করার চেষ্টা করি।

(i) $6x^2-x-2=0$ (ii) $25x^2-20x+4=0$ (iii) $x^2+5x=0$ (iv) $4x^2-9=0$ (v) $x^2+(3-\sqrt{5})x-3\sqrt{5}=0$

(i) $6x^2-x-2=0$ ———— (I)

বা, $6x^2-4x+3x-2=0$

বা, $2x(3x-2)+1(3x-2)=0$

বা, $(3x-2)(2x+1)=0$

হয়, $3x-2=0$ বা, $3x=2$ $\therefore x=\frac{2}{3}$ অথবা, $2x+1=0$ বা, $2x=-1$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

অর্থাৎ, $x=\frac{2}{3}$ ও $x=-\frac{1}{2}$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান। $\therefore$ (I) নং সমীকরণের বীজ দুটি $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$

$ax^2+bx+c=0$ [যেখানে a, b ও c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয়ের জন্য ax^2+bx+c দ্বিঘাত সংখ্যামালাকে দুটি রৈখিক উৎপাদকে [Linear factors] বিশ্লেষণ করে প্রতিটি উৎপাদককে শূন্য (0)-এর সঙ্গে সমান করে বীজ দুটি নির্ণয় করা যায়।

(ii) $25x^2-20x+4=0$ ———— (II)

বা, $25x^2-10x-10x+4=0$

বা, $5x(5x-2)-2(5x-2)=0$

বা, $(5x-2)(5x-2)=0$

হয়, $5x-2=0$ $\therefore x=\frac{2}{5}$ অথবা, $5x-2=0$ $\therefore x=\frac{2}{5}$

যেহেতু দুটি উৎপাদক সমান, $\therefore$ (II) নং সমীকরণের সমাধান $x=\frac{2}{5}$ ও $x=\frac{2}{5}$

$\therefore$ বীজদুটি পেলাম $\frac{2}{5}$ ও $\frac{2}{5}$ অর্থাৎ বীজদুটিও সমান। $\therefore$ (II) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{2}{5}$ ও $\frac{2}{5}$

(iii) $x^2+5x=0$ ———— (III)

বা, $x(x+5)=0$

হয়, $x=0$ অথবা, $x+5=0$ $\therefore x=-5$

অর্থাৎ, $x=0$ ও $x=-5$, $x^2+5x=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান।

$\therefore x^2+5x=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় 0 এবং -5

$ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের $c=0$ হলে একটি বীজ সর্বদা 0 হবে।

(iv) $4x^2-9=0$ ———— (IV)

বা, $(2x+3)(2x-3)=0$

হয়, $2x+3=0$ $\therefore x=-\frac{3}{2}$ অথবা, $2x-3=0$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

(IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান $x=-\frac{3}{2}$ ও $x=\frac{3}{2}$; (IV) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $-\frac{3}{2}$ এবং $\frac{3}{2}$

অন্যভাবে (IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয় করি।

$4x^2-9=0$

বা, $4x^2=9$ বা, $x^2=\frac{9}{4}$ $\therefore x=\pm\frac{3}{2}$ [$x=\pm\frac{3}{2}$ অর্থাৎ $x=+\frac{3}{2}$ ও $x=-\frac{3}{2}$]

$\therefore$ (IV) নং সমীকরণের সমাধান পেলাম, $x=\frac{3}{2}$ এবং $x=-\frac{3}{2}$; $\therefore$(IV) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $-\frac{3}{2}$ ও $\frac{3}{2}$

(v) $x^2+(3-\sqrt{5})x-3\sqrt{5}=0$

বা, $x^2+3x-\sqrt{5}x-3\sqrt{5}=0$

বা, $x(x+3)-\sqrt{5}(x+3)=0$

বা, $(x+3)(x-\sqrt{5})=0$

হয়, $x+3=0$ $\therefore x=-3$ অথবা, $x-\sqrt{5}=0$ $\therefore x=\sqrt{5}$

$\therefore$ বীজদ্বয় -3 ও $\sqrt{5}$

$\therefore$ বাস্তব সহগযুক্ত একচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সর্বদা মূলদ বা সর্বদা অমূলদ নয়।

প্রয়োগ : 10. সমাধান করি : $(x+4)(2x-3)=6$

$(x+4)(2x-3)=6$

বা, $2x^2+8x-3x-12-6=0$

বা, $2x^2+5x-18=0$

বা, $2x^2+9x-4x-18=0$

বা, $x(2x+9)-2(2x+9)=0$

বা, $(2x+9)(x-2)=0$

হয়, $2x+9=0$, $\therefore x=-\frac{9}{2}$

অথবা, $x-2=0$, $\therefore x=2$

$\therefore x=-\frac{9}{2}$ অথবা $x=2$.

অর্থাৎ, $x=-\frac{9}{2}$ ও $x=2$, $(x+4)(2x-3)=6$ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান (Solution)।

প্রয়োগ : 11. $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$, $(x\neq 0)$ —দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি।

$\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$

বা, $\frac{x^2+9}{3x}=\frac{17}{4}$

বা, $4x^2+36=51x$

বা, $4x^2-51x+36=0$

বা, $4x^2-48x-3x+36=0$

বা, $4x(x-12)-3(x-12)=0$

বা, $(x-12)(4x-3)=0$

হয়, $x-12=0$, $\therefore x=12$

অথবা, $4x-3=0$, $\therefore x=\frac{3}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান (Solution),

$x=\frac{3}{4}$ ও $x=12$

আমি অন্যভাবে $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$, $(x\neq 0)$ —দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি।

ধরি, $\frac{x}{3}=a$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি হবে, $a+\frac{1}{a}=4\frac{1}{4}$

বা, $a+\frac{1}{a}=4+\frac{1}{4}$

বা, $(a-4)+\frac{1}{a}-\frac{1}{4}=0$

বা, $(a-4)-\frac{1}{4a}(a-4)=0$

বা, $(a-4)(1-\frac{1}{4a})=0$

হয়, $a-4=0$ অথবা $1-\frac{1}{4a}=0$

$a-4=0$ হলে $a=4$, $\therefore \frac{x}{3}=4$ $\therefore x=12$

আবার, $1-\frac{1}{4a}=0$ হলে $\frac{1}{4a}=1$

বা, $4a=1$ বা, $a=\frac{1}{4}$ $\therefore \frac{x}{3}=\frac{1}{4}$ $\therefore x=\frac{3}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{4}$ ও $x=12$ হলো প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান (Solution)।

প্রয়োগ : 12. আমি $\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2\ (x\neq b, a)$ দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি ও বীজদ্বয় লিখি।

$\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2$

বা, $\frac{a}{x-b}-1+\frac{b}{x-a}-1=0$

বা, $\frac{a-x+b}{x-b}+\frac{b-x+a}{x-a}=0$

বা, $(a+b-x)\left[\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-a}\right]=0$

বা, $(a+b-x)\left[\frac{x-a+x-b}{(x-a)(x-b)}\right]=0$

বা, $(a+b-x)\left[\frac{(2x-a-b)}{(x-a)(x-b)}\right]=0$

হয়, $a+b-x=0$ অথবা, $\frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}=0$

হয়, $a+b-x=0$, $\therefore x=a+b$

অথবা, $\frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}=0$, বা, $2x-a-b=0$, $\therefore x=\frac{a+b}{2}$

$\therefore$ $x=a+b$ ও $x=\frac{a+b}{2}$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান (Solution)।

এবং বীজদ্বয় $(a+b)$ এবং $\left(\frac{a+b}{2}\right)$

প্রয়োগ : 13. $\frac{a}{ax-1}+\frac{b}{bx-1}=a+b,\ \left[x\neq\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right]$ দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি ও বীজদ্বয় লিখি।

[নিজে করি]

প্রয়োগ : 14. আমি $\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0\ (x\neq-3, 3)$ দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি।

$\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0$

বা, $a-\frac{1}{a}+6\frac{6}{7}=0$ ———— (i) [ধরি, $\frac{x-3}{x+3}=a$]

বা, $\frac{a^2-1}{a}+\frac{48}{7}=0$

বা, $\frac{a^2-1}{a}=-\frac{48}{7}$

বা, $7a^2-7=-48a$

বা, $7a^2+48a-7=0$

বা, $7a^2+49a-a-7=0$

বা, $7a(a+7)-1(a+7)=0$

বা, $(a+7)(7a-1)=0$

$\therefore$ $(a+7)$ ও $(7a-1)$ -এর একটি অবশ্যই শূন্য হবে।

হয়, $a+7=0$, $\therefore a=-7$, অথবা, $7a-1=0$, $\therefore a=\frac{1}{7}$

এবার $a=-7$ থেকে পাই, $\frac{x-3}{x+3}=-7$

বা, $x-3=-7x-21$

বা, $8x=-18$

বা, $x=-\frac{18}{8}$ $\therefore x=-\frac{9}{4}$

আবার, $a=\frac{1}{7}$ থেকে পাই, $\frac{x-3}{x+3}=\frac{1}{7}$

বা, $7x-21=x+3$

বা, $6x=24$ $\therefore x=4$

$\therefore$ $x=-\frac{9}{4}$ ও $x=4$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান (Solution)।

$\therefore$ সমীকরণটির বীজদ্বয় $-\frac{9}{4}$ এবং 4.

অন্যভাবে, (i) থেকে পাই $a-\frac{1}{a}+\frac{48}{7}=0$

বা, $a-\frac{1}{a}+7-\frac{1}{7}=0$

বা, $a+7-\frac{1}{a}-\frac{1}{7}=0$

বা, $(a+7)-\frac{1}{7a}(a+7)=0$

বা, $(a+7)(1-\frac{1}{7a})=0$

$\therefore$ $(a+7)$ এবং $(1-\frac{1}{7a})$ -এর একটি অবশ্যই শূন্য হবে।

হয়, $a+7=0$, $\therefore a=-7$, অথবা, $1-\frac{1}{7a}=0$, $\therefore a=\frac{1}{7}$

এবার , $a=-7$ হলে, $\frac{x-3}{x+3}=-7$ বা, $x-3=-7x-21$

বা, $8x=3-21$

বা, $8x=-18$

$\therefore x=-\frac{9}{4}$

আবাব, $a=\frac{1}{7}$ হলে, $\frac{x-3}{x+3}=\frac{1}{7}$ বা, $7x-21=x+3$

বা, $6x=24$ $\therefore x=4$

অর্থাৎ $x=-\frac{9}{4}$ ও $x=4$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান (Solution)। সুতরাং সমীকরণটির বীজদ্বয় $-\frac{9}{4}$ এবং 4

প্রয়োগ : 15. আমি $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=2\frac{1}{2}$ $(x\neq-3, 3)$ দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান করি। [নিজে করি]

কষে দেখি 1.2

1. নীচের প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত মানগুলি প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ কিনা যাচাই করে লিখি:

(i) $x^2+x+1=0$, 1 ও -1 (ii) $8x^2+7x=0$, 0 ও -2 (iii) $x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$, $\frac{5}{6}$ ও $\frac{4}{3}$

(iv) $x^2-\sqrt{3}\,x-6=0$, $-\sqrt{3}$ ও $2\sqrt{3}$

2. (i) k-এর কোন মানের জন্য $7x^2+kx-3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $\frac{2}{3}$ হবে হিসাব করে লিখি।

(ii) k-এর কোন মানের জন্য $x^2+3ax+k=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $-a$ হবে হিসাব করে লিখি।

3. যদি $ax^2+7x+b=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ $\frac{2}{3}$ এবং -3 হয় তবে a ও b-এর মান নির্ণয় করি।

4. সমাধান করি :

(i) $3y^2-20=160-2y^2$ (ii) $(2x+1)^2+(x+1)^2=6x+47$ (iii) $(x-7)(x-9)=195$

(iv) $3x-\frac{24}{x}=\frac{x}{3}$, $x\neq 0$ (v) $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=\frac{15}{x}$, $x\neq 0$ (vi) $10x-\frac{1}{x}=3$, $x\neq 0$

(vii) $\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x}+2=0$, $x\neq 0$ (viii) $\frac{(x-2)}{(x+2)}+6\left(\frac{x-2}{x-6}\right)=1$, $x\neq -2, 6$

(ix) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$, $x\neq 3, -5$ (x) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{12}$, $x\neq 0, -1$

(xi) $\frac{ax+b}{a+bx}=\frac{cx+d}{c+dx}$ $[a\neq b, c\neq d]$, $x\neq -\frac{a}{b}, \frac{-c}{d}$ (xii) $(2x+1)+\frac{3}{2x+1}=4$, $x\neq -\frac{1}{2}$

(xiii) $\frac{x+1}{2}+\frac{2}{x+1}=\frac{x+1}{3}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{6}$, $x\neq -1$ (xiv) $\frac{12x+17}{3x+1}-\frac{2x+15}{x+7}=3\frac{1}{5}$, $x\neq -\frac{1}{3}, -7$

(xv) $\frac{x+3}{x-3}+6\left(\frac{x-3}{x+3}\right)=5$, $x\neq 3, -3$ (xvi) $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$, $x\neq 0, -(a+b)$

(xvii) $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2-5\left(\frac{x+a}{x-a}\right)+6=0$, $x\neq a$ (xviii) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$, $x\neq 0, -b$

(xix) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=\frac{1}{6}$, $x\neq 1,2,3,4$

(xx) $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{2c}{x-c}$, $x\neq a, b, c$ (xxi) $x^2-(\sqrt{3}+2)x+2\sqrt{3}=0$

প্রয়োগ : 16. আমার মামা সাইকেলে 84 কিমি. পথ ভ্রমণ করে দেখলেন যে তিনি যদি ঘণ্টায় 5 কিমি. অধিক বেগে সাইকেল চালাতেন তাহলে ভ্রমণ শেষ হতে 5 ঘণ্টা সময় কম লাগত। মামা ঘণ্টায় কত কিমি. বেগে ভ্রমণ করেছিলেন হিসাব করে লিখি।

ধরি, মামা ঘণ্টায় x কিমি. বেগে ভ্রমণ করেছিলেন।

শর্তানুসারে, $\frac{84}{x}-\frac{84}{x+5}=5$

বা, $\frac{84(x+5)-84x}{x(x+5)}=5$

বা, $\frac{84x+420-84x}{x^2+5x}=5$

বা, $5(x^2+5x)=420$

বা, $x^2+5x=84$

বা, $x^2+5x-84=0$

বা, $x^2+12x-7x-84=0$

বা, $x(x+12)-7(x+12)=0$

বা, $(x+12)(x-7)=0$

হয়, $x+12=0$, $\therefore x=-12$

অথবা, $x-7=0$, $\therefore x=7$

কিন্তু এখানে $x=-12$ হতে পারে না। কারণ গতিবেগের মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore x=7$

$\therefore$ মামা ঘণ্টায় 7 কিমি. বেগে ভ্রমণ করেছিলেন।

প্রয়োগ : 17. আমার বন্ধু অজয় তার খাতায় দুই অঙ্কের একটি সংখ্যা লিখেছে যার দশকের ঘরের অঙ্ক এককের ঘরের অঙ্ক অপেক্ষা 4 কম। সংখ্যাটি থেকে তার অঙ্ক দুটির গুণফল বিয়োগ করলে বিয়োগফল সংখ্যাটির অঙ্ক দুটির অন্তরের বর্গের সমান হয়। অজয় তার খাতায় কী সংখ্যা লিখতে পারে হিসাব করে লেখার চেষ্টা করি।

মনে করি অজয়ের লেখা দুই অঙ্কের সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক x; $\therefore$ দশক স্থানীয় অঙ্ক $(x-4)$

দশক	একক
$x-4$	x

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10(x-4) + x = 11x-40$

শর্তানুসারে, $(11x-40)-x\times(x-4) = \{x-(x-4)\}^2$

বা, $11x-40-x^2+4x = 16$

বা, $-x^2+15x-56 = 0$

বা, $x^2-15x+56 = 0$

বা, $x^2-7x-8x+56 = 0$

বা, $x(x-7)-8(x-7) = 0$

বা, $(x-7)(x-8) = 0$

হয়, $x-7 = 0$, $\therefore x = 7$ অথবা, $x-8 = 0$, $\therefore x = 8$

$\therefore x = 7$ অথবা, $x = 8$

$x = 7$ হলে, দুই অঙ্কের সংখ্যাটি হবে $= 11\times7-40 = 37$

$x = 8$ হলে, দুই অঙ্কের সংখ্যাটি হবে $= 11\times8-40 = 48$

$\therefore$ নির্ণেয় দুই অঙ্কের সংখ্যা 37 অথবা 48

প্রয়োগ : 18. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা 6 বেশি এবং অঙ্কদ্বয়ের গুণফল সংখ্যাটির চেয়ে 12 কম। দুই অঙ্কের সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক কী কী হতে পারে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 19. আব্দুল স্কুলের এক বার্ষিক ক্রীড়া প্রতিযোগিতায় শিক্ষার্থীরা 6 গভীরতাবিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গাকারে দাঁড়াল। এরফলে সম্মুখ সারিতে যতজন শিক্ষার্থী দাঁড়াল, শিক্ষার্থীরা যদি নিরেট বর্গাকারে দাঁড়াত সম্মুখ সারিতে 24 জন কম শিক্ষার্থী থাকত। শিক্ষার্থীর সংখ্যা হিসাব করে লিখি।

ধরি শূন্যগর্ভ বর্গাকারে দাঁড়ালে সম্মুখ সারিতে শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= x$ জন

$\therefore$ মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা হবে $= x^2 - (x-2\times6)^2 = x^2 - (x-12)^2$

আবার নিরেট বর্গাকারে দাঁড়ালে মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা $(x-24)^2$

শর্তানুসারে, $x^2-(x-12)^2 = (x-24)^2$

বা, $x^2-(x^2+144-24x) = x^2-48x+576$

বা, $-x^2+72x-720 = 0$

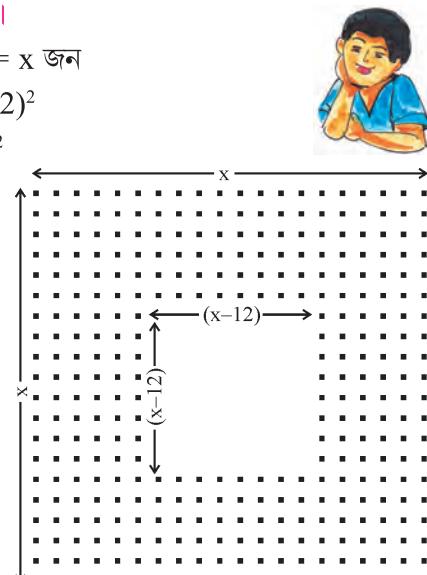
বা, $x^2-72x+720 = 0$

বা, $x^2-60x-12x+720 = 0$

বা, $(x-60)(x-12) = 0$

হয়, $x-60 = 0$, $\therefore x = 60$

অথবা, $x-12 = 0$, $\therefore x = 12$

$\therefore x = 60$ এবং $x = 12$

কিন্তু এখানে $x = 12$ হতে পারে না। কারণ 6 গভীরতাবিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গের সম্মুখ সারির শিক্ষার্থীর সংখ্যা অবশ্যই 12-এর বেশি হবে। $\therefore x = 60$

$\therefore$ নির্ণেয় শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= (x-24)^2$ জন $= (60-24)^2$ জন $= 36^2$ জন $= 1296$ জন

$\therefore$ মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা 1296 জন।

কষে দেখি 1.3

1. দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার অন্তর 3 এবং তাদের বর্গের সমষ্টি 117; সংখ্যা দুটি হিসাব করে লিখি।
2. একটি ত্রিভুজের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ অপেক্ষা 18 মিটার বেশি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 360 বর্গ মিটার হলে, তার উচ্চতা নির্ণয় করি।
3. যদি একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যার পাঁচগুণ, তার বর্গের দ্বিগুণ অপেক্ষা 3 কম হয় তবে সংখ্যাটি নির্ণয় করি।
4. দুটি স্থানের মধ্যে দূরত্ব 200 কিমি.; এক স্থান হতে অপর স্থানে মোটর গাড়িতে যেতে যে সময় লাগে জিপগাড়িতে যেতে তার চেয়ে 2 ঘণ্টা সময় কম লাগে। মোটরগাড়ি অপেক্ষা জিপগাড়ির গতিবেগ ঘণ্টায় 5 কিমি. বেশি হলে, মোটর গাড়ির গতিবেগ হিসাব করে লিখি।
5. অমিতাদের আয়তক্ষেত্রাকার জমির ক্ষেত্রফল 2000 বর্গ মিটার এবং পরিসীমা 180 মিটার। অমিতাদের আয়তক্ষেত্রাকার জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হিসাব করে লিখি।
6. দুই অঙ্কের একটি সংখ্যার দশকের ঘরের অঙ্ক এককের ঘরের অঙ্ক অপেক্ষা 3 কম। সংখ্যাটি থেকে উহার অঙ্ক দুটির গুণফল বিয়োগ করলে বিয়োগফল 15 হয়। সংখ্যাটির একক ঘরের অঙ্ক হিসাব করে লিখি।
7. আমাদের স্কুলের চৌবাচ্চায় দুটি নল আছে। নল দুটি দিয়ে চৌবাচ্চাটি $11\frac{1}{9}$ মিনিটে পূর্ণ হয়। যদি নলদুটি আলাদাভাবে খোলা থাকে তবে চৌবাচ্চাটি ভর্তি করতে একটি নল অপর নলটি থেকে 5 মিনিট বেশি সময় নেয়। প্রত্যেকটি নল পৃথকভাবে চৌবাচ্চাটিকে কত সময়ে পূর্ণ করবে হিসাব করে লিখি।
8. পর্ণা ও পীযূষ কোনো একটি কাজ একত্রে 4 দিনে সম্পন্ন করে। আলাদাভাবে একা কাজ করলে পর্ণার যে সময় লাগবে, পীযূষের তার চেয়ে 6 দিন বেশি সময় লাগবে। পর্ণা একাকী কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করতে পারবে হিসাব করে লিখি।
9. কলমের মূল্য প্রতি ডজনে 6 টাকা কমলে 30 টাকায় আরও 3 টি বেশি কলম পাওয়া যাবে। কমার পূর্বে প্রতি ডজন কলমের মূল্য নির্ণয় করি।

10. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i) একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের সংখ্যা (a) একটি (b) দুটি (c) তিনটি (d) কোনোটিই নয়

(ii) $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণ হলে (a) $b\neq0$ (b) $c\neq0$ (c) $a\neq0$ (d) কোনোটিই নয়

(iii) একটি দ্বিঘাত সমীকরণের চলের সর্বোচ্চ ঘাত (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) কোনোটিই নয়

(iv) $4(5x^2-7x+2) = 5(4x^2-6x+3)$ সমীকরণটি (a) রৈখিক (b) দ্বিঘাত (c) ত্রিঘাত (d) কোনোটিই নয়

(v) $\frac{x^2}{x} = 6$ সমীকরণটির বীজ/বীজদ্বয় (a) 0 (b) 6 (c) 0 ও 6 (d) -6

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $(x-3)^2 = x^2-6x+9$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ii) $x^2=25$ সমীকরণটির একটি মাত্র বীজ 5

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি:

(i) যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির $a=0$ এবং $b\neq0$ হয়, তবে সমীকরণটি একটি ________ সমীকরণ।

(ii) যদি একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজই 1 হয়, তাহলে সমীকরণটি হলো ________

(iii) $x^2=6x$ সমীকরণটির বীজদ্বয় ________ ও ________

11. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) $x^2+ax+3=0$ সমীকরণের একটি বীজ 1 হলে, a-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $x^2-(2+b)x+6=0$ সমীকরণের একটি বীজ 2 হলে, অপর বীজটির মান লিখি।

(iii) $2x^2+kx+4=0$ সমীকরণের একটি বীজ 2 হলে, অপর বীজটির মান লিখি।

(iv) একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ও তার অন্যোন্যকের অন্তর $\frac{9}{20}$; সমীকরণটি লিখি।

(v) $ax^2+bx+35=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় -5 ও -7 হলে, a এবং b-এর মান লিখি।

7 $4x^2 + 9 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কীরূপ বীজ পাব দেখি।

$4x^2 + 9 = 0$

বা, $4x^2 = -9$

বা, $x^2 = -\frac{9}{4}$

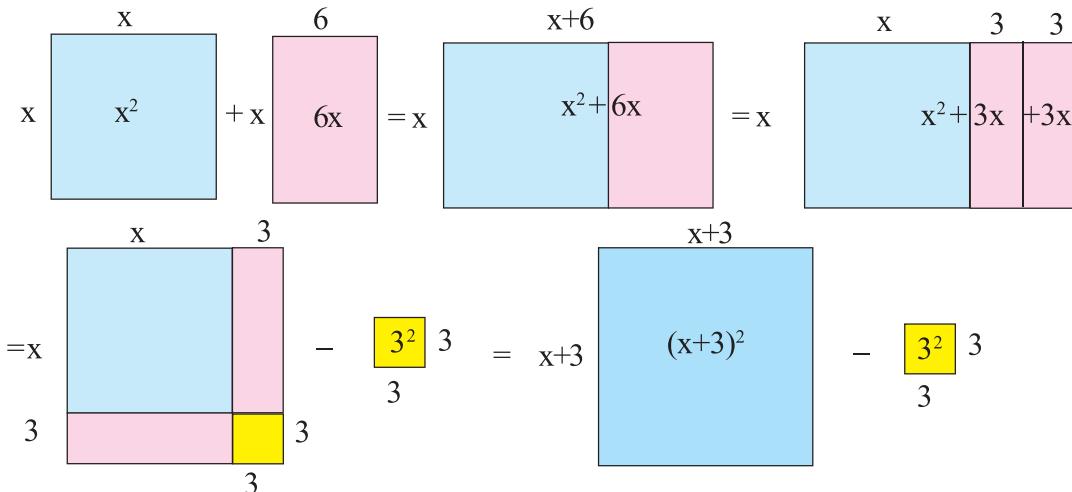
কিন্তু x-এর কোনো বাস্তব মানের জন্য $x^2 = -\frac{9}{4}$ হতে পারে না। কারণ বাস্তব সংখ্যার বর্গ কখনই ঋণাত্মক নয়।

∴ দেখছি, $4x^2+9 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই।

কিন্তু কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের কখন বাস্তব বীজ পাব এবং কখন বাস্তব বীজ পাব না কীভাবে জানব?

প্রথমে $ax^2+bx+c = 0$ [যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণকে $(x+p)^2-q^2=0$ [যেখানে p, q বাস্তব সংখ্যা]-এই আকারে প্রকাশ করি ও বর্গমূলের সাহায্যে বীজদ্বয়ের প্রকৃতি (Nature) জানার চেষ্টা করি।

আমি $x^2+6x+5 = 0$-এই দ্বিঘাত সমীকরণকে $(x+p)^2-q^2 = 0$ [যেখানে p, q বাস্তব সংখ্যা] আকারে প্রকাশ করি।

আমি প্রথমে হাতেকলমে (x^2+6x)-কে দুটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করি।

হাতেকলমে কী পেলাম লিখি।

$x^2+6x = (x^2+\frac{6x}{2}) + \frac{6x}{2}$

$= x^2+3x+3x = (x+3)\,x+3x = (x+3)x+3x+3\times3-3\times3 = (x+3)x+(x+3)3-3\times3 = (x+3)^2-3^2$

$\therefore x^2+6x+5 = (x+3)^2-9+5 = (x+3)^2 - 2^2$

8 $x^2+6x+5 = 0$ —কে $(x+3)^2-4 = 0$ আকারে লেখার পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

একে পূর্ণবর্গাকারে প্রকাশ করার পদ্ধতি বলা হয় [Method of Completing the square].

$x^2+6x+5 = 0$ —দ্বিঘাত সমীকরণকে লেখা যেতে পারে,

$(x+3)^2-9+5 = 0$

বা, $(x+3)^2-4 = 0$

বা, $(x+3)^2 = 4$

বা, $x+3 = \pm2$

হয়, $x+3 = 2$ $\therefore x = -1$

অথবা, $x+3 = -2$ $\therefore x = -5$ $\therefore x^2+6x+5 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় হলো -1 এবং -5.

9 $3x^2+x-10=0$ -এই দ্বিঘাত সমীকরণটির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে কীভাবে বীজদ্বয় নির্ণয় করব দেখি।

$3x^2+x-10=0$ -এই দ্বিঘাত সমীকরণের x^2-এর সহগ 3 যা পূর্ণবর্গ নয়।

$\therefore$ $3x^2+x-10=0$ সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 3 দিয়ে গুণ করে পাই,

$9x^2+3x-30=0$

এখন $9x^2+3x-30=(3x)^2+2.3x.\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2-30$

$=(3x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-30 \quad =(3x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{4}+30) \quad =(3x+\frac{1}{2})^2-\frac{121}{4}$

$\therefore$ $9x^2+3x-30=0$-কে লিখতে পারি, $(3x+\frac{1}{2})^2-\frac{121}{4}=0$

বা, $(3x+\frac{1}{2})^2=\frac{121}{4}=(\frac{11}{2})^2$

বা, $3x+\frac{1}{2}=\pm\frac{11}{2}$

হয়, $3x+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

বা, $3x=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}$

বা, $3x=\frac{10}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{5}{3}$

অথবা, $3x+\frac{1}{2}=-\frac{11}{2}$

বা, $3x=-\frac{11}{2}-\frac{1}{2}$

বা, $3x=-\frac{12}{2}$ $\quad\therefore x=-2$

$\therefore$ $3x^2+x-10=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় -2 এবং $\frac{5}{3}$

10 আমি অন্যভাবে $3x^2+x-10=0$ সমীকরণের উভয়পক্ষকে 3 দিয়ে ভাগ করে বীজদ্বয় নির্ণয় করি।

$3x^2+x-10=0$

বা, $x^2+\frac{x}{3}-\frac{10}{3}=0$

বা, $x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3})^2-\frac{10}{3}=0$

বা, $(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3})^2-\frac{10}{3}=0$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2-(\frac{1}{6})^2-\frac{10}{3}=0$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2-\frac{1}{36}-\frac{10}{3}=0$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2-[\frac{1+120}{36}]=0$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2=\frac{121}{36}$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2=(\frac{11}{6})^2$

বা, $x+\frac{1}{6}=\pm\frac{11}{6}$

হয়, $x+\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$

বা, $x=\frac{11}{6}-\frac{1}{6}$

$\therefore x=\frac{5}{3}$

অথবা, $x+\frac{1}{6}=-\frac{11}{6}$

বা, $x=-\frac{11}{6}-\frac{1}{6}$

$\therefore x=-2$

$\therefore$ $3x^2+x-10=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় -2 এবং $\frac{5}{3}$

প্রয়োগ : 20. আমি $5x^2+23x+12=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে বীজদ্বয় নির্ণয় করি।

$5x^2+23x+12=0$

বা, $x^2+\frac{23}{5}x+\frac{12}{5}=0$

বা, $\left\{x+\frac{1}{2}\left(\frac{23}{5}\right)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{23}{5}\right)\right\}^2+\frac{12}{5}=0$

বা, $\left(x+\frac{23}{10}\right)^2-\left(\frac{23}{10}\right)^2+\frac{12}{5}=0$

বা, $\left(x+\frac{23}{10}\right)^2-\frac{529}{100}+\frac{12}{5}=0$

বা, $\left(x+\frac{23}{10}\right)^2=\frac{529}{100}-\frac{12}{5}=\frac{529-240}{100}=\frac{289}{100}=\left(\frac{17}{10}\right)^2$

বা, $x+\frac{23}{10}=\pm\frac{17}{10}$

হয়, $x+\frac{23}{10}=\frac{17}{10}$ অথবা, $x+\frac{23}{10}=-\frac{17}{10}$

অর্থাৎ হয়, $x=$ ☐ অথবা, $x=$ ☐ [নিজে করি]

$\therefore$ $5x^2+23x+12=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় ☐ ও ☐

প্রয়োগ : 21. আমি অন্যভাবে অর্থাৎ $5x^2+23x+12=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ ও ডানপক্ষকে 5 দিয়ে গুণ করে সমীকরণটি পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে বীজদ্বয় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 22. আমি $2x^2-6x+1=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে সমাধান করি।

$2x^2-6x+1=0$ সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 2 দিয়ে গুণ করে

পাই, $4x^2-12x+2=0$

বা, $(2x)^2-2\cdot2x\cdot3+3^2-3^2+2=0$

বা, $(2x-3)^2-9+2=0$

বা, $(2x-3)^2=7$

বা, $2x-3=\pm\sqrt{7}$

বা, $2x=3\pm\sqrt{7}$

$\therefore$ $x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$

$\therefore$ বীজগুলি পেলাম $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ ও $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$

$\therefore$ $x=\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ ও $x=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান (Solution)।

প্রয়োগ : 23. আমি $9x^2+30x+31 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে সমাধান করি।

$9x^2+30x+31 = 0$

বা, $(3x)^2+2\cdot3x\cdot5+(5)^2-(5)^2+31 = 0$

বা, $(3x+5)^2-25+31 = 0$

বা, $(3x+5)^2 = -6$

কিন্তু x-এর কোনো বাস্তব মানের জন্য $(3x+5)^2$ ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ $9x^2-30x+31 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই।

দ্বিঘাত সমীকরণগুলির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে বীজ নির্ণয়ের মাধ্যমে দেখলাম কোনো কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে, আবার কোনো কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ নেই।

11 আমি $ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে বীজ নির্ণয় করে বীজের প্রকৃতি কখন কী হবে জানার চেষ্টা করি।

$ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$]

উভয়পক্ষকে a দিয়ে ভাগ করে পেলাম,

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

বা, $(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = 0$

বা, $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

বা, $(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = 0$

বা, $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

যদি $b^2 - 4ac \geq 0$ হয়, তবে উভয়পক্ষের বর্গমূল নিয়ে পাই,

$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

বা, $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore$ $ax^2+bx+c = 0$ [$a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বাস্তব বীজ হলো

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ যখন $b^2-4ac \geq 0$

কিন্তু $b^2-4ac < 0$ হলে কী হবে?

$b^2-4ac < 0$ হলে $ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ পাব না।

এই স্তরে আমরা সেইসব দ্বিঘাত সমীকরণের সমস্যা সমাধান করব যাদের ক্ষেত্রে $b^2-4ac \geq 0$;

পেলাম, $ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ। একটি হলো

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং অপরটি $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

কিন্তু যে-কোনো একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয়ের এই সাধারণ সূত্রটিকে কী বলা হয়?

যে-কোনো একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয়ের এই সাধারণ সূত্রটিকে **শ্রীধর আচার্য**-এর **সূত্র** বলা হয়।

প্রাচীন ভারতের এক বিখ্যাত গণিতজ্ঞ **শ্রীধর আচার্য** (750 খ্রি. আনু.) এই সূত্রটি অবিষ্কার করেন। তাই আমরা একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি নির্ণয়ের এই সাধারণ সূত্রটিকে শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র বলে থাকি। তিনি পাটিগণিত ও বীজগণিতকে আলাদা বিষয়রূপে গণ্য করে পৃথক পুস্তক রচনা করেন। পাটিগণিতে বর্গমূল ও ঘনমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি এবং ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে সমস্যার সমাধান সম্পর্কে তাঁর অবদানের কথা বিভিন্ন পুস্তকাদিতেপাওয়া যায়। দুঃখের বিষয়, তাঁর লেখা মূল পাটিগণিত বই-এর অংশবিশেষ খুঁজে পাওয়া গেলেও বীজগণিত বইটি এখনও উদ্ধার করা সম্ভব হয়নি। বীজগণিতে দ্বিঘাত সমীকরণের তাঁর আবিষ্কৃত এই সূত্রের কথা আমরা জানতে পারি পরবর্তী যুগের আর এক খ্যাতনামা গণিতজ্ঞ **দ্বিতীয় ভাস্করাচার্য** (1150 খ্রি.)-এর বইতে শ্রীধর আচার্যের নামে এই সূত্রের উল্লেখ থেকে।

প্রয়োগ : 24. দাদা তার খাতায় এমন দুটি সংখ্যা লিখেছে যে একটি সংখ্যা অপরটির থেকে 3 ছোটো এবং সংখ্যাদুটির গুণফল 70; আমি একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে দাদার লেখা সংখ্যা দুটি নির্ণয় করি।

মনে করি, একটি সংখ্যা x

$\therefore$ অন্য সংখ্যাটি $(x-3)$

শর্তানুসারে, $x(x-3) = 70$

বা, $x^2-3x-70 = 0$ ———— (I)

শ্রীধর আচার্যের সূত্র ব্যবহার করার জন্য (I) নং কে $ax^2+bx+c = 0$ $[a \neq 0]$-এর সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$a = 1$, $b = -3$ এবং $c = -70$

$\therefore$ শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র থেকে পাই,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1 \times (-70)}}{2.1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9+280}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{3 \pm 17}{2}$$

হয়, $x = \frac{3+17}{2} = \frac{20}{2} = 10$

অথবা, $x = \frac{3-17}{2} = \frac{-14}{2} = -7$

যখন $x = 10$ তখন অন্য সংখ্যাটি হবে $10-3 = 7$ এবং

যখন $x = -7$ তখন অন্য সংখ্যাটি হবে $-7 - 3 = -10$

$\therefore$ সংখ্যা দুটি হবে 7 এবং 10 অথবা -10 এবং -7

প্রয়োগ : 25. x-এর প্রাপ্ত মানদুটি অর্থাৎ $x = 10$ এবং $x = -7$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণটি সিদ্ধ করে কিনা যাচাই করি। **[নিজে করি]**

x-এর দুটি মান **একচলবিশিষ্ট** দ্বিঘাত সমীকরণকে সিদ্ধ করলে তবেই নিশ্চিতভাবে বলা যায় যে ওই মান দুটিই ওই দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান বা বীজ।

প্রয়োগ : 26. দুটি ক্রমিক ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল 143; সমীকরণ গঠন করি এবং শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র প্রয়োগ করে অযুগ্ম সংখ্যা দুটি লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 27. কোনো দলের কাছে 195 টাকা জমা ছিল এবং দলে যতজন সদস্য প্রত্যেকে তত টাকা চাঁদা দেওয়ার পর দলের মোট অর্থ দলের সকলের মধ্যে সমানভাগে ভাগ করলে প্রত্যেকে 28 টাকা করে পাবে। শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে ওই দলের সদস্য সংখ্যা নির্ণয় করি।

ধরি, ওই দলের সদস্য সংখ্যা x জন

$\therefore$ প্রত্যেকে x টাকা করে দিলে মোট অর্থের পরিমাণ $= x \times x$ টাকা $= x^2$ টাকা

আগে জমা ছিল 195 টাকা

$\therefore$ মোট অর্থের পরিমাণ $= (x^2+195)$ টাকা

শর্তানুসারে, $x^2+195 = 28 \times x$

বা, $x^2-28x+195 = 0$ ———— (I)

শ্রীধর আচার্যের সূত্র ব্যবহার করার জন্য (I) নং কে $ax^2+bx+c = 0$-এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=1$, $b=-28$ এবং $c=\square$

$\therefore$ শ্রীধর আচার্যের সূত্র থেকে পাই,

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-28)\pm\sqrt{(-28)^2-4.1\times195}}{2\cdot1}$$

$$= \frac{28\pm\sqrt{\square-780}}{2}$$ [নিজে করি]

$$= \frac{28\pm2}{2}$$

হয়, $x = \frac{28+2}{2} = \square$ অথবা, $x = \frac{28-2}{2} = \square$

$\therefore$ সদস্য সংখ্যা 15 হতে পারে আবার 13 হতে পারে।

$x=15$ এবং $x=13$, (I) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করছে কিনা নিজে যাচাই করি **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 28. শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে একটি ধনাত্মক সংখ্যা লিখি যা তার বর্গের চেয়ে 30 কম।

উত্তর সংকেত : ধরি সংখ্যাটি $=x$

$\therefore$ শর্তানুসারে $x^2-x = 30$

শ্রীধর আচার্য-এর সূত্রের সাহায্যে পেলাম $x=6$ অথবা -5 **[নিজে করি]**

যেহেতু সংখ্যাটি ধনাত্মক, তাই -5 মানটি গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=6$

প্রয়োগ : 29. প্রীতম একটি কাজ যতদিনে করতে পারে মেহের তার থেকে 5 দিন কমে কাজটি শেষ করে। প্রীতম ও মেহের একত্রে কাজটি করলে 6 দিনে কাজটি শেষ করে। প্রীতম একা কতদিনে কাজটি শেষ করতে পারবে শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

মনে করি, প্রীতম একা x দিনে কাজটি শেষ করে।

মেহের একা (x–5) দিনে কাজটি শেষ করে।

$\therefore$ প্রীতম 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{x}$ অংশ

মেহের 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{x-5}$ অংশ

প্রীতম ও মেহের একত্রে 6 দিনে কাজটি শেষ করে।

$\therefore$ ওরা দুজনে একত্রে 1 দিনে করে $\frac{1}{6}$ অংশ কাজ

শর্তানুসারে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}$ ———— (I)

বা, $\frac{x-5+x}{x(x-5)}=\frac{1}{6}$

বা, $\frac{2x-5}{x^2-5x}=\frac{1}{6}$

বা, $x^2-5x=12x-30$

বা, $x^2-17x+30=0$ ———— (II)

(I) নং সমীকরণের সরল রূপ (II) নং দ্বিঘাত সমীকরণ। এই (II) নং সমীকরণটির সমাধান, শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র অনুসারে হবে—

$$x=\frac{-(-17)\pm\sqrt{(-17)^2-4.1\times30}}{2\cdot1}=\frac{17\pm\sqrt{289-120}}{2}=\frac{17\pm\square}{2}$$

হয়, $x=\frac{17+13}{2}=\square$ অথবা, $x=\frac{17-13}{2}=\square$

$\therefore$ x = 15 অথবা 2

এখানে x=2 হলে প্রীতম 2 দিনে কাজটি শেষ করবে। যেহেতু মেহের প্রীতমের থেকে 5 দিন কমে কাজটি শেষ করে, সুতরাং মেহের যতদিনে কাজটি শেষ করবে তা হবে 2–5 = –3। কিন্তু দিন সংখ্যা কোনোভাবেই ঋণাত্মক হয় না। তাই এখানে x=2 হবে না।

$\therefore$ x=15 অর্থাৎ প্রীতম একা 15 দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

প্রয়োগ : 30. নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলির যদি বাস্তব বীজ থাকে তবে শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে বীজগুলি নির্ণয় করি।

(i) $x^2-6x+4=0$ (ii) $9x^2+7x-2=0$ (iii) $x^2-6x+9=0$ (iv) $2x^2+x+1=0$
(v) $1-x=2x^2$ (vi) $2x^2-9x+7=0$ (vii) $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$

(i) $x^2-6x+4=0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, a=1, b=–6 এবং c=4

$\therefore b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot4=36-16=20>0$

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$$\text{বীজগুলি} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$$

$$= \frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2}$$

$$= \frac{6\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{4\times5}}{2} = \frac{6\pm2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(3\pm\sqrt{5})}{2} = 3\pm\sqrt{5}$$

$\therefore$ (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $(3+\sqrt{5})$ এবং $(3-\sqrt{5})$।

(ii) $9x^2+7x-2=0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=9$, $b=7$ এবং $c=-2$

$\therefore b^2-4ac = \square > 0$ **[নিজে হিসাব করি]**

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$$\text{বীজগুলি} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4\cdot9\cdot(-2)}}{2\cdot9} = \frac{-7\pm\sqrt{121}}{18} = \frac{-7\pm11}{18}$$

হয়, $x = \frac{-7+11}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ অথবা, $x = \frac{-7-11}{18} = -1$

$\therefore$ (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয় -1 ও $\frac{2}{9}$

(iii) $x^2-6x+9=0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=1$, $b=-6$ এবং $c=9$

$\therefore b^2-4ac = (-6)^2-4\cdot1\cdot9 = 36-36 = 0$

$\therefore$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$$\text{বীজগুলি} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-6)\pm\sqrt{0}}{2\cdot1} = \frac{6\pm0}{2}$$

হয়, $x = \frac{6+0}{2} = 3$ অথবা, $x = \frac{6-0}{2} = 3$

$\therefore$ (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয় 3 এবং 3

(iv) $2x^2+x+1=0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=2$, $b=1$ এবং $c=1$

$\therefore b^2-4ac = (1)^2-4\cdot2\cdot1 = -7 < 0$

$\therefore$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই।

(v), (vi) ও (vii) নিজে বুঝে শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র প্রয়োগ করে সমাধান করি এবং বীজগুলি নির্ণয় করি।

কষে দেখি 1.4

1. (i) $4x^2+(2x-1)(2x+1)=4x(2x-1)$ -এই সমীকরণটি সমাধানে শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ সম্ভব কিনা বুঝে লিখি।

   (ii) শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে আমরা কোন ধরনের সমীকরণের সমাধান করতে পারি বুঝে লিখি।

   (iii) $5x^2+2x-7=0$ এই সমীকরণে শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে $x=\frac{k\pm12}{10}$ পাওয়া গেলে k-এর মান কী হবে হিসাব করে লিখি।

2. **নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলির বাস্তব বীজ থাকলে শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।**

   (i) $3x^2+11x-4=0$ (ii) $(x-2)(x+4)+9=0$ (iii) $(4x-3)^2-2(x+3)=0$

   (iv) $3x^2+2x-1=0$ (v) $3x^2+2x+1=0$ (vi) $10x^2-x-3=0$

   (vii) $10x^2-x+3=0$ (viii) $25x^2-30x+7=0$ (ix) $(4x-2)^2+6x=25$

3. **নিম্নলিখিত গাণিতিক সমস্যাগুলি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণে প্রকাশ করি এবং শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে বা উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান করি।**

(i) সাথি একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করেছে যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম বাহুর দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 সেমি. বেশি। যদি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অতিভুজের দৈর্ঘ্যের থেকে 2 সেমি. কম হয়, তবে সাথির আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

(ii) যদি দুই অঙ্কের একটি ধনাত্মক সংখ্যাকে উহার এককের ঘরের অঙ্ক দিয়ে গুণ করলে গুণফল 189 হয় এবং দশকের ঘরের অঙ্ক এককের ঘরের অঙ্কের দ্বিগুণ হয়, তবে এককের ঘরের অঙ্কটি নির্ণয় করি।

(iii) সালমার গতিবেগ অণিকের গতিবেগের থেকে 1 মি./সেকেন্ড বেশি। 180 মিটার দৌড়াতে গিয়ে সালমা অণিকের থেকে 2 সেকেন্ড আগে পৌঁছায়। অণিকের গতিবেগ প্রতি সেকেন্ডে কত মিটার হিসাব করে লিখি।

(iv) আমাদের পাড়ায় একটি বর্গক্ষেত্রাকার পার্ক আছে। ওই পার্কের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের থেকে 5 মিটার বেশি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট ও ওই পার্কের বাহুর দৈর্ঘ্য থেকে 3 মি. কম প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রাকার পার্কের ক্ষেত্রফল ওই বর্গক্ষেত্রাকার পার্কের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ অপেক্ষা 78 বর্গ মিটার কম হলে বর্গক্ষেত্রাকার পার্কের বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

(v) আমাদের গ্রামে প্রলয়বাবু তার আয়তক্ষেত্রাকার জমিতে লাগানোর জন্য মোট 350টি লঙ্কার চারা কিনলেন। সারি ধরে চারাগাছ লাগাতে গিয়ে দেখলেন যে, প্রতিটি সারিতে সারির সংখ্যা থেকে 24টি করে বেশী গাছ লাগালে আরও 10টি গাছ অতিরিক্ত থাকে। সারির সংখ্যা হিসাব করে লিখি।

(vi) জোসেফ এবং কুন্তল একটি কারখানায় কাজ করে। জোসেফ একটি জিনিস তৈরি করতে কুন্তলের চেয়ে 5 মিনিট কম সময় নেয়। 6 ঘণ্টা কাজ করে জোসেফ, কুন্তলের চেয়ে 6টি জিনিস বেশি তৈরি করে। কুন্তল ওই সময়ে কয়টি জিনিস তৈরি করে হিসাব করে লিখি।

(vii) স্থিরজলে একটি নৌকার গতিবেগ 8 কিমি/ঘণ্টা। নৌকাটি 5 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 15 কিমি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে 22 কিমি. গেলে, স্রোতের বেগ কত ছিল হিসাব করে লিখি।

(viii) একটি সুপারফাস্ট ট্রেন একটি এক্সপ্রেস ট্রেনের থেকে ঘণ্টায় 15 কিমি. বেশি বেগে যায়। একইসঙ্গে একটি স্টেশন থেকে ছেড়ে 180 কিমি. দূরে অন্য একটি স্টেশনে সুপারফাস্ট ট্রেনটি 1 ঘণ্টা আগে পৌঁছাল। সুপারফাস্ট ট্রেনটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিমি. ছিল নির্ণয় করি।

(ix) রেহানা বাজারে গিয়ে দেখল প্রতি কিগ্রা. মাছের যা দাম, ডালের দাম তা থেকে প্রতি কিগ্রা. 20 টাকা কম এবং চালের দাম প্রতি কিগ্রা. 40 টাকা কম। রেহানা 240 টাকার মাছ ও 240 টাকার ডাল কিনে মোট যে পরিমাণ মাছ ও ডাল পেল তা 280 টাকায় চাল কেনার পরিমাণের সমান। রেহানা প্রতি কিগ্রা. মাছ কী দামে কিনেছিল হিসাব করি।

আজ আমরা স্কুলে একটি মজার খেলা খেলব। আমরা প্রত্যেকে স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে একটি যে-কোনো দ্বিঘাত সমীকরণ লিখব এবং অন্য বন্ধুরা ওই দ্বিঘাত সমীকরণটির বাস্তব বীজ আছে কিনা পরীক্ষা করে বীজগুলি নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে নির্ণয় করবে ও তাদের জানাবে।

12 প্রথমে আমি বোর্ডে লিখলাম $4x^2-16x+15=0$

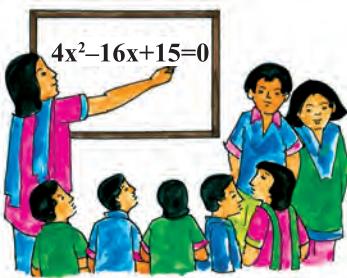
$4x^2-16x+15=0$ ________ (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=4$, $b=-16$ এবং $c=15$

$\therefore b^2-4ac = (-16)^2-4\cdot4\cdot15 = 16>0$

$\therefore$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$\therefore$ (I) নং সমীকরণের বাস্তব বীজদ্বয় ☐ ও ☐ **[নিজে করি]**

$\therefore$ পেলাম (I) নং সমীকরণের **বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান**।

13 এবার নিবেদিতা বোর্ডে লিখল $4x^2+12x+9=0$

$4x^2+12x+9=0$ ________ (II)

(II) নং দ্বিঘাত সমীকরণ কে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=4$, $b=12$ এবং $c=9$

$\therefore b^2-4ac = (12)^2-4\cdot4\cdot9 = 144-144=0$

$\therefore$ (II) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$4x^2+12x+9 = 4x^2+6x+6x+9 = 2x(2x+3)+3(2x+3) = (2x+3)(2x+3)$

$4x^2+12x+9=0$

$\therefore (2x+3)(2x+3)=0$

$\therefore$ বীজদ্বয় $-\frac{3}{2}$ এবং $-\frac{3}{2}$

$\therefore$ পেলাম (II) নং সমীকরণের **বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান**।

14 এবার প্রদীপ লিখল $4x^2-16x+21=0$

$4x^2-16x+21=0$ ________ (III)

(III) নং দ্বিঘাত সমীকরণ কে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=4$, $b=-16$ এবং $c=21$

$\therefore b^2-4ac = (-16)^2-4\cdot4\cdot21 = 256-336=-80<0$

$\therefore$ (III) নং দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ পাব না।

15 আমি $ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq0$] দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় করি ও বীজের প্রকৃতি জানার চেষ্টা করি।

$ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq0$]

এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(I) যদি $b^2-4ac = 0$ হয়, বীজদ্বয় পাই $\frac{-b}{2a}$ এবং $\frac{-b}{2a}$
অর্থাৎ বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান পাই।

(II) যদি $b^2-4ac > 0$ হয়, বীজদ্বয় পাই $\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ এবং $\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

অর্থাৎ বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান পাই।

(III) যদি $b^2-4ac < 0$ হয়, কোনো বাস্তব বীজ পাব না।

বুঝেছি, $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের প্রকৃতি (b^2-4ac) মানের উপর নির্ভর করে।

16 (b^2-4ac)-কে $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কী বলা হয়?

b^2-4ac, $ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq0$] দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের প্রকৃতি নিরূপণ করে বলে, b^2-4ac-কে ওই দ্বিঘাত সমীকরণের **নিরূপক (Discriminant)** বলা হয়।

পেলাম, $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদুটি
(I) বাস্তব ও সমান হবে যখন $b^2-4ac = 0$ হয়
(II) বাস্তব ও অসমান হবে যখন $b^2-4ac > 0$ হয়
(III) কোনো বাস্তব বীজ পাব না যখন $b^2-4ac < 0$ হয়
(I),(II),(III) এর বিপরীত উক্তিগুলিও সত্য।

প্রয়োগ : 31. আমি নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলির বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করি।

(i) $3x^2+x-1=0$ (ii) $4x^2-4x+1=0$ (iii) $x^2+x+1=0$ (iv) $2x^2+x-2=0$

(i) $3x^2+x-1 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=3$, $b=1$ এবং $c=-1$

$\therefore$ নিরূপক $= b^2-4ac = (1)^2-4\cdot3\cdot(-1)$
$= 13 > 0$

$\therefore$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান।

(ii) $4x^2-4x+1 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $= b^2-4ac = (4)^2-4\cdot4\cdot1$
$= 16-16$
$= 0$

$\therefore$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান।

(iii) $x^2+x+1 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $= (1)^2-4\cdot1\cdot1$
$= -3 < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ পাবো না।

(iv) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের প্রকৃতি কী হবে নিজে বুঝে লিখি।

প্রয়োগ : 32. k-এর মান কত হলে $9x^2+3kx+4 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে লিখি।

$9x^2+3kx+4 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=9$, $b=3k$ এবং $c=4$

যেহেতু বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান,

$\therefore$ নিরূপক $= 0$

সুতরাং, $b^2-4ac = 0$

অর্থাৎ, $(3k)^2-4\cdot9\cdot4 = 0$

বা, $9k^2 = 4\times9\times4$

বা, $k^2 = 4\times4$ $\therefore k = \pm4$

$\therefore k = \pm4$-এর জন্য প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে।

প্রয়োগ : 33. k-এর মান কত হলে $2x^2-10x+k = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে বুঝে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 34. প্রমাণ করি যে $x^2(a^2+b^2)+2(ac+bd)x+(c^2+d^2) = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই, যখন $ad \neq bc$.

$x^2(a^2+b^2)+2(ac+bd)x+(c^2+d^2) = 0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $= [2(ac+bd)]^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$= 4(ac+bd)^2-4(a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2)$

$= 4[a^2c^2+b^2d^2+2acbd-a^2c^2-b^2c^2-a^2d^2-b^2d^2]$

$= 4[-(b^2c^2-2acbd+a^2d^2)]$

$= -4(bc-ad)^2 < 0$

[যেহেতু $ad \neq bc \Rightarrow bc-ad \neq 0$]

$\therefore$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই,যখন $ad \neq bc$

প্রয়োগ : 35. $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2) = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদুটি বাস্তব ও সমান হলে, প্রমাণ করি যে, $c^2 = a^2(1+m^2)$

$(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2) = 0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান। $\therefore$ নিরূপক $= 0$

$\therefore (2mc)^2-4(1+m^2)(c^2-a^2) = 0$

বা, $4m^2c^2-4(c^2+c^2m^2-a^2-a^2m^2) = 0$

বা, $4m^2c^2-4c^2-4c^2m^2+4a^2+4a^2m^2 = 0$

বা, $4c^2 = 4a^2+4a^2m^2$

বা, $c^2 = a^2+a^2m^2$

$\therefore c^2 = a^2(1+m^2)$ [প্রমাণিত]

17 আমি $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় যোগ ও গুণ করে কী পাই দেখি।

$ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] ———— (I)

ধরি, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ α ও β

$$\therefore \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

বুঝেছি, **দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি = $-\frac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$**

$$\alpha\times\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

বুঝেছি, **দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল = $\frac{\text{সমীকরণটির ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$**

অয়ন ব্ল্যাকবোর্ডে দ্বিঘাত সমীকরণ লিখল $6x^2-19x-7 = 0$

18 আমি অয়নের লেখা দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় করি এবং বীজদ্বয় যোগ ও গুণ করে কী পাই দেখি।

$6x^2-19x-7=0$ ———— (IV)

(IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=6$, $b=-19$ এবং $c=-7$

(IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $b^2-4ac = (-19)^2-4\cdot6\cdot(-7) > 0$

(IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে এবং বীজদ্বয় ☐ ও ☐ [নিজে হিসাব করে লিখি]

$\therefore$ পেলাম, বীজদ্বয় $\frac{7}{2}$ ও $-\frac{1}{3}$

$$\therefore \text{ বীজদ্বয়ের সমষ্টি} = \frac{7}{2}+(-\frac{1}{3}) = \frac{19}{6} = \frac{-(-19)}{6} = -\frac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$$

$$\text{বীজদ্বয়ের গুণফল} = \frac{7}{2}\times(-\frac{1}{3}) = \frac{-7}{6} = \frac{\text{সমীকরণটির ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$$

19 আমি অন্য যে-কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয় করে বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল নির্ণয় করে দেখছি,

$$\text{বীজদ্বয়ের সমষ্টি} = -\frac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$$

$$\text{বীজদ্বয়ের গুণফল} = \frac{\text{সমীকরণটির ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 36. আমি নীচের দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল নির্ণয় করি।
(i) $6x^2-x-2=0$ (ii) $4x^2-9x=100$

(i) $6x^2-x-2=0$ ———— (I)

(I) নং সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -\frac{-1}{6} = \frac{1}{6}$

বীজদ্বয়ের গুণফল $= \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

(ii) নং দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল নিজে লিখি।

প্রয়োগ : 37. যদি $5x^2+13x+k=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় একটি অপরটির অন্যোন্যক হয়, তবে k-এর মান হিসাব করে লিখি।

$5x^2+13x+k=0$ ———— (I)

ধরি, (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয় α ও $\frac{1}{\alpha}$

$\therefore \alpha \times \frac{1}{\alpha} = \frac{k}{5}$

বা, $\frac{k}{5} = 1 \quad \therefore k = 5$

প্রয়োগ : 38. যদি $3x^2-10x+3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের 1টি বীজ $\frac{1}{3}$ হয়, তবে অপর বীজটি নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 39. যদি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$-এর বীজদ্বয়ের অনুপাত $1:r$ হয়, তবে দেখাই যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$

$ax^2+bx+c=0$ ———— (I)

ধরি, (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয়, α ও $r\alpha$

$\therefore \quad \alpha + r\alpha = -\frac{b}{a}$

বা, $\alpha(1+r) = -\frac{b}{a}$

বা, $\alpha^2(1+r)^2 = \frac{b^2}{a^2}$ ———— (II)

আবার, $\alpha \times r\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha^2 r = \frac{c}{a}$ ———— (III)

(II)-কে (III) দিয়ে ভাগ করে পাই, $\frac{\alpha^2(1+r)^2}{\alpha^2 r} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}}$

বা, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{a}{c} \quad \therefore \frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 40. যদি $x^2+px+q=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদুটি α ও β হয়, তবে $\alpha^3+\beta^3$ এবং $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ -এর মান p ও q-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

$x^2+px+q=0$ ———— (I)

(I) নং সমীকরণের দুটি বীজ α ও β

$\therefore \alpha+\beta=-p$ এবং $\alpha\beta=q$

$\therefore \alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-p)^3-3q(-p)$

$= -p^3+3pq \quad = 3pq-p^3$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-p}{q}=-\frac{p}{q}$

প্রয়োগ : 41. $ax^2+bx+c=0\ [a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ α ও β হলে, $\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}\right)$ -এর মান a, b ও c-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি। **[নিজে করি]**

আমার বন্ধু শীলা এক মজার কাজ করল।

সে বোর্ডে লিখল— দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি 3 ও 4 হলে দ্বিঘাত সমীকরণটি কী হবে?

20 কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় জানা থাকলে, ওই দ্বিঘাত সমীকরণ কীভাবে পাব?

অর্থাৎ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ α ও β হলে সমীকরণটি নির্ণয় করি।

ধরি, যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ α ও β সেই সমীকরণটি হলো

$ax^2+bx+c=0\ [a\neq0]$ ———— (I)

$\therefore\ ax^2+bx+c=0$

বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ [a দিয়ে উভয়পক্ষকে ভাগ করে পাই]

বা, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ [$\because \alpha, \beta$ (I) নং সমীকরণের বীজ]

যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β সেই সমীকরণটি,

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

21 এবার আমি শীলার বোর্ডে লেখা শর্তানুযায়ী দ্বিঘাত সমীকরণ তৈরি করি।

যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় 3 ও 4 সেই সমীকরণটি হলো,

$x^2-(3+4)x+3\times4=0 \quad \therefore x^2-7x+12=0$

প্রয়োগ : 42. $x^2-7x+12=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় করে দেখছি বীজদ্বয় 3 ও 4. **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 43. যদি $ax^2+bx+c=0\ [a\neq0]$ সমীকরণটির বীজ α ও β হয়, তবে যে সমীকরণের বীজ $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ তার সমীকরণ নির্ণয় করি।

$ax^2+bx+c=0$ ———— (I)

α ও β, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ, $\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\times\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a}{c} = \frac{b^2 - 2ac}{ac}$$

আবার, $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 1$ ———— (III)

$\therefore$ যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ তার সমীকরণ

$$x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) x + \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

বা, $x^2 - \left(\frac{b^2 - 2ac}{ac}\right) x + 1 = 0 \quad \therefore acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

কষে দেখি 1.5

1. নীচের দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি লিখি—
   (i) $2x^2+7x+3=0$ (ii) $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ (iii) $2x^2-7x+9=0$ (iv) $\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$
2. k-এর কোন মান/মানগুলির জন্য নীচের প্রতিটি দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব ও সমান বীজ থাকবে হিসাব করে লিখি—
   (i) $49x^2+kx+1=0$ (ii) $3x^2-5x+2k=0$ (iii) $9x^2-24x+k=0$ (iv) $2x^2+3x+k=0$
   (v) $x^2-2(5+2k)x+3(7+10k)=0$ (vi) $(3k+1)x^2+2(k+1)x+k=0$
3. নীচে প্রদত্ত বীজদ্বয় দ্বারা দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি—
   (i) 4, 2 (ii) –4, –3 (iii) –4, 3 (iv) 5, –3
4. m-এর মান কত হলে, $4x^2+4(3m-1)x+(m+7)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি পরস্পর অন্যোন্যক হবে।
5. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হলে, প্রমাণ করি যে, $2b=a+c$
6. $(a^2+b^2)x^2-2(ac+bd)x+(c^2+d^2)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হলে, প্রমাণ করি যে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
7. প্রমাণ করি যে, $2(a^2+b^2)x^2+2(a+b)x+1=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ থাকবে না, যদি $a \neq b$ হয়।
8. $5x^2+2x-3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ α ও β হলে,
   (i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\alpha^3+\beta^3$ (iii) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (iv) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ -এর মান নির্ণয় করি।
9. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হলে, দেখাই যে, $2b^2=9ac$.
10. যে সমীকরণের বীজগুলি $x^2+px+1=0$ সমীকরণের বীজগুলির অন্যোন্যক, সেই সমীকরণটি গঠন করি।
11. $x^2+x+1=0$ সমীকরণটির বীজগুলির বর্গ যে সমীকরণের বীজ, সেই সমীকরণটি নির্ণয় করি।

12. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) $x^2-6x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি

(a) 2 (b) -2 (c) 6 (d) -6

(ii) $x^2-3x+k=10$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল -2 হলে, k-এর মান

(a) -2 (b) -8 (c) 8 (d) 12

(iii) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হলে, b^2-4ac হবে

(a) >0 (b) $=0$ (c) <0 (d) কোনোটিই নয়

(iv) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হলে

(a) $c=-\frac{b}{2a}$ (b) $c=\frac{b}{2a}$ (c) $c=\frac{-b^2}{4a}$ (d) $c=\frac{b^2}{4a}$

(v) $3x^2+8x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হলে, $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ -এর মান

(a) $-\frac{3}{8}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) -4 (d) 4

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি:

(i) $x^2+x+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব।

(ii) $x^2-x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব নয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি:

(i) $7x^2-12x+18=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফলের অনুপাত ________

(ii) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় পরস্পর অন্যোন্যক হলে, $c=$ ________

(iii) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় পরস্পর অন্যোন্যক এবং বিপরীত (ঋণাত্মক) হলে, $a+c=$ ________

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি 14 এবং গুণফল 24 হলে, দ্বিঘাত সমীকরণটি লিখি।

(ii) $kx^2+2x+3k=0$ $(k\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফল সমান হলে, k-এর মান লিখি।

(iii) $x^2-22x+105=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হলে, $(\alpha-\beta)$-এর মান লিখি।

(iv) $x^2-x=k(2x-1)$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি শূন্য হলে, k-এর মান লিখি।

(v) $x^2+bx+12=0$ এবং $x^2+bx+q=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি বীজ 2 হলে, q-এর মান লিখি।

2 সরল সুদকষা
SIMPLE INTEREST

আজ আমাদের খুব মজা। আজ স্কুলে আমাদের ক্লাসের সকল ছাত্রছাত্রীরা নিজেদের নামে ব্যাংকের অ্যাকাউন্ট খুলবে। আমাদের প্রত্যেকের নিজস্ব ব্যাংকের পাস বই থাকবে। আমরা ইচ্ছামতো টাকা জমাতে ও তুলতে পারব।

আমার দাদা গত বছরে ওই ব্যাংকে অ্যাকাউন্ট করেছিল। দাদা ব্যাংকে 800 টাকা জমা রেখেছিল।

1 বছর পরে দাদার পাস বই-এ দেখেছি 800 টাকা বেড়ে গিয়ে 832 টাকা হয়েছে। কিন্তু এমন কেন হলো?

দাদার টাকা 1 বছর ব্যবহার করার জন্য ব্যাংক দাদাকে (832–800) টাকা = 32 টাকা অতিরিক্ত দিয়েছে।

(1) এই অতিরিক্ত টাকা বা অর্থমূল্যকে কী বলা হয়?

এই অতিরিক্ত অর্থমূল্যকে **সুদ (Interest)** বলা হয়।

এই ধরনের সুদকে **সরল সুদ (Simple Interest)** বলব।

এখানে সুদ = (832–800) টাকা = 32 টাকা

আসল (Principal) = 800 টাকা, সুদাসল বা সবৃদ্ধিমূল (Amount) = সুদ + আসল = 32 টাকা + 800 টাকা
= 832 টাকা

এবং সময় (Time) = 1 বছর।

আসল বা মূলধন— যত টাকা ধার দেওয়া বা নেওয়া অথবা যত টাকা গচ্ছিত রাখা হয়।

সময়— যত সময়ের জন্য ধার দেওয়া বা নেওয়া হয় বা গচ্ছিত রাখা হয়।

সুদ— উত্তমর্ণের বা পাওনাদারের (Creditor) অর্থ সাময়িকভাবে ব্যবহার করার অধিকারের বদলে শর্ত অনুযায়ী অধমর্ণ বা দেনাদার (Debtor) কিছু অতিরিক্ত অর্থমূল্য তাকে দিয়ে থাকেন। এই অর্থমূল্যই সুদ।

যে ব্যক্তি বা সংগঠন টাকা ধার দেন তাকে **উত্তমর্ণ** এবং যে ব্যক্তি বা সংগঠন টাকা ধার করেন তাকে **অধমর্ণ** বলা হয়। যখন কোনো ব্যক্তি পোস্ট অফিস বা ব্যাংকে টাকা জমা রাখেন তখন তিনি **উত্তমর্ণ** এবং ওই পোস্ট অফিস বা ব্যাংক **অধমর্ণ**; তাই পোস্ট অফিস বা ব্যাংক জমা টাকার উপর সুদ দেয়।

আবার যখন কোনো ব্যক্তি ব্যাংক বা সমবায় সমিতি থেকে টাকা ধার করেন তখন ওই ব্যক্তি হলেন **অধমর্ণ** এবং ব্যাংক বা সমবায় সমিতি হলো **উত্তমর্ণ**; তাই ওই ব্যক্তি ব্যাংক বা সমবায় সমিতিকে সুদ দেন।

আমি ওই ব্যাংকে 500 টাকা রেখেছি। কিন্তু আমার বন্ধু সজল ব্যাংকে 300 টাকা জমা রেখেছে।

1 বছর পরে আমার 500 টাকা বেড়ে গিয়ে হলো 520 টাকা এবং সজলের 300 টাকা বেড়ে গিয়ে হলো 312 টাকা।

∴ 1 বছরে আমি সুদ পেলাম (520 – 500) টাকা = 20 টাকা

কিন্তু 1 বছরে সজল সুদ পেল (312 – 300) টাকা = 12 টাকা

(2) একই সময়ের জন্য ব্যাংকে টাকা জমা রেখে আমরা দুজনে আলাদা আলাদা পরিমাণ সুদ পেলাম কেন?

সময় স্থির রাখলে সুদের পরিমাণ আসলের পরিমাণের উপর নির্ভরশীল। আসল বাড়লে সুদের পরিমাণও বাড়বে।

3 ওই ব্যাংকে যে-কোনো টাকা জমা রাখলে কত টাকা সুদ পাব? কীভাবে সহজে হিসাব করব?

প্রথমে ওই ব্যাংকের **সুদের হার** নির্ণয় করতে হবে।

সুদের হার কী?

সুদ সাধারণত বছরের হিসাবে কষা হয়ে থাকে। 100 টাকার 1 বছরে যে পরিমাণ সুদ দেওয়া হয় তাই 'বার্ষিক শতকরা সুদের হার'। যেমন, 'বার্ষিক সরল সুদের হার 10%'-এর অর্থ হলো, 100 টাকার 1 বছরের সুদ 10 টাকা। কোনো কোনো ক্ষেত্রে যাণ্মাসিক, মাসিক, এমনকি দৈনিক হিসাবেও সুদ কষা হয়।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
500	1	20
100	1	?

500 টাকার 1 বছরের সুদ 20 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{20}{500}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{20}{500} \times 100$ টাকা $= 4$ টাকা

$\therefore$ ওই ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 4%

প্রয়োগ : 1. আমি বার্ষিক 4% সরল সুদের হারে যদি ওই ব্যাংকে 1200 টাকা জমা রাখি তবে 1 বছর পরে কত টাকা সুদ পাব হিসাব করি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	4
1200	1	?

ওই ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 4%

সুতরাং, 100 টাকার 1 বছরের সুদ 4 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{4}{100}$ টাকা

1200 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{4 \times 1200}{100}$ টাকা $= \square$ টাকা

প্রয়োগ : 2. [নিজে করি]

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ
600 টাকা	1 বছর	5%	
1800 টাকা	1 বছর	$4\frac{1}{2}$ %	

প্রয়োগ : 3. শ্রাবণী কিছু টাকা ব্যাংকে 1 বছরের জন্য জমা রেখে 45 টাকা সুদ পেয়েছে। ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার 5% হলে, শ্রাবণী কত টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিল হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	5
?	1	45

ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার 5%

∴ 5 টাকা 1 বছরে সুদ পাবে যখন আসল 100 টাকা

1 টাকা 1 বছরে সুদ পাবে যখন আসল $\frac{100}{5}$ টাকা

45 টাকা 1 বছরে সুদ পাবে যখন আসল $\frac{100 \times 45}{5}$ টাকা = ☐ টাকা

∴ শ্রাবণী 900 টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিল।

প্রয়োগ : 4. ওই ব্যাংকে যদি শ্রাবণী বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে 1 বছরে 60 টাকা সুদ পেত, তবে কত টাকা জমা রাখত হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5.

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ
	1 বছর	6%	90 টাকা
	1 বছর	3.5%	59.50 টাকা

[নিজে করি]

প্রয়োগ : 6. রহমতচাচা গ্রামের সমবায় ব্যাংক থেকে বার্ষিক 10% সরল সুদের হারে 750 টাকা 3 বছরের জন্য ধার নিলেন। তিনি মোট কত সুদ ও সুদ-আসল দেবেন হিসাব করে লিখি।

কিন্তু 'মোট সুদ' বলতে কী বোঝায়?

নির্দিষ্ট আসলের উপর নির্দিষ্ট সময়ের জন্য দেয় বা প্রাপ্য সুদকে "**মোট সুদ**" বলা হয়।

সুদাসল বা সবৃদ্ধিমূল = আসল + মোট সুদ

সমবায় ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 10%

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	10
750	3	?

100 টাকার 1 বছরের সুদ 10 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{10}{100}$ টাকা

750 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{10 \times 750}{100}$ টাকা

750 টাকার 3 বছরের সুদ $\frac{10 \times 750 \times 3}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

তিনি মোট সুদ দেবেন ☐ টাকা।

∴ এক্ষেত্রে, সুদ-আসল = 750 টাকা + 225 টাকা = ☐ টাকা।

4 আমি অন্যভাবে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, আসল = p টাকা, সময় = t বছর, বার্ষিক সরল সুদের হার = r % এবং মোট সুদ = I টাকা

অন্যভাবে, 100 টাকার 1 বছরের সুদ r টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{r}{100}$ টাকা

p টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{pr}{100}$ টাকা

p টাকার t বছরের সুদ $\frac{prt}{100}$ টাকা $\therefore I = \frac{prt}{100}$ $\therefore$ পেলাম, $I = \frac{prt}{100}$

এখানে, p = 750 টাকা, t = 3 বছর, r = 10 এবং I = ?

উপরের ঐকিক নিয়মে পাওয়া হিসাব থেকে পেলাম, $I = \frac{10 \times 750 \times 3}{100} = 225$

প্রয়োগ : 7. কিন্তু রহমতচাচা যদি ওই একই সরল সুদের হারে অর্থাৎ বার্ষিক 10 % সরল সুদের হারে 8 বছরের জন্য 750 টাকা ধার করতেন, তবে তিনি কত টাকা সুদ দিতেন হিসাব করি।

100 টাকার 1 বছরের সুদ 10 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{10}{100}$ টাকা

750 টাকার 8 বছরের সুদ $\frac{10 \times 750 \times 8}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

অন্যভাবে, সুদ (I) = $\frac{prt}{100} = \frac{750 \times 10 \times 8}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

[এখানে, p = 750 টাকা, r = 10 এবং t = 8 বছর]

দেখছি, (i) আসল ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার অপরিবর্তিত থাকলে সময় ও মোট সুদ সরল সম্পর্কে আছে অর্থাৎ সময় বাড়লে মোট সুদ ☐ (বাড়বে/কমবে) এবং সময় ☐ (বাড়লে/কমলে) মোট সুদ কমবে। আবার, (ii) সময় ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার অপরিবর্তিত থাকলে আসল ও মোট সুদ [সরল/ব্যস্ত] সম্পর্কে আছে, অর্থাৎ আসল বাড়লে মোট সুদ বাড়বে আবার আসল কমলে মোট সুদ ☐। **[নিজে বুঝে লিখি]**

কিন্তু আসল ও সময় অপরিবর্তিত থাকলে মোট সুদ ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কী সম্পর্কে আছে হিসাব করে দেখি।

প্রয়োগ : 8. প্রশান্তবাবু ব্যাংক ও পোস্ট অফিসের প্রতিটিতে 580 টাকা করে 4 বছরের জন্য জমা রাখলেন। যদি ব্যাংক ও পোস্ট অফিসের বার্ষিক সরল সুদের হার যথাক্রমে 5 % ও 6 % হয়, তবে প্রতিক্ষেত্রে কত টাকা মোট সুদ পাবেন হিসাব করে লিখি।

ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 5 %

$\therefore$ 4 বছর পরে মোট সুদ পাবেন = $\frac{prt}{100}$ টাকা = $\frac{580 \times 5 \times 4}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

পোস্ট অফিসে বার্ষিক সরল সুদের হার 6 %

$\therefore$ 4 বছর পরে মোট সুদ পাবেন = $\frac{580 \times 6 \times 4}{100}$ টাকা = 139.20 টাকা

দেখছি, (iii) আসল ও সময় অপরিবর্তিত থাকলে মোট সুদ ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার ☐ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে অর্থাৎ বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার বাড়লে মোট সুদ বাড়বে এবং বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কমলে মোট সুদ ☐।

প্রয়োগ : 9. বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে 2003 সালের 1 জানুয়ারি থেকে 8 আগস্ট পর্যন্ত 5000 টাকা ধার নিলে, সুদ ও সুদ-আসলের পরিমাণ কত হবে হিসাব করে লিখি।

সময় = জানুয়ারি 31 দিন + ফেব্রুয়ারি 28 দিন + মার্চ 31 দিন + এপ্রিল 30 দিন + মে 31 দিন + জুন 30 দিন + জুলাই 31 দিন + আগস্ট 7 দিন = 219 দিন = $\frac{219}{365}$ বছর = $\frac{3}{5}$ বছর [2003 সাল লিপইয়ার নয়। তাই, ফেব্রুয়ারি মাস 28 দিন]

[মোট সময় বের করার সময় 1 জানুয়ারি থেকে 8 আগস্ট পর্যন্ত হয় জানুয়ারি মাসে 1 দিন নয়তো আগস্ট মাসে 1 দিন কম হবে]

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	5
5000	$\frac{3}{5}$	?

$\therefore$ 100 টাকার 1 বছরের সুদ 5 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{5}{100}$ টাকা

5000 টাকার $\frac{3}{5}$ বছরের সুদ $\frac{5}{100} \times 5000 \times \frac{3}{5}$ টাকা = ☐ টাকা

অন্যভাবে, সুদ (I) = $\frac{prt}{100}$ [যেখানে p (আসল) = 5000 টাকা, r (বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার) = 5 এবং t (সময় বছরে) = $\frac{3}{5}$ বছর]

$$= \frac{5000 \times 5 \times \frac{3}{5}}{100} \text{ টাকা}$$ = 150 টাকা। সুদ-আসলের পরিমাণ = (500+150) টাকা
= 5150 টাকা

প্রয়োগ : 10. [নিজে করি]

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ	সুদ-আসল
500 টাকা	3 বছর	$6\frac{1}{4}$ %		
146 টাকা	1 দিন	$2\frac{1}{2}$ %		
4565 টাকা	2 বছর 6 মাস	4 %		

প্রয়োগ : 11. আমি বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 500 টাকা 2 বছরের জন্য ব্যাংকে রেখে কিছু টাকা সুদ পেলাম। ওই ব্যাংকে 400 টাকা কত সময়ের জন্য রাখলে একই পরিমাণ সুদ পাব হিসাব করে দেখি।

বার্ষিক 6% সুদের হারে 500 টাকা 2 বছরের জন্য ব্যাংকে রেখে সুদ পেলাম = ☐ টাকা **[নিজে করি]**

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	বার্ষিক শতকরা সুদের হার	মোট সুদ (টাকায়)
500	2	6	60
400	?	6	60

ধরি, 400 টাকা t বছরের জন্য ব্যাংকে রেখে 60 টাকা সুদ পেলাম।

$\therefore \frac{400 \times t \times 6}{100} = 60$

বা, $24t = 60$

বা, $t = \frac{60}{24}$ $\quad \therefore t = 2\frac{1}{2}$

$\therefore$ বার্ষিক 6 % সরল সুদের হারে 400 টাকার $2\frac{1}{2}$ বছরে মোট সুদ হয় 60 টাকা।

অন্যভাবে, 500 টাকার 60 টাকা মোট সুদ হয় 2 বছরে

1 টাকার 60 টাকা মোট সুদ হয় 2×500 বছরে

400 টাকার 60 টাকা মোট সুদ হয় $\frac{2 \times 500}{400}$ বছরে $= 2\frac{1}{2}$ বছরে

$\therefore$ দেখছি, (iv) বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার ও মোট সুদ অপরিবর্তিত থাকলে আসল ও সময় ☐ [সরল/ব্যস্ত] সম্পর্কে আছে। অর্থাৎ আসল বাড়লে সময় কমবে এবং আসল কমলে সময় ☐।

প্রয়োগ : 12. আশাদেবী বার্ষিক 6 % সরল সুদের হারে 4 বছরের জন্য ব্যাংকে কিছু টাকা রেখেছিলেন। ওই সময়ের পরে তিনি মোট 240 টাকা সুদ পেলেন। হিসাব করে দেখি আশাদেবী ব্যাংকে কত টাকা রেখেছিলেন?

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	6
?	4	240

1 বছরে 6 টাকা সুদ হয় যখন আসল 100 টাকা

1 বছরে 1 টাকা সুদ হয় যখন আসল $\frac{100}{6}$ টাকা

4 বছরে 1 টাকা সুদ হয় যখন আসল $\frac{100}{4 \times 6}$ টাকা

4 বছরে 240 টাকা সুদ হয় যখন আসল $= \frac{100 \times 240}{4 \times 6}$ টাকা = ☐ টাকা

অন্যভাবে, ধরি p টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন,

$\therefore$ সুদ $= \frac{p \times 6 \times 4}{100}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{p \times 6 \times 4}{100} = 240$

$\therefore p = \frac{240 \times 100}{6 \times 4} = 1000$

$\therefore$ আশাদেবী 1000 টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন।

প্রয়োগ : 13. ফাঁকা ঘরে হিসাব করে লিখি [নিজে করি]

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ
	4 বছর	$4\frac{1}{2}$ %	72 টাকা
	1 দিন	5 %	1 টাকা

প্রয়োগ : 14. 700 টাকা নির্দিষ্ট বার্ষিক সরল সুদের হারে নির্দিষ্ট সময়ের জন্যে ব্যাংকে রেখে সুদেমূলে 900 টাকা পেলাম। কত টাকা একই হারে একই সময়ের জন্য রাখলে 1350 টাকা পাব হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সুদ-আসল (টাকায়)
700	900
?	1350

$\therefore$ 900 টাকা সুদ-আসল হলে আসল 700 টাকা

1 টাকা সুদ-আসল হলে আসল $\frac{700}{900}$ টাকা

1350 টাকা সুদ-আসল হলে আসল $\frac{700 \times 1350}{900}$ টাকা = ☐ টাকা

প্রয়োগ : 15. কত টাকা বার্ষিক $7\frac{1}{2}$% সরল সুদের হারে 8 বছরে সুদে-আসলে 5160 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
100	1	$7\frac{1}{2}$
100	8	?

100 টাকার 1 বছরের সুদ $7\frac{1}{2}$ টাকা = $\frac{15}{2}$ টাকা

100 টাকার 8 বছরের সুদ $\frac{15}{2} \times 8$ টাকা = 60 টাকা

$\therefore$ এক্ষেত্রে সুদাসল = 100 টাকা + 60 টাকা = 160 টাকা

$\therefore$ নতুনভাবে সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সুদ-আসল (টাকায়)
100	160
?	5160

$\therefore$ 160 টাকা সুদ-আসল হলে আসল 100 টাকা

1 টাকা সুদ-আসল হলে আসল $\frac{100}{160}$ টাকা

5160 টাকা সুদ-আসল হলে আসল $\frac{100 \times 5160}{160}$ টাকা = ☐ টাকা

প্রয়োগ : 16. ফাঁকা ঘরে হিসাব করে লিখি [নিজে করি]

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	সুদ-আসল
	5 বছর	3 %	966 টাকা
	6 বছর	6 %	13600 টাকা

প্রয়োগ : 17. বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 5000 টাকা একটি ব্যাংকে জমা রেখে 3 বছর পরে 900 টাকা সুদ পেলাম। ওই ব্যাংকের বার্ষিক সুদের হার যদি 7% হতো, তবে কত সময়ে ওই 900 টাকা সুদ পেতাম হিসাব করে লিখি।

মনে করি, বার্ষিক 7% সরল সুদে t বছরে 5000 টাকার সুদ 900 টাকা হবে।

$\therefore$ সুদ (I) $= \frac{prt}{100}$ [এখানে p = 5000 টাকা, r = 7, I = 900 টাকা]

$\therefore 900 = \frac{5000 \times 7 \times t}{100}$ $\therefore t = \frac{900}{350} = 2\frac{4}{7}$ $\therefore 2\frac{4}{7}$ বছরে 900 টাকা সুদ পাব এবং $2\frac{4}{7} < 3$

[দেখছি (v) আসল ও মোট সুদ অপরিবর্তিত থাকলে বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার সময়ের সঙ্গে ☐ [সরল/ব্যস্ত] সম্পর্কে আছে অর্থাৎ বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার বৃদ্ধি পেলে সময় হ্রাস পাবে এবং বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার হ্রাস পেলে সময় বৃদ্ধি পাবে।] [নিজে অন্য যে-কোনো উদাহরণ নিয়ে যাচাই করে লিখি]

প্রয়োগ : 18. রামু প্রধান বার্ষিক $5\frac{1}{2}$% সরল সুদের হারে 12500 টাকা কোনো ব্যাংকে রাখলেন। নির্দিষ্ট সময় পরে 2750 টাকা সুদ পেলেন। কত সময়ের জন্য তিনি ওই টাকা ব্যাংকে রেখেছিলেন হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
100	1	$5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$
12500	?	2750

100 টাকার $\frac{11}{2}$ টাকা সুদ হয় 1 বছরে

1 টাকার $\frac{11}{2}$ টাকা সুদ হয় 1×100 বছরে

1 টাকার 1 টাকা সুদ হয় $\frac{1 \times 100}{\frac{11}{2}}$ বছরে $= \frac{1 \times 2 \times 100}{11}$ বছরে

12500 টাকার 1 টাকা সুদ হয় $\frac{1 \times 2 \times 100}{11 \times 12500}$ বছরে

12500 টাকার 2750 টাকা সুদ হয় $\frac{1 \times 2 \times 100 \times 2750}{11 \times 12500}$ বছরে = ☐ বছরে

$\therefore$ রামু প্রধান 4 বছরের জন্য ব্যাংকে টাকা রেখেছিলেন।

অন্যভাবে, ধরি রামু প্রধান t বছরের জন্য ব্যাংকে টাকা রেখেছিলেন।

$\therefore$ বার্ষিক $5\frac{1}{2}$% সুদের হারে 12500 টাকার t বছরে 2750 টাকা সুদ পান।

$\therefore 2750 = \frac{prt}{100}$ [এখানে, p(আসল) = 12500 টাকা, r = $\frac{11}{2}$ (বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার), I = 2750 টাকা (মোট সুদ)]

বা, $2750 = \frac{12500 \times \frac{11}{2} \times t}{100}$ বা, $t = \frac{2750 \times 100 \times 2}{11 \times 12500} = 4$

$\therefore$ রামু প্রধান 4 বছরের জন্য ব্যাংকে টাকা রেখেছিলেন।

প্রয়োগ : 19.

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ
6400 টাকা		$4\frac{1}{2}$ %	1008 টাকা
500 টাকা		5 %	50 টাকা

[নিজে করি]

প্রয়োগ : 20. সহেলি বার্ষিক 4% সরল সুদের হারে 700 টাকা 5 বছরের জন্য ধার করে যে পরিমাণ মোট সুদ দিল, সে যদি 900 টাকা একই সময়ের জন্য ধার করে একই পরিমাণ মোট সুদ দেয়, তবে বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কত হবে হিসাব করে লিখি।

বার্ষিক 4% সরল সুদে 700 টাকার 5 বছরের সুদ = $\frac{700 \times 5 \times 4}{100}$ টাকা = 140 টাকা

সহেলি 900 টাকা 5 বছরের জন্য ধার করে মোট সুদ 140 টাকা দিলে বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার নির্ণয় করি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
900	5	140
100	1	?

900 টাকার 5 বছরের সুদ 140 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{140}{900 \times 5}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{140 \times 100}{900 \times 5}$ টাকা = $3\frac{1}{9}$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার $3\frac{1}{9}$ %

[দেখছি (vi) সময় ও মোট সুদ অপরিবর্তিত থাকলে আসল ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হারের মধ্যে ☐ [সরল/ব্যস্ত] সম্পর্ক থাকে। অর্থাৎ আসল বাড়লে সুদের হার কমবে এবং আসল কমলে সুদের হার বাড়বে।]

প্রয়োগ : 21. বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কত হলে 5000 টাকার 8 বছরের মোট সুদ 4800 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
5000	8	4800
100	1	?

5000 টাকার 8 বছরের সুদ 4800 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{4800}{5000 \times 8}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{4800 \times 100}{5000 \times 8}$ টাকা = ☐ টাকা

$\therefore$ বার্ষিক সরল সুদের হার = ☐ %

অন্যভাবে, ধরি, বার্ষিক সরল সুদের হার r%

$\therefore$ বার্ষিক r% সরল সুদের হারে 5000 টাকার 8 বছরের সুদ = $\frac{5000 \times r \times 8}{100}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{5000 \times r \times 8}{100} = 4800$

বা, $r = \frac{4800 \times 100}{5000 \times 8}$ $\therefore r = 12$

$\therefore$ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার 12%.

[$\because I = \frac{prt}{100}$
I = মোট সুদ
p = আসল
r = বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার
t = সময় (বছরে)]

প্রয়োগ : 22. বার্ষিক শতকরা কত হার সরল সুদে 73000 টাকা 1 দিনে সুদে-আসলে 73001 টাকা হয় হিসাব করে লিখি।

মোট সুদ = 73001 টাকা – 73000 টাকা = 1 টাকা

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,	আসল (টাকায়)	সময় (দিনে)	মোট সুদ (টাকায়)
	73000	1	1
	100	365	?

∴ 73000 টাকার 1 দিনের সুদ 1 টাকা

1 টাকার 1 দিনের সুদ $\frac{1}{73000}$ টাকা

100 টাকার 365 দিনের সুদ $\frac{100 \times 365}{73000}$ টাকা = 0.5 টাকা

∴ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার 0.5 %

অন্যভাবে, মোট সুদ (I) = 73001 টাকা – 73000 টাকা = 1 টাকা

আসল (p) = 73000 টাকা, t = 1 দিন $= \frac{1}{365}$ বছর

ধরি, বার্ষিক সরল সুদের হার r%

$I = \frac{prt}{100}$ বা, $1 = \frac{73000 \times r \times 1}{100 \times 365}$ বা, $r = \frac{36500}{73000}$ বা, $r = \frac{5}{10}$ $\therefore r = 0.5$

∴ বার্ষিক সরল সুদের হার 0.5%

প্রয়োগ : 23. (i) বার্ষিক শতকরা কত হার সরল সুদে 500 টাকার 4 বছরের সুদ 100 টাকা হবে নির্ণয় করি।

(ii) বার্ষিক শতকরা কত হার সরল সুদে 910 টাকার 2 বছর 6 মাসে সুদে-আসলে 955.50 টাকা হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 24. (i) রাবেয়া 750 টাকা বার্ষিক 8% হারে সরল সুদে 6 বছরের জন্য ব্যাংকে জমা রাখলেন। তিনি সুদে-আসলে কত টাকা পেলেন হিসাব করে লিখি।

(ii) কিন্তু বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কত হলে ওই টাকা থেকে তিনি একই সময়ে সুদেমূলে 1200 টাকা পেতেন নির্ণয় করি।

(iii) যদি প্রথম ক্ষেত্রের বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হারই থাকত, তবে প্রথম ক্ষেত্রের ওই টাকা থেকে তিনি কত বছরে সুদেমূলে 1170 টাকা পেতেন হিসাব করে লিখি।

(i) গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,	আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
	100	1	8
	750	6	?

100 টাকার 1 বছরের সুদ 8 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{8}{100}$ টাকা

750 টাকার 6 বছরের সুদ $\frac{8 \times 750 \times 6}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

অন্যভাবে, বার্ষিক 6% সুদের হারে 750 টাকার 6 বছরের সুদ $= \frac{750 \times 6 \times 8}{100}$ টাকা = 360 টাকা

[$I = \frac{prt}{100}$ সূত্রের সাহায্যে]

∴ রাবেয়া সুদে-আসলে মোট 750 টাকা + 360 টাকা = 1110 টাকা পেলেন।

(ii) গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
750	6	(1200 – 750) = 450
100	1	?

750 টাকার 6 বছরের সুদ 450 টাকা

1 টাকার 6 বছরের সুদ $\frac{450}{750}$ টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{450}{750 \times 6}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{450 \times 100}{750 \times 6}$ টাকা = ☐ টাকা

∴ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার 10%

অন্যভাবে, ধরি নির্ণেয় বার্ষিক সুদের হার r%

$I = \frac{prt}{100}$ যেখানে, I = মোট সুদ, p = আসল, r = বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার, t = সময় (বছরে)

∴ সুদ = $\frac{750 \times r \times 6}{100}$

শর্তানুসারে, $450 = \frac{750 \times r \times 6}{100}$ ∴ $r = \frac{450 \times 100}{750 \times 6} = 10$

∴ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার 10% .

(iii) গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
100	1	8
750	?	(1170–750) = 420

100 টাকার 8 টাকা সুদ হয় 1 বছরে

1 টাকার 8 টাকা সুদ হয় 1×100 বছরে

1 টাকার 1 টাকা সুদ হয় $\frac{1 \times 100}{8}$ বছরে

750 টাকার 1 টাকা সুদ হয় $\frac{1 \times 100}{750 \times 8}$ বছরে

750 টাকার 420 টাকা সুদ হয় = $\frac{1 \times 100 \times 420}{750 \times 8}$ বছরে = 7 বছরে

অন্যভাবে, ধরি, t বছরে 750 টাকার বার্ষিক 8% সরল সুদে মোট সুদ 420 টাকা হয়।

$I = \frac{prt}{100}$ যেখানে, I = মোট সুদ, p = আসল, r = বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার, t = সময় (বছরে)

∴ $420 = \frac{750 \times t \times 8}{100}$

∴ $t = \frac{420 \times 100}{750 \times 8} = 7$

∴ নির্ণেয় সময় 7 বছর।

প্রয়োগ : 25. কোনো মূলধন বার্ষিক শতকরা একই সরল সুদের হারে 3 বছরে 560 টাকা এবং 5 বছরে 600 টাকা হলে, মূলধনের পরিমাণ এবং বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার নির্ণয় করি।

প্রদত্ত তথ্য বিশ্লেষণ করে পাই,

আসল + 5 বছরের সুদ = 600 টাকা
আসল + 3 বছরের সুদ = 560 টাকা

(বিয়োগ করে পাই), 2 বছরের সুদ = 40 টাকা

2 বছরের সুদ 40 টাকা

1 বছরের সুদ $\frac{40}{2}$ টাকা

3 বছরের সুদ $\frac{40 \times 3}{2}$ টাকা = 60 টাকা

$\therefore$ আসল = 560 টাকা – 60 টাকা = 500 টাকা,

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
500	3	60
100	1	?

500 টাকার 3 বছরের সুদ 60 টাকা

1 টাকার 3 বছরের সুদ $\frac{60}{500}$ টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{60}{500 \times 3}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{60 \times 100}{500 \times 3}$ টাকা = 4 টাকা

$\therefore$ বার্ষিক সরল সুদের হার 4%

সুতরাং, মূলধনের পরিমাণ 500 টাকা এবং বার্ষিক সরল সুদের হার 4%

প্রয়োগ : 26. কিছু পরিমাণ টাকার একই শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হারে 3 বছরে সবৃদ্ধিমূল (সুদে-আসলে) 496 টাকা এবং 5 বছরের সবৃদ্ধিমূল 560 টাকা হলে, ওই টাকার পরিমাণ এবং শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হার হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 27. সুবীরবাবু চাকুরি থেকে অবসর নেওয়ার সময় প্রভিডেন্ট ফান্ড ও গ্রাচুইটি বাবদ এককালীন 6,00,000 টাকা পেলেন। ওই টাকা তিনি এমনভাবে ভাগ করে পোস্ট অফিস ও ব্যাংকে আমানত করতে চান, যেন প্রতিবছর সুদ বাবদ তিনি 34,000 টাকা পান। যদি পোস্ট অফিস ও ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার যথাক্রমে 6% ও 5% হয়, তবে তিনি কোথায় কত টাকা রাখবেন হিসাব করে লিখি।

সুবীরবাবু যদি তার সমস্ত টাকা বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে ব্যাংকে রাখতেন তবে তিনি বছরে সুদ পেতেন

$= 600000 \times \frac{5}{100}$ টাকা = 30000 টাকা

কিন্তু তিনি (34000 টাকা – 30000 টাকা) = 4000 টাকা বছরে বেশি পেতে চান।

পোস্ট অফিসে 1 বছরে বেশি সুদ পান (6% – 5%) = 1%

$\therefore$ তিনি পোস্ট অফিসে এমন পরিমাণ টাকা রাখবেন যাতে সেখান থেকে বাড়তি 1% সুদ = 4000 টাকা হয়

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

পোস্ট অফিসে জমা রাখলেন (টাকা)	বাড়তি সুদ পাওয়া যাবে (টাকা)
100	1
?	4000

$\therefore$ 1 টাকা বাড়তি সুদ পাওয়া যাবে 100 টাকা জমা রাখলে। সুতরাং 4000 টাকা বাড়তি সুদ পাওয়া যাবে 100 $\times$ 4000 টাকা = 400000 টাকা জমা রাখলে।

$\therefore$ সুবীরবাবু পোস্ট অফিসে 400000 টাকা এবং ব্যাংকে (600000 – 400000) টাকা
= 200000 টাকা রেখেছিলেন।

অন্যভাবে

ধরি, সুবীরবাবু x টাকা ব্যাংকে এবং (600000 – x) টাকা পোষ্ট অফিসে রেখেছিলেন।

$\therefore$ ব্যাংক থেকে সুদ পাবেন, $\frac{x\times5\times1}{100}$ টাকা

পোস্ট অফিস থেকে সুদ পাবেন $\frac{(600000-x)\times6\times1}{100}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{5x}{100}+\frac{6\,(600000-x)}{100}=34000$

বা, $5x + 3600000 - 6x = 34000 \times 100$

বা, $-x = 3400000 - 3600000$

বা, $-x = -200000$

$\therefore x = 200000$

$\therefore$ সুবীরবাবু ব্যাংকে রেখেছিলেন 200000 টাকা এবং পোস্ট অফিসে রেখেছিলেন (600000 – 200000) টাকা
= 400000 টাকা।

প্রয়োগ : 28. তাঁত শিল্পীদের এক সমবায় সমিতি যন্ত্রচালিত তাঁত ক্রয় করার সময় কেন্দ্রীয় সমবায় ব্যাংক থেকে এই শর্তে কিছু টাকা ধার করেছিলেন যে, প্রতি দুই বছর অন্তর বার্ষিক 9% সরল সুদের হারে সুদ এবং আসলের $\frac{1}{5}$ অংশ পরিশোধ করবে।

দুই বছর বাদে প্রথম কিস্তিবাবদ সমিতি যদি 19000 টাকা শোধ করে থাকে, তবে কত টাকা ধার করেছিলেন হিসাব করে লিখি।

ধরি, সমবায় সমিতি x টাকা ধার করেছিলেন।

$\therefore$ 2 বছরের সুদ = $\frac{x\times2\times9}{100}$ টাকা = $\frac{9x}{50}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{9x}{50}+\frac{x}{5}=19000$

বা, $\frac{9x+10x}{50}=19000$

বা, $19x = 19000 \times 50$

বা, $x = \frac{19000\times50}{19}$

$\therefore x = 50000$

$\therefore$ সমবায় সমিতি 50000 টাকা ধার করেছিলেন।

প্রয়োগ : 29. আমার কাকিমা তার 13 বছর ও 15 বছর বয়সের দুই পুত্রের নামে 56000 টাকা এমনভাবে উইল করবেন যে, যখন তাদের বয়স 18 বছর হবে তখন বার্ষিক 10% সরল সুদের হারে প্রত্যেকের প্রাপ্ত সুদ-আসল সমান হবে। প্রতি পুত্রের জন্য উইলে বরাদ্দ টাকার পরিমাণ কী হবে নির্ণয় করি।

মনে করি, ছোটো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা = x এবং বড়ো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা = (56000 – x)

∴ 18 বছর বয়সে ছোটো ছেলের প্রাপ্য সবৃদ্ধিমূল হবে $\left\{x+\frac{x\times(18-13)\times 10}{100}\right\}$ টাকা = $\frac{3x}{2}$ টাকা

18 বছর বয়সে বড়ো ছেলের প্রাপ্য সবৃদ্ধিমূল হবে = $\left\{(56000-x)+\frac{(56000-x)\times(18-15)\times 10}{100}\right\}$ টাকা

$= \frac{13}{10}(56000-x)$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{3x}{2}=\frac{13}{10}(56000-x)$

বা, $30x = 26(56000-x)$

বা, $15x = 13(56000-x)$

বা, $28x = 13 \times 56000$ ∴ $x =$ ☐

∴ ছোটো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা 26000

এবং বড়ো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা (56000 – 26000) = 30000

অন্যভাবে, ধরি, ছোটো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা x

এবং বড়ো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা y

শর্তানুসারে, $x + y = 56000$ ———— (i)

∴ 18 বছর বয়সে ছোটো ছেলের প্রাপ্য সবৃদ্ধিমূল হবে $\left\{x+\frac{x\times(18-13)\times 10}{100}\right\}$ টাকা = $\frac{3x}{2}$ টাকা

18 বছর বয়সে বড়ো ছেলের প্রাপ্য সবৃদ্ধিমূল হবে = $\left\{y+\frac{y(18-15)\times 10}{100}\right\}$ টাকা = $\left\{y+\frac{3y}{10}\right\}$ টাকা

$= \frac{13y}{10}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{3x}{2}=\frac{13y}{10}$ বা, $30x = 26y$ ∴ $x=\frac{13y}{15}$ ———— (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x + y = 56000$

বা, $\frac{13y}{15}+y=56000$ বা, $\frac{28y}{15}=56000$ বা, $y = 56000\times\frac{15}{28}$

∴ $y = 30000$

$x = 56000 - 30000 = 26000$

∴ আমার কাকিমা ছোটো ছেলের জন্য 26000 টাকা এবং বড়ো ছেলের জন্য 30000 টাকা বরাদ্দ করবেন।

প্রয়োগ : 30. বিমলকাকু তাঁর 12 বছরের ছেলে এবং 14 বছরের মেয়ের জন্য 187500 টাকা ব্যাংকে বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে এমনভাবে জমা রাখলেন যাতে, উভয়ের বয়স যখন 18 বছর হবে তারা প্রত্যেকে সুদে-আসলে সমান টাকা পাবে। তিনি তাঁর ছেলে এবং মেয়ের জন্য ব্যাংকে কত টাকা করে জমা রেখেছিলেন হিসাব করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 31. ফতিমাবিবি একটি মাসিক সঞ্চয় প্রকল্পে প্রতি মাসের প্রথম দিনে 100 টাকা করে জমা করেন। তিনি এভাবে এক বছর টাকা জমা রাখলেন। যদি বার্ষিক সরল সুদের হার 6% হয়, তাহলে বছরের শেষে তিনি সুদে-আসলে কত টাকা পাবেন হিসাব করি।

ফতিমাবিবি প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ..., শেষ মাসের টাকা যথাক্রমে 12 মাস, 11 মাস, 10 মাস, ..., 1 মাসের জন্য জমা করেন।

সুতরাং, 1 বছরের মোট সুদ,

$$= \left(\frac{100\times\frac{12}{12}\times6}{100} + \frac{100\times\frac{11}{12}\times6}{100} + \frac{100\times\frac{10}{12}\times6}{100} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{100\times\frac{1}{12}\times6}{100} \right) \text{ টাকা}$$

$$= \frac{100\times6}{12\times100}(12+11+10+\ldots\ldots\ldots+1) \text{ টাকা} = \frac{1}{2}\times78 \text{ টাকা} = 39 \text{ টাকা}$$

$\therefore$ তিনি 1 বছর পর সুদে-আসলে পাবেন (100×12+39) টাকা = 1239 টাকা।

প্রয়োগ : 32. জয়ন্ত একটি মাসিক সঞ্চয় প্রকল্পে প্রতি মাসের প্রথম দিন 1000 টাকা করে জমা করে। ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 5% হলে জয়ন্ত 6 মাস শেষে সুদে-আসলে কত টাকা পাবে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 33. রমেনবাবু মোট 370000 টাকা তিনটি ব্যাংকে জমা রাখেন। তিনটি ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার যথাক্রমে 4%, 5% এবং 6%; 1 বছর পর তাঁর তিনটি ব্যাংকে মোট সুদের পরিমাণ সমান হয়। তিনি তিনটি ব্যাংকে কত টাকা করে জমা রেখেছিলেন হিসাব করি।

ধরি, তিনি প্রথম ব্যাংকে x টাকা, দ্বিতীয় ব্যাংকে y টাকা এবং তৃতীয় ব্যাংকে z টাকা জমা রাখেন,

1 বছর পর প্রথম ব্যাংকের মোট সুদ = $\frac{x\times4\times1}{100}$ টাকা = $\frac{4x}{100}$ টাকা

1 বছর পর দ্বিতীয় ব্যাংকের মোট সুদ = $\frac{y\times5\times1}{100}$ টাকা = $\frac{5y}{100}$ টাকা

1 বছর পর তৃতীয় ব্যাংকের মোট সুদ = $\frac{z\times6\times1}{100}$ টাকা = $\frac{6z}{100}$ টাকা

শর্তানুসারে, $x+y+z=370000$ .... (i)

$\frac{4x}{100}=\frac{5y}{100}=\frac{6z}{100}$ .... (ii)

সুতরাং, $4x=5y=6z=k$ (ধরি), যেখানে $k>0$

$\therefore x=\frac{k}{4}, y=\frac{k}{5}, z=\frac{k}{6}$

আবার, $x+y+z=370000$

সুতরাং, $\frac{k}{4}+\frac{k}{5}+\frac{k}{6}=370000$

বা, $\frac{15k+12k+10k}{60}=370000$

বা, $37k=370000\times60$

$\therefore k=600000$

সুতরাং, $x=\frac{600000}{4}=150000$, $y=\frac{600000}{5}=120000$ এবং $z=\frac{600000}{6}=100000$

$\therefore$ তিনি তিনটি ব্যাংকে যথাক্রমে 150000 টাকা, 120000 টাকা এবং 100000 টাকা জমা রাখেন।

প্রয়োগ : 34. সোমাপিসি 620000 টাকা বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে তিনটি ব্যাংকে যথাক্রমে 2 বছর, 3 বছর এবং 5 বছরের জন্য এমনভাবে জমা করেন যাতে তিনটি ব্যাংকের মোট সুদের পরিমাণ সমান হয়। সোমাপিসি কোন ব্যাংকে কত টাকা জমা রেখেছিলেন হিসাব করি। **[নিজে করি]**

কষে দেখি 2

1. দুই বন্ধু একসঙ্গে একটি ছোটো ব্যাবসা চালাবার জন্য বার্ষিক 12% সরল সুদের হারে একটি ব্যাংক থেকে 15000 টাকা ধার নিলেন। 4 বছর পরে ওই টাকার জন্য তাদের কত টাকা সুদ দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

2. 2005 সালের 1 জানুয়ারি থেকে 27 মে পর্যন্ত বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 2000 টাকার সুদ কত হবে নির্ণয় করি।

3. বার্ষিক $8\frac{1}{3}$% সরল সুদে 960 টাকার 1 বছর 3 মাসের সবৃদ্ধিমূল কত হবে নির্ণয় করি।

4. উৎপলবাবু তাঁর জমি চাষের জন্য সমবায় ব্যাংক থেকে বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 3200 টাকা 2 বছরের জন্য ধার নিলেন। 2 বছর পরে সুদে-আসলে তাঁকে কত টাকা শোধ করতে হবে হিসাব করে লিখি।

5. বার্ষিক 5.25% সরল সুদের হারে শোভাদেবী একটি ব্যাংকে কিছু টাকা জমা রাখেন। 2 বছর পর তিনি সুদ হিসাবে 840 টাকা পেলেন। তিনি কত টাকা জমা রেখেছিলেন হিসাব করে লিখি।

6. গৌতম একটি মুরগি খামার খোলার জন্য একটি সমবায় ব্যাংক থেকে বার্ষিক 12% সরল সুদের হারে কিছু টাকা ধার নিলেন। প্রত্যেক মাসে তাঁকে 378 টাকা সুদ দিতে হয়। তিনি কত টাকা ধার নিয়েছিলেন নির্ণয় করি।

7. বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে কোনো টাকা কত বছরে দ্বিগুণ হবে হিসাব করে লিখি।

8. মান্নান মিঞা কিছু টাকা ধার করার 6 বছর পর দেখলেন দেয় সরল সুদের পরিমাণ আসলের $\frac{3}{8}$ অংশ হয়ে গেছে। বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কত ছিল নির্ণয় করি।

9. একটি কৃষি সমবায় সমিতি তার সদস্যদের বার্ষিক 4% সরল সুদের হারে কৃষি ঋণ দেয়। কিন্তু ব্যাংক থেকে টাকা ধার করলে বার্ষিক 7.4% হারে সরল সুদ দিতে হয়। একজন কৃষক যদি ব্যাংক থেকে টাকা ধার না করে সমবায় সমিতির সদস্য হয়ে সমিতি থেকে 5000 টাকা কৃষি ঋণ নেন, তবে তাঁর বছরে সুদ বাবদ কত টাকা বাঁচবে হিসাব করে লিখি।

10. যদি 292 টাকার 1 দিনের সুদ 5 পয়সা হয়, তবে বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার হিসাব করে লিখি।

11. বার্ষিক 8% হার সরল সুদে কত বছরে 600 টাকার সুদ 168 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

12. যদি বার্ষিক 10% হার সরল সুদে 800 টাকা ব্যাংকে জমা দিয়ে সুদে আসলে 1200 টাকা ফেরত পাই, তবে ওই টাকা কত সময়ের জন্য ব্যাংকে জমা ছিল হিসাব করে লিখি।

13. কোনো মূলধন একই বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হারে 7 বছরে সুদে-আসলে 7100 টাকা এবং 4 বছরের সুদে-আসলে 6200 টাকা হলে মূলধন ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার নির্ণয় করি।

14. একই সময়ে অমল রায় ব্যাংকে এবং পশুপতি ঘোষ পোস্ট অফিসে 2000 টাকা করে জমা রাখেন। 3 বছর পর তারা সুদসহ যথাক্রমে 2360 টাকা ও 2480 টাকা ফেরত পান। ব্যাংক ও পোস্ট অফিসের বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হারের অনুপাত কত হবে হিসাব করে লিখি।

15. একটি তাঁত সমবায় সমিতি যন্ত্রচালিত তাঁত ক্রয় করার সময় 15000 টাকা ধার করে। 5 বছর পর সেই ধার শোধ করতে সমিতিকে 22125 টাকা দিতে হলো। ব্যাংকের বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার নির্ণয় করি।

16. আসলামচাচা কর্মক্ষেত্র থেকে অবসর নেওয়ার সময় 1,00,000 টাকা পেলেন। ওই টাকার কিছুটা ব্যাংকে ও বাকিটা পোস্ট অফিসে জমা রাখেন এবং প্রতি বছর সুদ বাবদ মোট 5400 টাকা পান। ব্যাংকের ও পোস্ট অফিসের বার্ষিক সরল সুদের হার যদি যথাক্রমে 5% ও 6% হয়, তবে তিনি কোথায় কত টাকা জমা রেখেছিলেন হিসাব করে লিখি।

17. রেখাদিদি তার সঞ্চিত অর্থের 10000 টাকা দুটি আলাদা ব্যাংকে ভাগ করে একই সময়ে জমা দিলেন। একটি ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার 6% এবং অন্য ব্যাংকটির বার্ষিক সরল সুদের হার 7%; 2 বছর পর তিনি যদি সুদ বাবদ মোট 1280 টাকা পান, তাহলে তিনি কোন ব্যাংকে কত টাকা জমা দিয়েছিলেন হিসাব করে লিখি।

18. কোনো ব্যাংক বার্ষিক 5% হারে সরল সুদ দেয়। ওই ব্যাংকে দীপুবাবু বছরের প্রথমে 15000 টাকা জমা দেওয়ার 3 মাস পরে 3000 টাকা তুলে নিলেন এবং টাকা তুলে নেওয়ার 3 মাস পরে আবার তিনি 8000 টাকা জমা দিলেন। ওই বছরের শেষে দীপুবাবু সুদে-আসলে কত টাকা পাবেন নির্ণয় করি।

19. রহমতচাচা একটি বাড়ি তৈরি করার জন্য বার্ষিক 12% সরল সুদের হারে 240000 টাকা ব্যাংক থেকে ধার নেন। ধার নেওয়ার এক বছর পর তিনি বাড়িটি প্রতি মাসে 5200 টাকায় ভাড়া দেন। ধার নেওয়ার কত বছর পরে তিনি বাড়িভাড়ার আয় থেকে ব্যাংকের টাকা সুদসহ শোধ করবেন তা হিসাব করি।

20. রথীনবাবু তাঁর দুই মেয়ের প্রত্যেকের জন্য ব্যাংকে এমনভাবে টাকা জমা রাখেন যাতে প্রত্যেক মেয়ের বয়স যখন 18 বছর হবে তখন প্রত্যেক মেয়ে 120000 টাকা করে পাবে। ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার 10% এবং মেয়েদের বর্তমান বয়স যথাক্রমে 13 বছর এবং 8 বছর। তিনি প্রত্যেক মেয়ের জন্য ব্যাংকে কত টাকা জমা রেখেছিলেন হিসাব করি।

21. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) বার্ষিক r% হার সরল সুদে p টাকার t বছরের সুদ I টাকা হলে,
(a) $I = prt$ (b) $prtI = 100$ (c) $prt = 100 \times I$ (d) কোনোটিই নয়

(ii) কোনো মূলধন একটি নির্দিষ্ট সরল সুদের হারে 20 বছরে দ্বিগুণ হয়। একই সরল সুদের হারে ওই মূলধন তিনগুণ হবে
(a) 30 বছরে (b) 35 বছরে (c) 40 বছরে (d) 45 বছরে

(iii) কোনো মূলধন 10 বছরে দ্বিগুণ হলে, বার্ষিক সরল সুদের হার
(a) 5% (b) 10% (c) 15% (d) 20%

(iv) x% বার্ষিক সরল সুদের হারে কোনো মূলধনের x বছরে সুদ x টাকা হলে, মূলধনের পরিমাণ
(a) x টাকা (b) 100x টাকা (c) $\frac{100}{x}$ টাকা (d) $\frac{100}{x^2}$ টাকা

(v) বার্ষিক r% সরল সুদের হারে কোনো মূলধনের n বছরে মোট সুদ $\frac{pnr}{25}$ টাকা হলে, মূলধনের পরিমাণ
(a) 2p টাকা (b) 4p টাকা (c) $\frac{p}{2}$ টাকা (d) $\frac{p}{4}$ টাকা

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) যে ব্যক্তি টাকা ধার করেন তাঁকে অধমর্ণ বলে।

(ii) আসল ও শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হার একই থাকলে মোট সুদ সময়ের সঙ্গে ব্যস্ত সমানুপাতে থাকে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) যে ব্যক্তি টাকা ধার দেন তাঁকে _________ বলে।

(ii) বার্ষিক $\frac{r}{2}$% সরল সুদের হারে 2p টাকার t বছরের সুদ-আসল (2p + _________) টাকা।

(iii) 1 বছরে আসল ও সুদ-আসলের অনুপাত 8 : 9 হলে বার্ষিক সরল সুদের হার _________।

22. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) কোনো মূলধন বার্ষিক $6\frac{1}{4}$% সরল সুদের হারে কত বছরে দ্বিগুণ হবে তা লিখি।

(ii) বার্ষিক সরল সুদের হার 4% থেকে $3\frac{3}{4}$% হওয়ায় অমলবাবুর বার্ষিক আয় 60 টাকা কম হয়। অমলবাবুর মূলধন নির্ণয় করি।

(iii) শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হার কত হলে কোনো টাকার 4 বছরের সুদ আসলের $\frac{8}{25}$ অংশ হবে তা নির্ণয় করি।

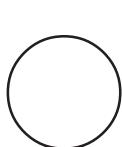
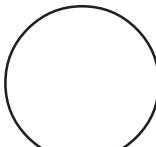
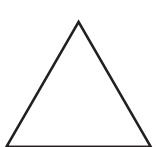
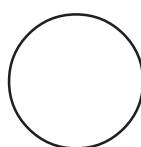
(iv) শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হার কত হলে কোনো টাকার 10 বছরের সুদ সুদ-আসলের $\frac{2}{5}$ অংশ হবে তা নির্ণয় করি।

(v) বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে কত টাকার মাসিক সুদ 1 টাকা তা নির্ণয় করি।

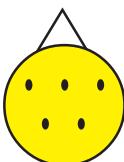
3 বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য
THEOREMS RELATED TO CIRCLE

প্রতি রবিবার আমরা ভাই বোনেরা বাড়ির কাজে ব্যস্ত থাকি। বেশ কিছুদিন হলো আমরা বাড়ির চাবিগুলি সময়মতো খুঁজে পাচ্ছি না। এদিকে ওদিকে ছড়িয়ে থাকছে।

তাই আজ আমরা ঠিক করেছি, চাবিগুলি ঠিকমতো সাজিয়ে আলাদা আলাদা রিং-এ রাখব।

আমার ভাইয়ের অনেকগুলি গোলাকার ও ত্রিভুজাকার চাবির রিং আছে। সেগুলি হলো,

(i) নং

(ii) নং

(iii) নং

(iv) নং

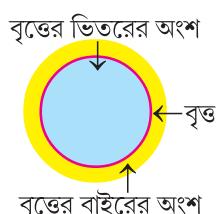
দেখছি, ত্রিভুজাকার রিংটি গোলাকার চাবির রিং-এর মধ্যে পাশের ছবির মতো আটকে গেছে

∴ গোলাকার রিংটি ত্রিভুজাকার রিং-এর প্রায় ☐ **[পরিবৃত্ত/অন্তর্বৃত্ত]**-এর মতো।

এবার আমরা মোটা শক্ত পিচবোর্ডের বৃত্তক্ষেত্রাকার চাকতি তৈরি করলাম ও একটি আংটা লাগিয়ে দেয়ালে টাঙিয়ে দিলাম। এই পিচবোর্ডে পেরেক আটকে চাবির রিংগুলি ঝুলিয়ে রাখব।

আরও কিছু গোলাকার তামার চাবির রিং তৈরি করলাম।

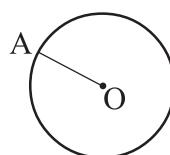
আমি বৃত্তাকার চাবির রিংগুলি খাতায় আঁকি ও কী পাই দেখি।

দেখছি, খাতায় আঁকা প্রতিটি বৃত্ত খাতার তলটিকে তিনটি অংশে ভাগ করেছে, (i) বৃত্তের ভিতরের অংশ (ii) বৃত্ত ও (iii) বৃত্তের বাইরের অংশ।

বৃত্ত ও বৃত্তের ভিতরের অংশ মিলে বৃত্তাকার ক্ষেত্র (Circular region) তৈরি করে।

1 আমি আমার খাতায় স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে একটি বৃত্ত আঁকি ও তার সঙ্গে সংযুক্ত কিছু বিষয় জানার চেষ্টা করি।

একটি বৃত্ত এঁকেছি যার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OA.

বৃত্ত অসংখ্য বিন্দু দ্বারা গঠিত।

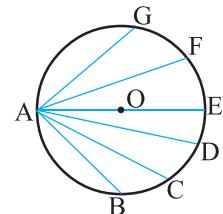
দেখছি, বৃত্তের প্রতিটি বিন্দু কেন্দ্র থেকে ☐।

∴ বৃত্ত হলো একটি সমতলে অসংখ্য বিন্দুর সমষ্টি (collection) যারা প্রত্যেকে ওই সমতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

ওই নির্দিষ্ট বিন্দুটি হলো [ ] এবং কেন্দ্র থেকে বৃত্তের যে-কোনো বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাংশ হলো [ ]।

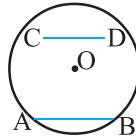
2 আমি বৃত্তের উপর যে-কোনো দুটি বিন্দু যোগ করে কীরকম সরলরেখাংশ পাই দেখি।

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপরে A, B, C, D, E, F ও G বিন্দুগুলি নিলাম।

এবার A বিন্দুর সঙ্গে B, C, D, E, F ও G বিন্দুগুলি যোগ করে যথাক্রমে AB, AC, AD, AE, AF ও AG সরলরেখাংশ পেলাম।

G F A O E D C B

3 এই AB, AC, AD, AE, AF ও AG সরলরেখাংশগুলিকে কী বলা হয়?

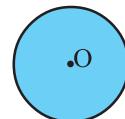
AB, AC, AD, AE, AF ও AG এই সরলরেখাংশগুলিকে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের **জ্যা (Chord)** বলা হয়।
অর্থাৎ বৃত্তের উপরের যে-কোনো দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশকে ওই **বৃত্তের জ্যা** বলা হয়।
পাশের ছবিতে দেখছি AB সরলরেখাংশটি [ ] কিন্তু CD সরলরেখাংশটি [ ] নয়।

C D O A B

বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা [ ] [ব্যাস (diameter)/ব্যাসার্ধ (radius)] **[নিজে করি]**

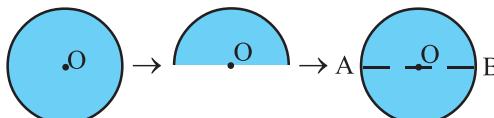
সুতরাং ব্যাস বৃত্তের একটি [ ]। কিন্তু বৃত্তের যে-কোনো জ্যা-ই [ ] নয়।

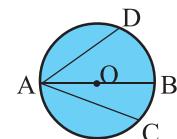
হাতেকলমে

(i) খাতায় একটি বৃত্ত এঁকে ওই বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম যার কেন্দ্র O।

O

(ii) এবার বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি O বিন্দু বরাবর এমনভাবে সমান দু-ভাঁজ করলাম যাতে একটি অংশ অপর অংশের সঙ্গে মিলে যায়।

(iii) এবার ভাঁজ খুলে AB ব্যাস পেলাম যা O বিন্দুগামী।

O → O → A O B

(iv) বৃত্তের উপর B বিন্দু ছাড়া অপর যে-কোনো দুটি বিন্দু C ও D নিলাম। এবং AC ও AD বরাবর ভাঁজ করে ও খুলে AC ও AD জ্যা পেলাম যা O বিন্দুগামী নয়।

D A O B C

(v) ভাঁজ করে AB ব্যাসের সঙ্গে AC ও AD জ্যা দুটি মিলিয়ে দেখছি,

AB [ ] AC [>/< বসাই], AB [ ] AD [>/< বসাই]

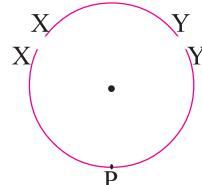
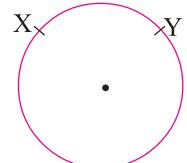
∴ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের ব্যাস ওই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

আমার ছোটো ভাইয়ের বন্ধু রাবেয়া আমাদের সঙ্গে এই মজার কাজে যোগ দিল। সে তার একজোড়া বৃত্তাকার চুড়ির সাহায্যে কতকগুলি বৃত্ত আঁকল। কিন্তু তারি 1 টি চুড়ি ভেঙে 2 টুকরো হয়ে গেল।

আমি ভাঙা টুকরোদুটি জুড়ে বা পাশাপাশি রেখে আগের বৃত্তাকার চুড়ি পাওয়ার চেষ্টা করি।

চুড়িটি X ও Y বিন্দুতে ভেঙে যাওয়ায় X থেকে Y পর্যন্ত একটি বৃত্তের টুকরো পেয়েছি।

4 বৃত্তের এই টুকরোকে কী বলা হয়?

X থেকে Y পর্যন্ত বৃত্তের টুকরোকে **বৃত্তচাপ (Arc)** বলে এবং লেখা হয় $\overset{\frown}{XY}$। এই ছোটো দৈর্ঘ্যের চাপটি **উপচাপ (Minor Arc)** এবং বড়ো দৈর্ঘ্যের চাপটি **অধিচাপ (Major Arc)**। উপচাপটির নাম $\overset{\frown}{XY}$ এবং অধিচাপটির নাম $\overset{\frown}{XPY}$

যদি দুটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য সমান হয়, সেক্ষেত্রে কী পাব?

দুটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য সমান হলে X ও Y বিন্দু দুটি বৃত্তের কোনো ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হবে এবং সেক্ষেত্রে **অর্ধবৃত্ত (Semi circle)** পাব।

আবার সম্পূর্ণ বৃত্তটির দৈর্ঘ্যই হলো **পরিধি (Circumference)**।

আমার ভাই রাবেয়ার আঁকা বৃত্তে একটি জ্যা AB এঁকেছে যা ওই বৃত্তের ব্যাস নয় এবং এর ফলে বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি যে দু-ভাগে বিভক্ত হয়েছে প্রতিটি ভাগে আলাদা রং দিয়েছে।

5 AB জ্যা বৃত্তাকার ক্ষেত্রটিকে যে দুটি ভাগে ভাগ করেছে, প্রতিটি ভাগকে কী বলা হয়?

প্রতিটি ভাগকে **বৃত্তাংশ (Segment)** বলা হয়।
অর্থাৎ কোনো বৃত্তের একটি জ্যা ও একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রকে **বৃত্তাংশ (Segment)** বলে।

চিত্রে দেখছি দুই ধরনের বৃত্তাংশ পেয়েছি। একটি বড়ো বৃত্তাংশ ও অপরটি ছোটো বৃত্তাংশ। এই বড়ো বৃত্তাংশটি **অধিবৃত্তাংশ (Major Segment)** এবং ছোটো বৃত্তাংশটি **উপবৃত্তাংশ (Minor Segment)**।

আমি একটি বৃত্ত এঁকেছি যার কেন্দ্র O এবং বৃত্তের উপর যে-কোনো দুটি বিন্দু A ও B-এর সঙ্গে কেন্দ্র O যোগ করে দুটি ব্যাসার্ধ OA এবং ☐ পেয়েছি।

6 এই OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{AB}$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে কী বলা হয়?

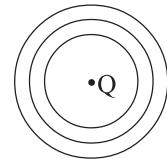
O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং $\overset{\frown}{AB}$ বৃত্তচাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা (Sector)** বলা হয়।

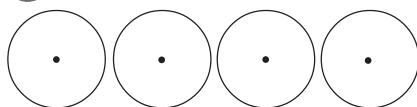
অর্থাৎ যে-কোনো বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ এবং বৃত্তচাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা (Sector)** বলা হয়। এর ফলে দুটি বৃত্তকলা পাব। একটি বড়ো বৃত্তকলা **(Major Sector)** এবং অপরটি ছোটো বৃত্তকলা **(Minor Sector)**।

যদি দুটি বৃত্তকলা সমান হয় আমরা অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্র পাব এবং সেক্ষেত্রে বৃত্তকলার ব্যাসার্ধ দুটি এবং বৃত্তচাপ কেমন হবে নিজে এঁকে লিখি।

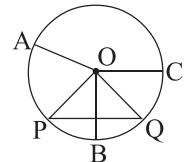
আমার বন্ধু রুমা বোর্ডে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু Q-কে কেন্দ্র করে পাশের ছবির মতো অনেকগুলি বৃত্ত আঁকল।

7 একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে আলাদা আলাদা দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে যে অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করতে পারব তাদের কী বলে?

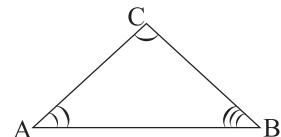
এইসব বৃত্তকে **একেকেন্দ্রীয় বৃত্ত (Concentric Circles)** বলা হয়।

দেখছি, এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট নয়।

8 নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে আলাদা আলাদা বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্ত আঁকলে কী পাই দেখি।

এদের সমান বা **সর্বসম বৃত্ত (Equal or congruent Circles)** বলা হয়।

কষে দেখি 3.1

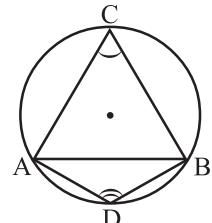
1. পাশের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবি দেখি এবং কোন কোন ব্যাসার্ধ PAQ বৃত্তাংশে অবস্থিত লিখি।
2. **নীচের ☐-এ বুঝে লিখি:**
   (i) একটি বৃত্তে ☐ বিন্দু আছে।
   (ii) বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা ☐।
   (iii) জ্যা বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে দুটি ☐ বিভক্ত করে।
   (iv) বৃত্তের সকল ব্যাস ☐ বিন্দুগামী।
   (v) দুটি বৃত্তাংশ সমান হলে তাদের বৃত্তচাপ দুটির দৈর্ঘ্য ☐ হবে।
   (vi) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বৃত্তকলা হলো বৃত্তচাপ এবং দুটি ☐ -এর দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল।
   (vii) বৃত্তের বাইরের কোনো বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ☐।
3. স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে একটি বৃত্ত এঁকে কেন্দ্র, জ্যা, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, উপচাপ, অধিচাপ নির্দেশ করি।
4. **সত্য না মিথ্যা লিখি:**
   (i) বৃত্ত একটি সামতলিক চিত্র।
   (ii) বৃত্তাংশ (Segment) একটি সামতলিক ক্ষেত্র।
   (iii) বৃত্তকলা (Sector) একটি সামতলিক ক্ষেত্র।
   (iv) জ্যা একটি সরলরেখাংশ।
   (v) চাপ একটি সরলরেখাংশ।
   (vi) একটি বৃত্তে সসীম সংখ্যক একই দৈর্ঘ্যের জ্যা আছে।
   (vii) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটিই বৃত্ত আঁকা সম্ভব।
   (viii) দুটি সর্বসম বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান।

বাড়ির চাবিগুলি আলাদা আলাদা চাবির রিং-এ ভরে একটি বড়ো গোলাকার শক্ত পিচবোর্ডে আটকে আমাদের পড়ার ঘরের এককোণে ওরা টাঙিয়ে দিল। কিন্তু অনেকগুলি ছোটো-বড়ো নানান দৈর্ঘ্যের অতিরিক্ত লম্বা শক্ত তামার তার এদিকে ওদিকে ছড়িয়ে ছিটিয়ে পড়ে আছে।

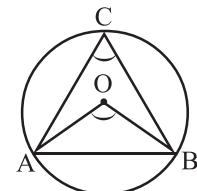
আমার ভাই তীর্থ একটি লম্বা শক্ত তামার তারের সঙ্গে অপর দুটি তামার তার আটকে ABC ত্রিভুজ তৈরি করল।

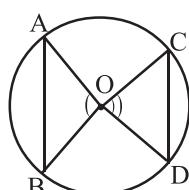
দেখছি, AB সরলরেখাংশ C বিন্দুতে ∠ACB উৎপন্ন করেছে। এই কোণটি AB-এর দ্বারা C বিন্দুতে উৎপন্ন সম্মুখ কোণ।

একইভাবে BC সরলরেখাংশ ____ বিন্দুতে ____ উৎপন্ন করেছে। ∠BAC, BC-এর দ্বারা ____ বিন্দুতে উৎপন্ন সম্মুখ কোণ এবং CA সরলরেখাংশ ____ বিন্দুতে ____ উৎপন্ন করেছে। ∠ABC, AC-এর দ্বারা B বিন্দুতে উৎপন্ন ____ কোণ।

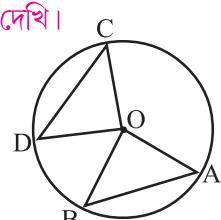
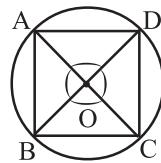
আমার বন্ধু পূজা এক মজার কাণ্ড করল। সে কতকগুলি কাঠি একটি বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে পাশের চিত্রের মতো আটকে দিল।

দেখছি, বৃত্তকার চাবির রিং-এ AB জ্যা বৃত্তের C বিন্দুতে সম্মুখ কোণ ∠ACB এবং AB জ্যা বৃত্তের D বিন্দুতে সম্মুখ কোণ ____ উৎপন্ন করেছে।

কিন্তু ∠ACB ____ ∠ADB [= / ≠ বসাই]

পাশের ছবির মতো একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি। ওই বৃত্তে ব্যাস ছাড়া যে-কোনো একটি জ্যা AB আঁকি। AB জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে ও বৃত্তের উপরের যে-কোনো বিন্দু C-তে যে দুটি সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করবে তাদের মধ্যে সম্পর্ক চাঁদার সাহায্যে মেপে লিখি। **[নিজে করি]**

আমি একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে একাধিক জ্যা এঁকে দেখি তারা কেন্দ্রে কীরূপ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে?

O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি জ্যা AB ও CD এঁকেছি। যেখানে AB > CD; জ্যা AB ও জ্যা CD কেন্দ্রে যথাক্রমে ∠AOB ও ____ দুটি সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে, চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি ∠AOB ____ ∠COD [> / < বসাই]

কিন্তু আমি যদি কোনো একটি বৃত্তে সমান সমান দৈর্ঘ্যের কতকগুলি জ্যা আঁকি, তারা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করবে কিনা তা এঁকে ও চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখি।

আমি O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি সমান সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD এঁকেছি যারা কেন্দ্রে যথাক্রমে ____ ও ____ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে।

চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি, ∠AOB ____ ∠COD [= / ≠ বসাই]

পাশের ছবিতে ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি কেন্দ্রে যে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে চাঁদা দিয়ে মেপে তাদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

হাতেকলমে

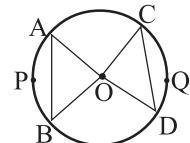
(i) আমি একটি যে-কোনো বৃত্ত আঁকলাম যার কেন্দ্র O

(ii) ওই বৃত্তে দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD আঁকলাম।

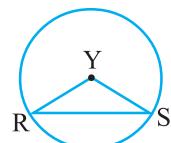
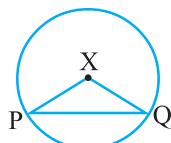
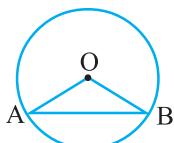
(iii) AB ও CD জ্যা দুটি যথাক্রমে $\overset{\frown}{APB}$ ও $\overset{\frown}{CQD}$ চাপ দুটি ছিন্ন করেছে এবং কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle AOB$ ও $\angle COD$ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে।

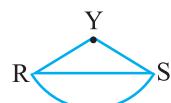
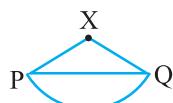
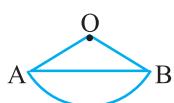
(iv) কাঁচি দিয়ে OAPB এবং OCQD বৃত্তকলা দুটি কেটে নিয়ে একটির উপর অপরটি বসিয়ে দেখছি বৃত্তকলা দুটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যাচ্ছে।

∴ পেলাম : $\overset{\frown}{APB}$ ও $\overset{\frown}{CQD}$ চাপ দুটি সমান।

এবং $\angle AOB = \angle COD$

∴ হাতেকলমে পেলাম, কোনো একটি বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা সমান দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

রাবেয়া তার খাতায় অনেকগুলি সর্বসম বৃত্ত এঁকেছে। অর্থাৎ বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ☐ (সমান / অসমান)

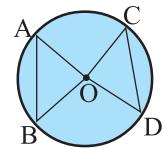
রাবেয়ার আঁকা সমান বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা এঁকে কী পাই দেখি?

O কেন্দ্রীয়, X কেন্দ্রীয় ও Y কেন্দ্রীয় সর্বসম বৃত্তগুলিতে যথাক্রমে AB, PQ ও RS সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন সম্মুখ কোণগুলি মেপে দেখছি, $\angle AOB$ ☐ $\angle PXQ$ ☐ $\angle RYS$ [= / ≠ বসাই]

আমি হাতেকলমে সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একাধিক বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যাগুলি আঁকি এবং জ্যাগুলি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করেছে, সেই কোণগুলি চাপসমেত কেটে নিয়ে একটি অপরগুলির উপর বসিয়ে মিলিয়ে দেখছি,

সমান সমান বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা সমান দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে

[হাতেকলমে নিজে করি]

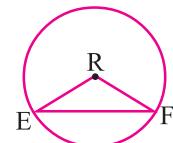
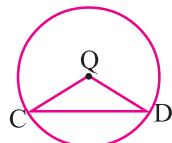
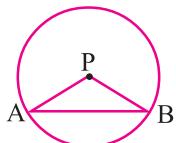
কিন্তু বিপরীতে অর্থাৎ যদি কোনো বৃত্তের একাধিক জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে জ্যাগুলির মধ্যে কী ধরনের সম্পর্ক হবে হাতেকলমে পরীক্ষা করে দেখি।

আমি একটি বৃত্ত এঁকেছি যার কেন্দ্র O; এই O কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিয়ে ভাঁজ করে কেন্দ্রে এমন দুটি কোণ ∠AOB ও ∠COD তৈরি করেছি যাতে ∠AOB = ∠COD হয়।

A ও B বিন্দুতে এবং C ও D বিন্দুতে সুতো আটকে বা কাঠি দিয়ে AB ও CD-র দূরত্ব মেপে দেখছি, AB ☐ CD [= / ≠ বসাই]

∴ হাতেকলমে দেখছি, বৃত্তের একাধিক জ্যা কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য সমান হয়।

আমি অন্য যে-কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে এমন একাধিক জ্যা আঁকি যারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে। এবার স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর ☐ ।**[নিজে মেপে লিখি]**

∴ পেলাম, কোনো বৃত্তে যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দৈর্ঘ্য সমান।

তীর্থ তার খাতায় অনেকগুলি সমান বৃত্ত এঁকেছে যাদের কেন্দ্র P, Q ও R; আমি তীর্থের আঁকা বৃত্তে কতকগুলি জ্যা AB, CD ও EF আঁকলাম যারা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে অর্থাৎ ∠APB = ∠CQD = ∠ERF

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি, AB ☐ CD ☐ EF [= / ≠ বসাই] **[নিজে এঁকে ও মেপে বসাই]**

∴ পেলাম, সমান বৃত্তের যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দৈর্ঘ্য সমান।

যেহেতু দৈর্ঘ্য সমান সুতরাং তাদের দ্বারা ছিন্ন চাপের দৈর্ঘ্যও ☐ (সমান / অসমান)।

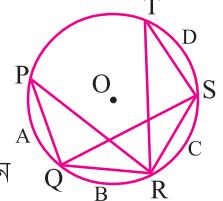
একই বৃত্তে দুটি চাপ দ্বারা কেন্দ্রে দুটি সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন হলে চাপ দুটির দৈর্ঘ্য সমান হবে অর্থাৎ জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান হবে। **[হাতেকলমে কাগজ কেটে যাচাই করি]**

প্রয়োগ : 1. একটি বৃত্তে PQ, QR, RS এবং ST জ্যা। যদি PQ = QR = RS = ST হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, PR = QS = RT

T, D, S, O, P, A, C, Q, B, R

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে PQ, QR, RS এবং ST জ্যা এবং PQ = QR = RS = ST

প্রমাণ করতে হবে: PR = QS = RT

প্রমাণ : PQ = QR সুতরাং, $\overparen{PAQ} = \overparen{QBR}$ .... (i) (যেহেতু, একই বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা সমান দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করে)

আবার, QR = RS সুতরাং , $\overparen{QBR} = \overparen{RCS}$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $\overparen{PAQ} + \overparen{QBR} = \overparen{QBR} + \overparen{RCS}$

সুতরাং $\overparen{PQR} = \overparen{QRS}$ ∴ PR = QS (যেহেতু একই বৃত্তের চাপ দুটি দৈর্ঘ্যে সমান সুতরাং জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান)

আবার, RS = ST সুতরাং , $\overparen{RCS} = \overparen{SDT}$ .... (iii)

(ii) ও (iii) যোগ করে পাই, $\overparen{QBR} + \overparen{RCS} = \overparen{RCS} + \overparen{SDT}$ সুতরাং, $\overparen{QRS} = \overparen{RST}$ ∴ QS = RT

∴ PR = QS = RT (প্রমাণিত)

আজ আমরা কিছু বন্ধু মিলে ঠিক করেছি এক মজার খেলা খেলব। আমাদের কিছু বন্ধু রীতা, মাসুদ, দীপ্তার্ক ও তাপস বোর্ডে কিছু বিন্দু আঁকবে। আমরা সেই বিন্দুগামী বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করব ও তাদের প্রকৃতি জানার চেষ্টা করব।

মাসুদ প্রথমে বোর্ডে একটি মাত্র নির্দিষ্ট বিন্দু P আঁকল।

9 নির্দিষ্ট P বিন্দুগামী বৃত্ত আঁকি ও কী পাই দেখি।

বোর্ডের যে-কোনো বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে OP দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা P বিন্দুগামী হবে।

দেখছি, নির্দিষ্ট P বিন্দুগামী ______ [1টি / 2টি / 3টি / অসংখ্য] বৃত্ত পাচ্ছি।

এবার রীতা বোর্ডে দুটি বিন্দু X ও Y আঁকল।

10 X ও Y বিন্দুগামী বৃত্ত আঁকি ও কী পাই দেখি।

X ও Y সংযোজক সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপরের প্রতিটি বিন্দু X ও Y থেকে সমদূরবর্তী। PQ সরলরেখার ওপর যে-কোনো বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে এবং OX বা OY দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা X ও Y বিন্দুগামী হবে। যেখানে O, PQ সরলরেখার উপর যে-কোনো বিন্দু।

∴ X ও Y বিন্দুগামী ______ বৃত্ত অঙ্কন করতে পারব। **[নিজে আঁকি ও লিখি]**

11 দীপ্তার্ক এবার বোর্ডে তিনটি অসমরেখ বিন্দু X, Y ও Z আঁকল।

আমি এই তিনটি অসমরেখ বিন্দু X, Y ও Z দিয়ে বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি।

প্রথমে X, Y এবং Y, Z বিন্দুগুলি যোগ করে XY ও YZ সরলরেখাংশ পেলাম।

X, Y ও Z বিন্দুগামী বৃত্ত অঙ্কনের জন্য প্রথমে কেন্দ্র নির্ণয় করি অর্থাৎ এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করি যা X, Y ও Z বিন্দুগুলি থেকে সমদূরবর্তী।

12 কিন্তু কীভাবে X, Y ও Z বিন্দুগুলি থেকে সমদূরবর্তী বিন্দু পাব?

XY সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ আঁকলাম। এই PQ সরলরেখার ওপর প্রতিটি বিন্দু X ও Y বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

আবার ZY সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS আঁকলাম। এই RS সরলরেখার ওপর প্রতিটি বিন্দু Y ও Z বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

∴ XY ও YZ সরলরেখাংশদুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ ও RS এবং যেহেতু X, Y ও Z অসমরেখ বিন্দু, সুতরাং PQ ও RS সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

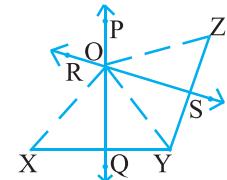
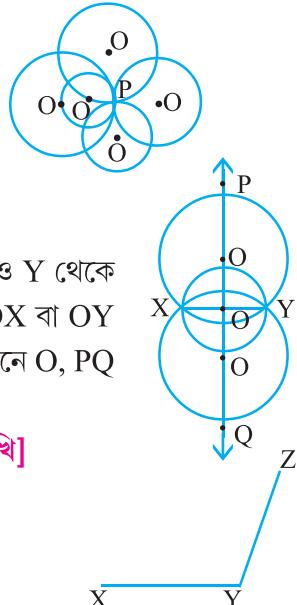
∴ O বিন্দুটি X, Y ও Z বিন্দুগুলি থেকে ______।

∴ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OX বা OY বা OZ দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলে তা X, Y ও Z বিন্দুগামী হবে।

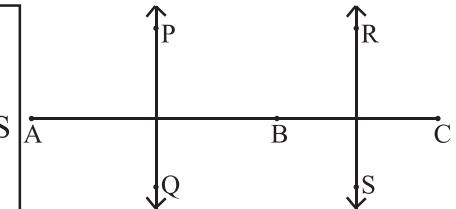
13 X, Y ও Z তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে কি একটিই মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব?

যেহেতু X, Y, Z অসমরেখ বিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট, সুতরাং, XY ও YZ সরলরেখাংশ দুটি নির্দিষ্ট এবং PQ ও RS লম্বসমদ্বিখণ্ডক দুটি নির্দিষ্ট। সুতরাং PQ ও RS-এর ছেদবিন্দু O অর্থাৎ কেন্দ্র নির্দিষ্ট এবং OX ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট। নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

∴ পেলাম X, Y ও Z তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন সম্ভব।

আমি অন্য যে-কোনো তিনটি অসমরেখ বিন্দু নিয়ে একইভাবে বৃত্ত এঁকে দেখছি তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটিই বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। **[নিজে আঁকি]**

এবার তাপস বোর্ডে তিনটি সমরেখ বিন্দু A, B ও C আঁকল।

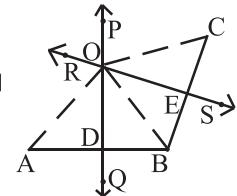
14 A, B ও C তিনটি সমরেখ বিন্দুগামী কোনো বৃত্ত আঁকতে পারব কিনা নিজে এঁকে দেখি।

তিনটি সমরেখ বিন্দু A, B ও C নিলাম। AB-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ এবং BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS
যেহেতু AB ও BC একই সরলরেখাংশের অংশ, তাই PQ || RS
∴ PQ ও RS -এর কোনও ছেদবিন্দু পাওয়া যাবে না।
∴ তিনটি সমরেখ বিন্দু দিয়ে কোনো বৃত্ত আঁকা সম্ভব নয়।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য - 31. তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। *(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)*

প্রদত্ত : A, B, C তিনটি অসমরেখ বিন্দু।

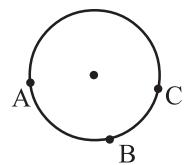
প্রমাণ করতে হবে : A, B, C তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

অঙ্কন : A, B বিন্দুদ্বয় ও B, C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি। AB ও BC সরলরেখাংশ দুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করি এবং তারা যথাক্রমে PQ ও RS সরলরেখা।

যেহেতু AB ও BC সরলরেখাংশ দুটি সমান্তরাল নয়, সুতরাং তাদের লম্বসমদ্বিখণ্ডক দুটি PQ ও RS সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এবং RS সরলরেখা AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। O, A বিন্দুদ্বয়; O, B বিন্দুদ্বয় এবং O, C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি।

প্রমাণ : Δ OAD এবং Δ OBD-এর মধ্যে
AD = BD (∵ OD, AB সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক)
$\angle$ODA = $\angle$ODB (∵ প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ)
OD সাধারণ বাহু ∴ Δ OAD ≅ Δ OBD (S – A – S সর্বসমতা অনুসারে)
সুতরাং OA = OB (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ)
অনুরূপে, Δ OBE ≅ Δ OCE
∴ OB = OC
সুতরাং OA = OB = OC
∴ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি A, B, C বিন্দুগামী হবে।

সুতরাং তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।
A, B, C বিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট। অতএব, AB ও BC সরলরেখাংশ দুটি নির্দিষ্ট।
সুতরাং AB ও BC সরলরেখাংশ দুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ ও RS সরলরেখা নির্দিষ্ট।
যেহেতু PQ ও RS সরলরেখা নির্দিষ্ট, সুতরাং তাদের ছেদবিন্দু O নির্দিষ্ট।
আবার যেহেতু O এবং A বিন্দুদ্বয় নির্দিষ্ট, সুতরাং OA সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট।
অতএব নির্দিষ্ট বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে এবং নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।
∴ তিনটি অসমরেখ বিন্দু A, B, C দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

15 আমার বোন তার হাতের বৃত্তাকার বালার সাহায্যে একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে। আমি এই বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করি।

বৃত্তের উপর যে-কোনো 3টি বিন্দু A, B ও C নিলাম। এবার AB ও BC সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু নির্ণয় করে বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করি। [নিজে করি]

16 যদি কোনো বৃত্তের একটি বৃত্তচাপ আঁকা থাকে তবে কীভাবে বৃত্তটি অঙ্কন করতে পারব দেখি।

$\overset{\frown}{PQ}$ বৃত্তচাপের উপর একটি বিন্দু R নিলাম। এবার আগের মতো P, R ও Q বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করে বৃত্তটি অঙ্কন করি। **[নিজে করি]**

দেখছি, তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটিই বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। কিন্তু তিন-এর বেশি বিন্দু দিয়ে কি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব?

তিনের বেশি বিন্দু দিয়ে যাচ্ছে এমন বৃত্ত আঁকা সম্ভব নাও হতে পারে। যদি সম্ভব হয় তবে বিন্দুগুলিকে **সমবৃত্তস্থ** (Concyclic) বলা হয়।

17 কোনো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হলে ওই চতুর্ভুজকে কী বলা হয়?

যে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি কোনো একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত সেই চতুর্ভুজকে **বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ** (Cyclic Quadrilateral) বলা হয়।

18 সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম কী ?

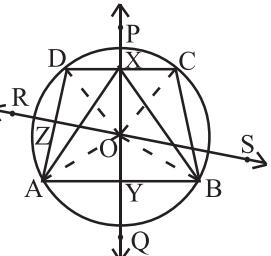
যে চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল এবং অপরজোড়া বাহু অসমান্তরাল ও সমান অর্থাৎ তির্যক বাহুদুটি সমান, তাকে সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম (Isosceles Trapezium) বলে।

সামান্তরিক একটি ট্রাপিজিয়াম। কিন্তু এটি কি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম। **(নিজে লিখি)**

প্রয়োগ - 2. আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

প্রদত্ত : ABCD একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম। $AB \parallel DC$ এবং $AD = BC$

প্রমাণ করতে হবে : ABCD ট্রাপিজিয়ামের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন : DC বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ এবং AD বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS অঙ্কন করলাম যারা যথাক্রমে DC কে X এবং AD কে Z বিন্দুতে ছেদ করল। PQ, AB কে Y বিন্দুতে ছেদ করল। A, X এবং B, X যুক্ত করলাম। PQ, RS কে O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দুর সঙ্গে A, B, C ও D যোগ করলাম।

প্রমাণ : ΔADX এবং ΔBCX -এ $DX = CX$ [$\because$ CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ]

$\angle ADX = \angle BCX$ [$\because$ সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদুটির যে-কোনো একটি বাহু সংলগ্ন কোণগুলি সমান]

$AD = BC$ [প্রদত্ত]

$\therefore \Delta ADX \cong \Delta BCX$ [S-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore AX = BX$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

সমকোণী ΔAXY এবং সমকোণী ΔBXY-এ $\angle AYX = \angle BYX$ [$\because AB \parallel CD$ এবং $CD \perp PQ$, $\therefore AB \perp PQ$]

অতিভুজ AX = অতিভুজ BX [আগে **প্রমাণ করা হয়েছে**] এবং XY উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta AXY \cong \Delta BXY$ [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore AY = BY$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

$\therefore$ PQ, AB-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক হবে।

$\because$ DC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ-এর উপর O বিন্দু অবস্থিত,

$\therefore DO = CO$; একইভাবে, $DO = AO$ এবং $AO = BO$

$\therefore CO = DO = AO = BO$

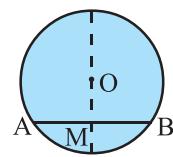
$\therefore$ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OC বা OD বা OA বা OB-এর সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি A, B, C ও D বিন্দু দিয়ে যাবে। অর্থাৎ সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ। **(প্রমাণিত)**

আমরা অনেকগুলি বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিয়েছি। আমার ভাই রানা কয়েকটি বৃত্তে ব্যাস নয় এরকম জ্যা এঁকেছে।

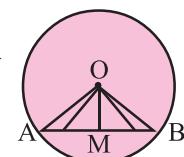
হাতেকলমে

(i) আমি একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ক্ষেত্র নিলাম যার ব্যাস নয় এরূপ জ্যা AB।

(ii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে ভাঁজটি O বিন্দু দিয়ে যায় এবং AB সরলরেখাংশটির একটি অংশ অপর অংশের উপর থাকে। ভাঁজটি AB সরলরেখাংশকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুটি M; OM যুক্ত করলাম।

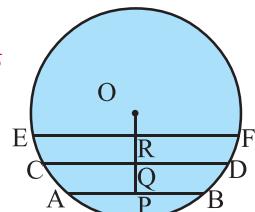
(iii) মেপে দেখলাম $\angle OMA = \angle OMB = 1$ সমকোণ এবং $AM = BM$।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

আমি অন্য যে-কোনো একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিয়ে হাতেকলমে কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ জ্যা-এর উপর লম্ব টেনে দেখছি লম্বটি জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। **[নিজে করি]**

আমরা একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র নিলাম যার কেন্দ্র O এবং জ্যা AB; AB জ্যা-এর উপর অবস্থিত একাধিক বিন্দুর সঙ্গে কেন্দ্র O যোগ করলাম এবং একাধিক নানান দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশ পেলাম।

19 কিন্তু এই একাধিক দূরত্বের মধ্যে কোনটিকে 'কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB-এর দূরত্ব' বলব?

এদের মধ্যে যে সরলরেখাংশটি কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB-এর উপর লম্ব তার দৈর্ঘ্যকে কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB-এর দূরত্ব বা **লম্ব দূরত্ব** (Perpendicular Distance) বলা হয়।

20 আমি একাধিক জ্যা আঁকা অন্য একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র নিয়ে বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যাগুলির লম্ব দূরত্ব মাপি ও কী পাই দেখি।

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB, CD ও EF-এর উপর লম্বদূরত্ব যথাক্রমে OP, OQ ও ______ পেয়েছি। [পাশের ছবি দেখে লিখি]

দেখছি, বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পেলে কেন্দ্র থেকে লম্বদূরত্ব ______ [বৃদ্ধি / হ্রাস] পাবে।

আরও দেখছি, বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা অর্থাৎ ______ বৃত্তের কেন্দ্রগামী,

$\therefore$ সেক্ষেত্রে কেন্দ্র থেকে লম্বদূরত্ব শূন্য। সুতরাং, পেলাম, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাসের লম্বদূরত্ব ______।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 32. ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করা হলে, ওই লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা এবং OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে : OD, AB জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে অর্থাৎ $AD = DB$

অঙ্কন : O, A এবং O, B যুক্ত করি।

প্রমাণ : OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

সুতরাং, ΔODA ও ΔODB সমকোণী।

$\therefore$ সমকোণী ΔODA ও ΔODB তে $\angle ODA = \angle ODB$ (প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ)

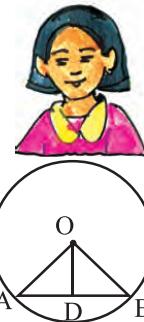
অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ],এবং OD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ODA \cong \Delta ODB$ [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore AD = DB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ] [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 3. আমি A কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা PQ আঁকি। A থেকে PQ-এর উপর AM লম্ব আঁকি। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে PM = MQ **[নিজে এঁকে প্রমাণ করি]**

আমরা প্রমাণ করেছি যে ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করলে সেই লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(21) কিন্তু এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য কি সম্ভব? অর্থাৎ কোনো বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাংশ কি ওই জ্যা-এর উপর লম্ব হবে?

হাতেকলমে

(i) প্রথমে O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম। ওই বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা AB আঁকলাম।

(ii) হাতেকলমে কাগজ ভাঁজ করে AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু নির্ণয়ের জন্য বৃত্তক্ষেত্রাকার কাগজটির AB জ্যা-কে এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে A বিন্দু B বিন্দুর সঙ্গে মিশে যায়। ভাঁজ খুলে দিলাম এবং ভাঁজটি AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করল এবং ভাঁজটি O বিন্দুগামী হল। অর্থাৎ কেন্দ্র O এবং AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু D-এর সংযুক্ত সরলরেখাংশ AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

$\therefore$ OD $\perp$ AB

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ওই সরলরেখা ওই জ্যা-এর উপর লম্ব হবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 33. প্রমাণ করি যে ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ওই সরলরেখা ওই জ্যা-এর উপর লম্ব হবে।

প্রদত্ত : ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা AB এবং D, AB-এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ AD=DB

প্রমাণ করতে হবে : OD $\perp$ AB অর্থাৎ OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

অঙ্কন : O, A এবং O, B যুক্ত করি।

প্রমাণ : ΔOAD ও ΔOBD তে

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

AD = DB [প্রদত্ত] [D, AB-এর মধ্যবিন্দু]

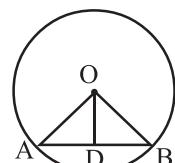
এবং OD সাধারণ বাহু

$\therefore$ ΔOAD $\cong$ ΔODB [সর্বসমতার বাহু-বাহু-বাহু (S-S-S) শর্তানুসারে]

$\therefore$ $\angle$ODA = $\angle$ODB [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

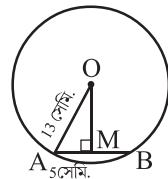
যেহেতু, OD, AB জ্যা-এর উপর দণ্ডায়মান হয়ে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে,

সুতরাং, $\angle$ODA = $\angle$ODB = 1 সমকোণ

$\therefore$ OD $\perp$ AB [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 4. আমি সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু শর্তানুসারে ΔOAD ও ΔOBD সর্বসম প্রমাণ করে উপপাদ্য-33 প্রমাণ করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 5. নিয়ামত একটি বৃত্ত এঁকেছে যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 13 সেমি.। আমি এই বৃত্তে একটি 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের জ্যা AB এঁকেছি। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে এই AB জ্যা-এর দূরত্ব হিসাব করে লিখি।

ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র O; AB জ্যা-এর উপর O থেকে লম্ব OM অঙ্কন করলাম যা AB-কে M বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore AM = \frac{1}{2} AB =$ ☐ সেমি. [$\because$ ব্যাস নয় এরকম কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করলে তা ওই জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

সমকোণী ত্রিভুজ AMO-তে

$OA^2 = AM^2 + OM^2$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে)

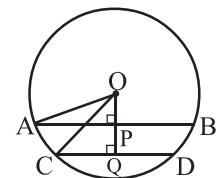
$OM^2 = OA^2 - AM^2 = (13^2 - 5^2)$ বর্গ সেমি. ☐ বর্গ সেমি.

$\therefore OM = 12$ সেমি.

$\therefore$ পেলাম, 13 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 10 সেমি. জ্যা-এর লম্ব দূরত্ব 12 সেমি.

প্রয়োগ : 6. 17 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা-এর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব 8 সেমি., তার দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 7. 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 16 সেমি. এবং 12 সেমি.। হিসাব করে দেখি, ওই দুটি জ্যা-এর মধ্যে দূরত্ব কত যদি তারা কেন্দ্রের (i) একই পার্শ্বে থাকে, (ii) বিপরীত পার্শ্বে থাকে।

(i) ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং AB ও CD জ্যা দুটি কেন্দ্রের একই পার্শ্বে অবস্থিত। AB ও CD-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 16 সেমি. ও 12 সেমি.। $AB \parallel CD$

O বিন্দু থেকে CD জ্যা-এর উপর OQ লম্ব অঙ্কন করলাম যা AB জ্যা-কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু $AB \parallel CD$ এবং $OQ \perp CD$, সুতরাং $OP \perp AB$.

$\angle OPB =$ অনুরূপ $\angle OQD \quad \because \angle OQD = 90^\circ, \ \therefore \angle OPB = 90^\circ$

$\therefore AP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 16$ সেমি. $= 8$ সেমি.

আবার $OA = 10$ সেমি.

$\therefore$ সমকোণী ΔAPO-তে,

$OP^2 = OA^2 - AP^2 = (10^2 - 8^2)$ বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি.

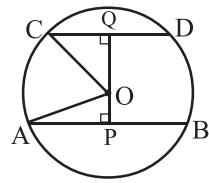
$\therefore OP = 6$ সেমি.

$\because OQ \perp CD \ \therefore CQ =$ ☐ **[নিজে লিখি]**

$\therefore$ সমকোণী ΔOCQ থেকে পেলাম, $OQ =$ ☐ [একইভাবে নিজে হিসাব করে লিখি]

$\therefore$ জ্যা AB ও CD-এর মধ্যে দূরত্ব $PQ = OQ - OP$

$= (8 - 6)$ সেমি. $= 2$ সেমি.

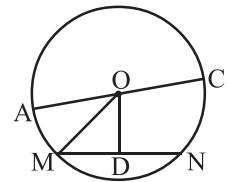
(ii) কিন্তু AB ও CD জ্যা দুটি যদি বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে থাকত,
সেক্ষেত্রে AB ও CD জ্যা দুটির দূরত্ব $= PQ$
$= OP + OQ = (6 + 8)$ সেমি.
$= 14$ সেমি.

প্রয়োগ : 8. 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে 8 সেমি. ও 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের দুটি সমান্তরাল জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। জ্যা দুটির মধ্যের দূরত্ব হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 9. প্রমাণ করি, ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে MN ব্যাস নয় এমন যে-কোনো একটি জ্যা এবং AC একটি ব্যাস।

প্রমাণ করতে হবে: $AC > MN$ অর্থাৎ ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

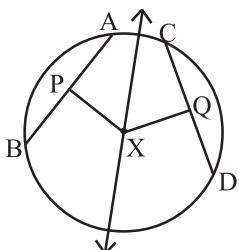
অঙ্কন : কেন্দ্র O থেকে জ্যা MN-এর উপর OD লম্ব অঙ্কন করি। O, M যুক্ত করি।

প্রমাণ : $OM > MD$ [$\because$ OMD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং OM অতিভুজ]
বা, $OA > MD$ [$\because OA = OM$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
বা, $\frac{1}{2}AC > \frac{1}{2}MN$
বা, $AC > MN$
$\therefore$ ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা। **(প্রমাণিত)**

ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর। এই উপপাদ্যের সাহায্যে প্রয়োগ - 9 প্রমাণ করার চেষ্টা করি।

আমার বন্ধু মেরি X কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তে দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD এঁকেছে।

আমি X কেন্দ্র থেকে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD-এর উপর দুটি লম্ব XP ও XQ অঙ্কন করলাম।

আমি হাতেকলমে কাগজ ভাঁজ করে XP ও XQ-এর মধ্যে সম্পর্ক খুঁজি।

হাতেকলমে

(i) একটি ট্রেসিং-পেপারে উপরের মতো X কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে দুটি সমান জ্যা AB ও CD এঁকে কেন্দ্র X থেকে দুটি লম্ব XP ও XQ টানলাম।

(ii) এবার ট্রেসিং-পেপারের বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিয়ে দু-ভাঁজ করলাম যাতে A বিন্দু C বিন্দুর সঙ্গে এবং B বিন্দু D বিন্দুর সঙ্গে মিশে যায়।
দেখছি, P বিন্দুর সঙ্গে Q বিন্দু মিশে গেছে এবং ভাঁজ খুলে দেখছি ভাঁজটি X বিন্দু দিয়ে গেছে।

$\therefore$ পেলাম $XP = XQ$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা দুটি কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

প্রয়োগ : 10. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, কোনো বৃত্তের দুটি সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। কেন্দ্র O থেকে AB ও CD-এর দূরত্ব যথাক্রমে OE ও OF অর্থাৎ $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$

প্রমাণ করতে হবে: $OE = OF$

অঙ্কন : O, A ও O, C যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$ [প্রদত্ত]

$\therefore AE = \frac{1}{2} AB$ এবং $CF = \frac{1}{2} CD$ [যেহেতু, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

আবার, $AB = CD$ [প্রদত্ত]

$\therefore AE = CF$ ..... (i)

$\therefore$ সমকোণী ΔAEO ও সমকোণী ΔOFC -তে $\angle OEA = \angle OFC$ (প্রত্যেকটি সমকোণ)

অতিভুজ OA = অতিভুজ OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$AE = CF$ [(i) থেকে পাই]

$\Delta AEO \cong \Delta CFO$ [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore OE = OF$ **[প্রমাণিত]**

হাতেকলমে যাচাই করলাম ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করলাম যে, বৃত্তের দুটি সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

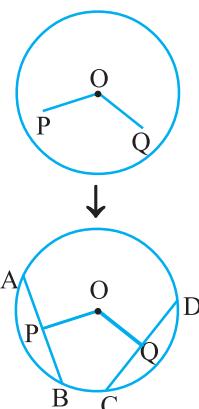
কিন্তু এর বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা কেন্দ্র থেকে সমান দূরত্বে থাকলে জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য কি সমান হবে? হাতেকলমে যাচাই করি ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

হাতেকলমে

(i) একটি ট্রেসিং পেপারে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি সমান রেখাংশ OP এবং OQ আঁকলাম। এবার দুটি জ্যা AB ও CD আঁকলাম যাতে $AB \perp OP$ এবং $CD \perp OQ$ হয়।

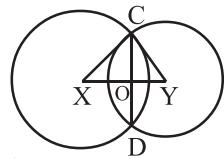
(ii) এবার বৃত্তাকার ক্ষেত্রবিশিষ্ট কাগজটি কেটে নিয়ে O বিন্দু বরাবর দু-ভাঁজ করলাম যাতে P বিন্দু Q বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়।
কিন্তু দেখছি AB জ্যা , CD জ্যা-এর উপর সমাপতিত হয়েছে।

$\therefore$ পেলাম $AB = CD$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের দুটি জ্যা-এর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব সমান হলে জ্যা দুটির দৈর্ঘ্যও সমান হবে।
(যুক্তি দিয়ে নিজে প্রমাণ করি)

প্রয়োগ : 11. প্রমাণ করি যে বৃত্তের কোনো জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক ওই বৃত্তের কেন্দ্রগামী। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 12. প্রমাণ করি, একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুই-এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 13. যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে, তাদের কেন্দ্রদুটি তাদের সাধারণ জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর আছে।

প্রদত্ত : X ও Y কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদুটি পরস্পরকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং CD উহাদের সাধারণ জ্যা।

প্রমাণ করতে হবে: X ও Y বিন্দু দুটি সাধারণ জ্যা CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর আছে।

অঙ্কন : X বিন্দু থেকে CD-এর উপর XO লম্ব অঙ্কন করলাম। O এবং Y বিন্দু দুটি যোগ করলাম।

প্রমাণ : X কেন্দ্রীয় বৃত্তের CD জ্যা এবং $XO \perp CD$

$\therefore$ O, CD-এর মধ্যবিন্দু।

আবার, Y কেন্দ্রীয় বৃত্তের CD জ্যা এবং O, CD-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore OY \perp CD$

যেহেতু কোনো সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটিমাত্র লম্ব অঙ্কন সম্ভব,

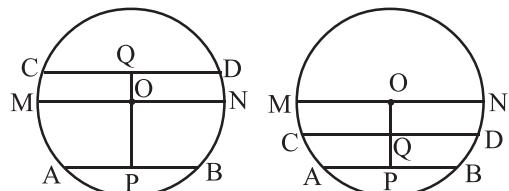
সুতরাং, XO ও OY একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সুতরাং, XY সাধারণ জ্যা CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয় X ও Y তাদের সাধারণ জ্যা CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর আছে।

[প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 14. আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, কোনো বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রবিন্দুগামী।

প্রদত্ত : ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি জ্যা AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল এবং AB ও CD-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q

প্রমাণ করতে হবে: PQ, O বিন্দুগামী

অঙ্কন : O, P এবং O, Q যুক্ত করলাম এবং O বিন্দু দিয়ে AB ও CD-এর সমান্তরাল সরলরেখাংশ MN অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : P, AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু। $\therefore OP \perp AB$

আবার $AB \parallel MN$, $\therefore OP \perp MN$

অনুরূপে, $OQ \perp CD$ [$\because$ Q, CD-এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore OQ \perp MN$ [$\because MN \parallel CD$]

$\therefore$ OP ও OQ উভয়েই O বিন্দুতে MN-এর উপর লম্ব।

যেহেতু একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটিমাত্র লম্ব অঙ্কন করা যায়,

সুতরাং, P, O ও Q সমরেখ।

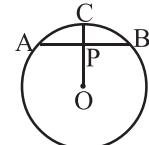
$\therefore$ PQ, বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুগামী। [প্রমাণিত]

কষে দেখি 3.2

1. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং AB একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 8 সেমি.। O বিন্দু থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব হিসাব করে লিখি।
2. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 26 সেমি.। O বিন্দু থেকে PQ জ্যা-এর দূরত্ব 5 সেমি.। PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
3. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 4 সেমি. এবং O বিন্দু থেকে PQ-এর দূরত্ব 2.1 সেমি.। বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. O কেন্দ্রীয় বৃত্তে 6 সেমি. ও 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের দুটি জ্যা। যদি ছোটো দৈর্ঘ্যের জ্যাটির বৃত্তের কেন্দ্র থেকে দূরত্ব 4 সেমি. হয়, তাহলে অপর জ্যাটির কেন্দ্র থেকে দূরত্ব কত তা হিসাব করে লিখি।
5. যদি কোনো বৃত্তের একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 48 সেমি. এবং কেন্দ্র থেকে ওই জ্যা-এর দূরত্ব 7 সেমি. হয়, তবে ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে যে জ্যা-এর দূরত্ব 20 সেমি., সেই জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত হবে তা হিসাব করে লিখি।
6. পাশের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবিতে $OP \perp AB$; $AB = 6$ সেমি. এবং $PC = 2$ সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

7. একটি সরলরেখা দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের একটিকে A ও B বিন্দুতে এবং অপরটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $AC = DB$
8. প্রমাণ করি, কোনো বৃত্তের দুটি পরস্পরছেদি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে পারে না, যদি না উভয়েই বৃত্তের ব্যাস হয়।
9. X ও Y কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। XY-এর মধ্যবিন্দু S-এর সঙ্গে A বিন্দু যুক্ত করলাম এবং A বিন্দু দিয়ে SA-এর উপর লম্ব অঙ্কন করলাম যা বৃত্ত দুটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে $PA = AQ$.
10. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের 10 সেমি. ও 24 সেমি. দৈর্ঘ্যের দুটি সমান্তরাল জ্যা AB এবং CD কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। যদি AB ও CD-জ্যা দুটির মধ্যে দূরত্ব 17 সেমি. হয়, তবে হিসাব করে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য লিখি।

> উত্তর সংকেত : ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি. এবং বৃত্তের কেন্দ্র থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব x সেমি.। $\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে CD জ্যা-এর দূরত্ব $(17 - x)$ সেমি.। $\therefore r^2 = x^2 + 5^2$ এবং $r^2 = (17-x)^2 + (12)^2$, সুতরাং, $x^2 + 5^2 = (17 - x)^2 + 12^2 \; \therefore x = 12$

11. দুটি বৃত্তের কেন্দ্র P এবং Q; বৃত্ত দুটি A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু দিয়ে PQ সরলরেখাংশের সমান্তরাল সরলরেখা বৃত্ত দুটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $CD = 2PQ$
12. একটি বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুটি সমান। প্রমাণ করি যে, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।
13. একটি বৃত্তের দুটি পরস্পরচ্ছেদী জ্যা-এর অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক যদি কেন্দ্রগামী হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, জ্যা দুটি সমান।
14. প্রমাণ করি, একটি বৃত্তে দুটি জ্যা-এর মধ্যে যে জ্যাটি কেন্দ্রের নিকটবর্তী সেটির দৈর্ঘ্য অপর জ্যা-টির দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।
15. একটি বৃত্তের ভিতর যে-কোনো বিন্দু দিয়ে ক্ষুদ্রতম জ্যা কোনটি হবে তা প্রমাণ করে লিখি।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান। $\angle AOB = 60^{\circ}$ হলে, $\angle COD$-এর মান
(a) 40° (b) 30° (c) 60° (d) 90°

(ii) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 13 সেমি. এবং বৃত্তের একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 10 সেমি.। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যা-এর দূরত্ব (a) 12.5 সেমি. (b) 12 সেমি. (c) $\sqrt{69}$ সেমি. (d) 24 সেমি.

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। O বিন্দু থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব 4 সেমি. হলে, CD জ্যা-এর দূরত্ব (a) 2 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 6 সেমি. (d) 8 সেমি.

(iv) AB ও CD দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 16 সেমি.। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হলে, জ্যা দুটির মধ্যে দূরত্ব (a) 12 সেমি. (b) 16 সেমি. (c) 20 সেমি. (d) 5 সেমি.

(v) দুটি সমকেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্র O; একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। AC = 5 সেমি. হলে BD-এর দৈর্ঘ্য (a) 2.5 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 10 সেমি. (d) কোনটিই নয়।

(B) সত্য / মিথ্যা লিখি :

(i) তিনটি সমরেখ বিন্দু দিয়ে যায় এরকম একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

(ii) ABCDA ও ABCEA বৃত্ত দুটি একই বৃত্ত।

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB এবং AC জ্যা দুটি OA ব্যাসার্ধের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হলে, $\angle OAB = \angle OAC$

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে PQ ও RS জ্যা দুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 1:1 হলে, $\angle POQ : \angle ROS$ = ______

(ii) বৃত্তের কোনো জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক ওই বৃত্তের ______।

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের দুটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করে এবং তাদের সাধারণ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 12 সেমি.। বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করি।

(ii) 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তে AB এবং AC দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। বৃত্তের কেন্দ্র ABC ত্রিভুজের বাইরে অবস্থিত। AB = AC = 6 সেমি. হলে, BC জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান। $\angle AOB = 60^{\circ}$ এবং CD = 6 সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা নির্ণয় করি।

(iv) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ভিতর P যে-কোনো একটি বিন্দু। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং OP = 3 সেমি. হলে, P বিন্দুগামী যে জ্যাটির দৈর্ঘ্য ন্যূনতম তা নির্ণয় করি।

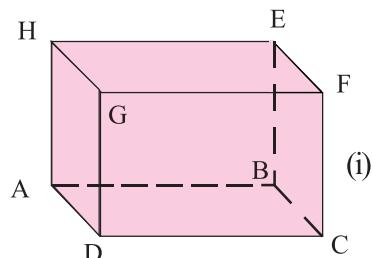
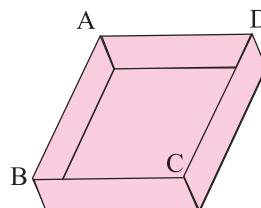
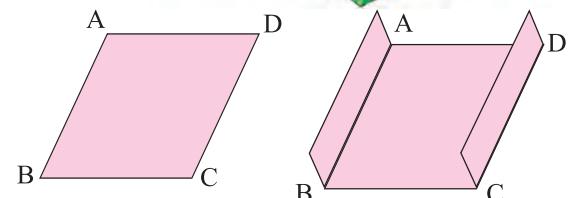
(v) P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু দিয়ে PQ-এর সমান্তরাল সরলরেখা বৃত্তদুটিকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। PQ = 5 সেমি. হলে, CD-এর দৈর্ঘ্য কত তা নির্ণয় করি।

4 আয়তঘন
RECTANGULAR PARALLELOPIPED OR CUBOID

বাড়ির 'First Aid' বাক্সটি নষ্ট হয়ে গেছে। একটি নতুন 'First Aid' বাক্স তৈরি করতে হবে। তাই আজ ছুটির দিনের দুপুরে বাড়ির ছাদে আমরা ভাই বোনেরা সকলে মিলে জড়ো হয়েছি। প্রথমে একটি বাক্স তৈরির চেষ্টা করি।

আমরা প্রথমে একটি পিচবোর্ডের আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো ABCD কেটে নিলাম। সাথি অন্য দুটি একই মাপের অর্থাৎ AB দৈর্ঘ্য এবং যে-কোন প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো কেটে পাশের ছবির মতো আটকে দিল।

শাকিলও সাথির মতো AD দৈর্ঘ্য ও আগের মাপের প্রস্থ বিশিষ্ট অন্য দুটি আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো কেটে পাশের চিত্রের মতো আটকে দিল।

আমি ABCD আয়তক্ষেত্রাকার টুকরোর সমান মাপের অর্থাৎ সমান দৈর্ঘ্য ও প্রস্থবিশিষ্ট আর একটি আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো HEFG কেটে ও ABCD তলের বিপরীতে আটকে পাশের ছবির মতো বাক্স তৈরি করলাম।

1 এইরকম ঘনবস্তু যার তলগুলি আয়তক্ষেত্রাকার এবং বিপরীত তলগুলি সমান মাপের এবং সন্নিহিত তলগুলি পরস্পর লম্ব তাকে কী বলা হয়?

এইরকম ঘনবস্তু যার প্রতিটি তল আয়তক্ষেত্রাকার এবং বিপরীত তলগুলির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান এবং সন্নিহিত তলগুলি পরস্পরের উপর লম্ব তাকে **সমকোণী চৌপল** বা **আয়তঘন** (Rectangular parallelopiped or Cuboid) বলা হয়।

দেখছি, সমকোণী চৌপলটি ABCD আয়তক্ষেত্রাকার তলের উপর দাঁড়িয়ে আছে।

2 এই অবস্থানে ABCD তলটিকে কী বলা হয়?

এই অবস্থানে ABCD তলটি সমকোণী চৌপলের **ভূমি (base)** এবং আয়তক্ষেত্রাকার ভূমির বাহু দুটির একটি **দৈর্ঘ্য (length)** ও অপরটি **প্রস্থ (breadth)**। বুঝেছি, (i) নং সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য = AB এবং প্রস্থ = BC

3 কিন্তু (i) নং সমকোণী চৌপলের BE-কে কী বলা হয়?

BE (i) নং সমকোণী চৌপলের **উচ্চতা (height)**।

দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা হলো সমকোণী চৌপলের মাত্রা (dimension)।

সমকোণী চৌপলের ☐ [1টি / 2টি / 3টি] মাত্রা।

আবার দেখছি, সমকোণী চৌপলের তল ☐ [4টি / 5টি / 6টি]।

$\therefore$ সমকোণী চৌপলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Whole surface area)

= 6 টি তলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$= 2\,(AB\times BC + AB\times BE + BC\times BE)$

= 2 (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ + দৈর্ঘ্য × উচ্চতা + প্রস্থ × উচ্চতা)

4 সমকোণী চৌপলের দুটি তল পরস্পরকে সরলরেখাংশে ছেদ করেছে। এই ছেদ সরলরেখাংশকে কী বলা হয়?

আয়তঘনের দুটি তলের ছেদ সরলরেখাংশকে **ধার বা প্রান্তিকী (edge)** বলা হয়।

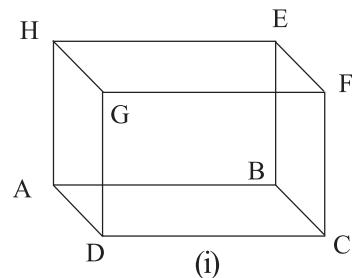
দেখছি, আয়তঘনের 12টি **ধার**।

(i) নং আয়তঘনের ধারগুলি ছবি দেখে নিজে লিখি। [নিজে লিখি]

5 আয়তঘনের ধারগুলি যে বিন্দুতে মিলিত হয়েছে তাকে কী বলা হয়?

আয়তঘনের ধারগুলি যে বিন্দুতে মিলিত হয়েছে তাকে **শীর্ষবিন্দু (Vertex)** বলা হয়।

দেখছি, আয়তঘনের ☐ [6টি / 7টি / 8টি] শীর্ষবিন্দু।

(i) নং আয়তঘনের শীর্ষবিন্দুগুলি নিজে বুঝে লিখি। [নিজে লিখি]

আমার ভাই এক মজার কাণ্ড করল। সে তার খেলনা রাখার আয়তঘনাকার বাক্সটি নিয়ে এল এবং বাক্সটির তলগুলি (Surfaces) খুলে পেল—

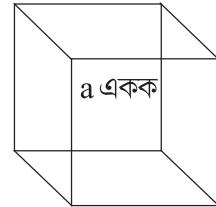
প্রয়োগ : 1. দেখছি, ভাই-এর আনা আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 40 সেমি., প্রস্থ 25 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি.।

$\therefore$ এই আয়তঘনাকার বাক্সের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= 2\,(40\times25 + 40\times15 + 25\times15)$ বর্গ সেমি.

= ☐ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 2. যে আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 15 সেমি., প্রস্থ 12 সেমি. এবং উচ্চতা 20 সেমি. তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

আমার বন্ধু রাজিয়া তার বাড়ি থেকে একটি পিচবোর্ডের বাক্স এনেছে।
দেখছি, রাজিয়ার আনা বাক্সটির প্রতিটি তল বর্গক্ষেত্রাকার অর্থাৎ বাক্সটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান।

6 এই ধরনের আয়তঘনকে কী বলা হয়?

যে আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান তাকে **ঘনক (Cube)** বলা হয়।

ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \{a\times a + a\times a + a\times a\}$ বর্গ একক। [যেখানে ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$ একক]
$= 2\times3a^2$ বর্গ একক
$= 6a^2$ বর্গ একক

প্রয়োগ : 3. মেপে দেখছি, রাজিয়ার আনা ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 27 সেমি.।
$\therefore$ ওই ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6.(27)^2$ বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি. [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 4. যে ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সেমি. সেই ঘনকটির চারপাশ রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে কত বর্গ সেমি. রঙিন কাগজ লাগবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5. আমরা যে ঘরে বসে কাজ করছি সেই ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 7 মি., 5 মি. ও 4 মি.। ঘরটি ☐ [ঘনক আকার / আয়তঘনাকার]

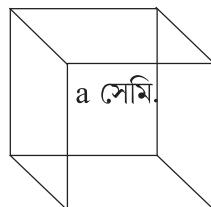
ঘরটির চার দেয়াল রং করতে মোট কতটা ক্ষেত্রফল রং করতে হবে হিসাব করি।
ঘরের চার দেয়াল রং করব অর্থাৎ ঘরের মেঝে ও ছাদ রং করব না।

$\therefore$ রং করতে হবে $= 2 \times$ দৈর্ঘ্য $\times$ উচ্চতা $+ 2 \times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা
$= 2 \times 7 \times 4$ বর্গ মিটার $+ 2\times 5 \times 4$ বর্গ মিটার
= ☐ বর্গ মিটার।

ঘরের চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) $\times$ উচ্চতা = ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা।

প্রয়োগ : 6. যদি একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 150 বর্গ মিটার হয়, তবে ওই ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a সেমি.
$\therefore$ ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $6a^2$ বর্গ সেমি.
$\therefore$ শর্তানুসারে, $6a^2 = 150$
বা, $a^2 = \frac{150}{6} =$ ☐
$\therefore a = \pm 5$

কিন্তু $a \neq -5$, যেহেতু দৈর্ঘ্য সর্বদা ধনাত্মক হয়। $\therefore a = 5$; সুতরাং ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি.।

প্রয়োগ : 7. যদি একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 486 বর্গ মিটার হয়, তবে ওই ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করি। [নিজে করি]

আমরা একটি 'First Aid' বাক্স তৈরি করেছি এবং পিচবোর্ডের আয়তঘনাকার ও ঘনকাকার বাক্সগুলি রঙিন কাগজের মোড়কে মুড়ে সাজিয়ে রেখেছি। আমরা ঠিক করেছি যে এই রঙিন বাক্সে আমাদের প্রয়োজনীয় জিনিসগুলি সাজিয়ে রাখব।

আমার ভাই তার কাঠের স্কেলগুলি একটি সবুজ রঙের আয়তঘনাকার বাক্সে রাখছে।

সবচেয়ে কত লম্বা স্কেল এই বাক্সে রাখতে পারব দেখি।

7 আয়তঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য কীভাবে পাব?

ছবি এঁকে আয়তঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের চেষ্টা করি।

ধরি, পাশের চিত্রের আয়তঘনের দৈর্ঘ্য = AB একক
প্রস্থ = BC একক
উচ্চতা = CE একক

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর, $AC^2 = (AB^2 + BC^2)$ বর্গ একক ________ (i)

আবার সমকোণী ত্রিভুজ ACE-এর, $AE^2 = (AC^2 + CE^2)$ বর্গ একক
$= (AB^2 + BC^2 + CE^2)$ বর্গ একক [(i) থেকে পেলাম]

[একটি সরলরেখা কোনো সমতলের উপর লম্ব হলে লম্ব সরলরেখাটি সমতলকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই ছেদবিন্দুগামী এবং ওই সমতলে অবস্থিত যে-কোনো সরলরেখার উপর পূর্বোক্ত সরলরেখাটি লম্ব হবে। চিত্রে EC সরলরেখাংশটি ABCD সমতলের উপর লম্ব। সুতরাং EC সরলরেখাংশটি CB, CD ও CA সরলরেখাংশ তিনটির উপর C বিন্দুতে লম্ব। তাই, $\angle ACE = 90^\circ$]

$\therefore$ $AE = \sqrt{AB^2+BC^2+CE^2}$ একক

$\therefore$ আয়তঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2 + \text{প্রস্থ}^2 + \text{উচ্চতা}^2}$

প্রয়োগ : 8. আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 20 সেমি., প্রস্থ 15 সেমি. এবং উচ্চতা 10 সেমি. হলে তার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত হবে ?

কর্ণের দৈর্ঘ্য হবে $= \sqrt{20^2+15^2+10^2}$ সেমি. $= 5\sqrt{29}$ সেমি.।

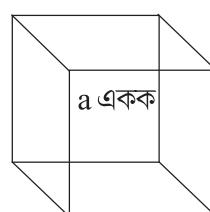
অর্থাৎ সেক্ষেত্রে সবচেয়ে $5\sqrt{29}$ সেমি. দৈর্ঘ্যের লম্বা স্কেল ওই আয়তঘনাকার বাক্সে রাখতে পারব।

8 কিন্তু ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে দেখি।

ধরি, ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক।

$\therefore$ ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+a^2+a^2}$ একক $= \sqrt{3}$ a একক

$\therefore$ ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times$ বাহুর দৈর্ঘ্য।

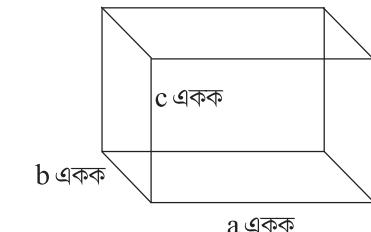
$\therefore$ 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times 5$ সেমি. $= 5\sqrt{3}$ সেমি.।

প্রয়োগ : 9. একটি আয়তঘনাকৃতি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে a, b এবং c একক এবং $a+b+c = 25$, $ab+bc+ca = 240.5$ হলে, ঘরের মধ্যে যে বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের দণ্ডটি রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

ঘরের দৈর্ঘ্য = a একক, প্রস্থ = b একক, উচ্চতা = c একক হলে, ঘরের মধ্যে যে বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের দণ্ডটি রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য = ঘরটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2 \times \square$ [নিজে লিখি]

বা, $25^2 = a^2+b^2+c^2 + 2 \times 240.5$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 625 - 481 = \square$

$\therefore$ ঘরটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক $= \sqrt{144}$ একক $= \square$ একক।

প্রয়োগ : 10. আমি মিতার তৈরি দুটি ঘনক, যাদের প্রত্যেকটির ধার 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের, পাশাপাশি যুক্ত করে একটি আয়তঘন তৈরি করলাম। এইভাবে তৈরি আয়তঘনের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করি। [নিজে করি]

> **উত্তর সংকেত :** দুটি ঘনক পাশাপাশি যুক্ত করে তৈরি করা আয়তঘনের দৈর্ঘ্য = (8+8) সেমি. = 16 সেমি., প্রস্থ = 8 সেমি., উচ্চতা = 8 সেমি.

আমার বন্ধু তথাগত একটি একমুখ খোলা আয়তঘনাকার টিনের বাক্সের চারধার রং করেছে। সে ঠিক করেছে এই টিনের বাক্সে বালি ভর্তি করে ছাদের এককোণে রেখে দেবে। বাড়ির নানান কাজে বালির প্রয়োজন হয়।

(9) কিন্তু এই আয়তঘনাকার বাক্সে কতটা পরিমাণ বালি ধরবে কীভাবে পাব?

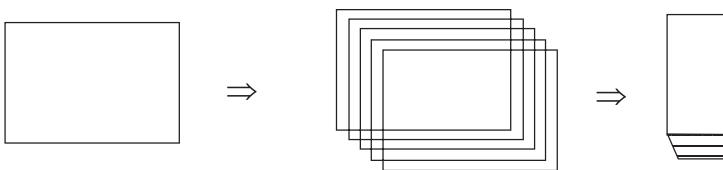
এই আয়তঘনাকার টিনের বাক্সের আয়তন-এর সমান পরিমাণ বালি এই আয়তঘনাকার বাক্সে ধরবে।

(10) এই আয়তন (Volume) কী? আয়তঘনের আয়তন কীভাবে পরিমাপ করব?

কোনো ঘনবস্তু যে পরিমাণ জায়গা জুড়ে থাকে তাকে ওই ঘনবস্তুর **আয়তন** বলা হয়।

আয়তঘনের আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

আমি অনেকগুলি একইমাপের আয়তক্ষেত্রাকার পিচবোর্ডের তল জড়ো করে একটির উপর অপরটি চাপিয়ে আয়তঘনক তৈরির চেষ্টা করলাম এবং দেখলাম, আয়তঘনের যতই উচ্চতা বাড়ছে ততই আয়তঘনের আয়তন

 [বাড়ছে / কমছে]।

একটি আয়তক্ষেত্রাকার পিচবোর্ডের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

$\therefore$ লিখতে পারি আয়তঘনের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল (area of the base) × উচ্চতা (height)

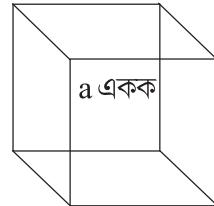
প্রয়োগ : 11. মেপে দেখছি ওই আয়তঘনাকার কৌটোর দৈর্ঘ্য 32 সেমি., প্রস্থ 21 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি.।

$\therefore$ ওই টিনে বালি ধরবে = $(32\times21\times15)$ ঘন সেমি.= ☐ ঘন সেমি.

(11) কিন্তু যদি ওই টিনের কৌটোর প্রতিটি ধার সমান দৈর্ঘ্যের হতো তখন আয়তন কীভাবে পরিমাপ করতাম অর্থাৎ ঘনকের আয়তন কীভাবে পাব হিসাব করে দেখি।

ধরি, ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য a একক।

$\therefore$ ঘনকের আয়তন = $(a\times a\times a)$ ঘন একক = a^3 ঘন একক।

$\therefore$ ঘনকের আয়তন = (একটি বাহুর দৈর্ঘ্য)^3

a একক

প্রয়োগ : 12. যে ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি., তার আয়তন ☐^{3} ঘন সেমি.= ☐ ঘন সেমি. [নিজে করি]

প্রয়োগ : 13. একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তনের সাংখ্যমান (numerical value) সমান হলে কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

ধরি, ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = a একক।

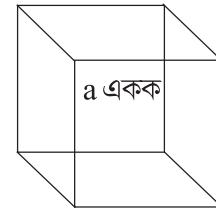
$\therefore$ ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $6a^2$ বর্গ একক এবং ঘনকের আয়তন = a^3 ঘন একক।

শর্তানুসারে, $a^3 = 6a^2$

বা, $a^3 - 6a^2 = 0$

বা, $a^2 (a - 6) = 0$

বা, $a - 6 = 0$ $[\because a \neq 0]$ $\therefore a = 6$

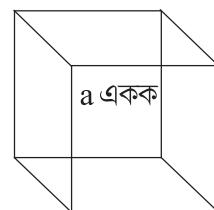
$\therefore$ ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3}\times$ একটি ধারের দৈর্ঘ্য = $6\sqrt{3}$ একক.

প্রয়োগ : 14. একটি আয়তঘনের মাত্রাগুলি যথাক্রমে 12 সেমি., 6 সেমি. ও 3 সেমি.। ওই আয়তঘনের সমান আয়তনের একটি ঘনকের প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

আয়তঘনের আয়তন = $(12\times6\times3)$ ঘন সেমি. = $(6\times2\times6\times3)$ ঘন সেমি. = 6^3 ঘন সেমি.

ধরি, ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য a সেমি.।

$\therefore$ ঘনকের আয়তন = a^3 ঘন সেমি.।

শর্তানুসারে, $a^3 = 6^3$ $\therefore a = 6$

$\therefore$ ঘনকের প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

প্রয়োগ : 15. যদি একটি সমকোণী চৌপল আকারের ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও আয়তন যথাক্রমে 8 মি., 6 মি. এবং 192 ঘন মিটার হয়, তবে ঘরের উচ্চতা এবং চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, ঘরের উচ্চতা = h মিটার

$\therefore$ ঘরের আয়তন = $(8\times6\times h)$ ঘন মি.

শর্তানুসারে, $8\times6\times h = 192$

$\therefore h =$ ☐ [নিজে হিসাব করে লিখি]

$\therefore$ ঘরের উচ্চতা 4 মিটার।

$\therefore$ ঘরের চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল = 2 × (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × উচ্চতা= ☐ [নিজে হিসাব করে লিখি]

প্রয়োগ : 16. যদি কোনো ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফল, অপর একটি ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফলের 4 গুণ হয়, তবে প্রথম ঘনকটির ঘনফল দ্বিতীয় ঘনকটির ঘনফলের কতগুণ হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, প্রথম ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য = x একক এবং দ্বিতীয় ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য = y একক।

$\therefore$ প্রথম ঘনকের 1 টি তলের ক্ষেত্রফল x^2 বর্গ একক এবং দ্বিতীয় ঘনকের 1 টি তলের ক্ষেত্রফল y^2 বর্গ একক।

শর্তানুসারে, $x^2 = 4y^2 \quad \therefore x = 2y \;\; [\because x \neq -2y]$

সুতরাং, $\dfrac{\text{প্রথম ঘনকের ঘনফল}}{\text{দ্বিতীয় ঘনকের ঘনফল}} = \dfrac{x^3}{y^3} = \dfrac{(2y)^3}{y^3} = \dfrac{8y^3}{y^3} = 8 \;\; [\because y \neq 0]$

$\therefore$ প্রথম ঘনকের ঘনফল = 8 × দ্বিতীয় ঘনকের ঘনফল।

সুতরাং, প্রথম ঘনকের ঘনফল দ্বিতীয় ঘনকের ঘনফলের 8 গুণ।

প্রয়োগ : 17. পাশের গ্রামের একটি আয়তাকার জলাধারের জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 18 মিটার ও 11 মিটার। সেই জলাধারে পাশের পুকুর থেকে একটি পাম্প দিয়ে জলসেচ করা হচ্ছে। পাম্পটি যদি ঘণ্টায় 39600 লিটার জলসেচ করতে পারে, তবে পাম্পটি কতক্ষণ চললে জলাধারটিতে 3.5 ডেসিমিটার উচ্চতার জল জমা হবে তা হিসাব করে লিখি। [1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমিটার]

আয়তাকার জলাধারে 3.5 ডেসিমিটার গভীর জল জমা হলে সেই জলের আয়তন হবে (180×110×3.5) ঘন ডেসিমিটার [$\because$ 18 মিটার = 180 ডেসিমি., 11 মিটার = 110 ডেসিমি.]

= (180×110×3.5) লিটার [যেহেতু 1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমি.]

পাম্পটি ঘণ্টায় 39600 লিটার জল ভর্তি করে।

$\therefore$ পাম্পটি চালাতে হবে $\dfrac{180\times110\times3.5}{39600}$ ঘণ্টা = ☐ ঘণ্টা ☐ মিনিট।

প্রয়োগ : 18. যদি পাম্পটি ঘণ্টায় 37400 লিটার জলভর্তি করতে পারত, তাহলে 18 মিটার দীর্ঘ ও 11 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট আয়তাকার জলাধারে 17 ডেসিমিটার উচ্চতার জল ভরার জন্য পাম্পটিকে কতক্ষণ চালাতে হতো হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 19. 4 মিটার লম্বা, 5 ডেসিমি. চওড়া এবং 3 ডেসিমি. পুরু একটি কাঠের লগ থেকে 2 মিটার লম্বা, 2 ডেসিমি. চওড়া, 40টি তক্তা চেরাই করা হলো। চেরাই-এর ফলে 2% কাঠ নষ্ট হয়েছে। কিন্তু এখনও লগটিতে 108 ঘন ডেসিমি. কাঠ রয়ে গেছে। প্রতিটি তক্তা কতটা পুরু করে চেরাই করা হয়েছিল তা হিসাব করে লিখি।

লগটিতে কাঠ ছিল = (☐ × ☐ × ☐) ঘন ডেসিমি. = 600 ঘন ডেসিমি.

কাঠ নষ্ট হয়েছে = $600 \times \dfrac{2}{100}$ ঘন ডেসিমি. = 12 ঘন ডেসিমি.

ধরি প্রতিটি তক্তা x ডেসিমি. পুরু।

$\therefore$ 1 টি তক্তায় কাঠ আছে (20×2×x) ঘন ডেসিমি.

$\therefore$ 40 টি তক্তায় কাঠ আছে 40×(20×2×x) ঘন ডেসিমি. = 1600x ঘন ডেসিমি.।

চেরাই করার পরে লগটিতে কাঠ পড়ে রয়েছে 108 ঘন ডেসিমি.।

শর্তানুসারে, $1600x + 108 + 12 = 600$

$\therefore x =$ ☐ [নিজে হিসাব করে লিখি]

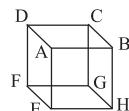
$\therefore$ প্রতিটি তক্তা 0.3 ডেসিমি. বা 3 সেমি. পুরু করে চেরাই করা হয়েছিল।

কষে দেখি 4

1. আমরা পরিবেশের 4 টি আয়তঘনাকার ও 4 টি ঘনক আকার বস্তুর নাম লিখি।
2. পাশের আয়তঘনাকার চিত্রের তলগুলি, ধারগুলি ও শীর্ষবিন্দুগুলির নাম লিখি।

D C B A F G E H

3. একটি সমকোণী চৌপলাকার ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5 মি., 4 মি. ও 3 মি. হলে, ওই ঘরে সবচেয়ে লম্বা যে দণ্ড রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. একটি ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফল 64 বর্গ মিটার হলে, ঘনকটির আয়তন হিসাব করে লিখি।
5. আমাদের বকুলতলা গ্রামে 2 মিটার চওড়া এবং 8 ডেসিমি. গভীর একটি খাল কাটা হয়েছে। যদি মোট 240 ঘন মিটার মাটি কাটা হয়ে থাকে তবে খালটি কত লম্বা হিসাব করে লিখি।
6. একটি ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সেমি. হলে, ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
7. একটি ঘনকের ধারগুলির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি 60 সেমি. হলে, ঘনকটির ঘনফল হিসাব করে লিখি।
8. যদি একটি ঘনকের ছয়টি পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 216 বর্গ সেমি. হয়, তবে ঘনকটির আয়তন কত হবে হিসাব করে লিখি।
9. একটি সমকোণী চৌপলের আয়তন 432 ঘন সেমি.। তাকে সমান আয়তনবিশিষ্ট দুটি ঘনক-এ পরিণত করা হলে, প্রতিটি ঘনকের প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।
10. একটি ঘনকের প্রতিটি বাহুকে 50% কমানো হলো। মূল ঘনক ও পরিবর্তিত ঘনকের ঘনফলের অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।
11. একটি সমকোণী চৌপল আকারের বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 3 : 2 : 1 এবং উহার আয়তন 384 ঘন সেমি. হলে, বাক্সটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হবে হিসাব করে লিখি।
12. একটি চা-এর বাক্সের ভিতরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 7.5 ডেসিমি, 6 ডেসিমি. এবং 5.4 ডেসিমি.। চা ভর্তি বাক্সটির ওজন 52 কিগ্রা. 350 গ্রাম। কিন্তু খালি অবস্থায় বাক্সটির ওজন 3.75 কিগ্রা. হলে, 1 ঘন ডেসিমি. চা-এর ওজন কত হবে তা হিসাব করে লিখি।
13. একটি বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট পিতলের প্লেটের দৈর্ঘ্য x সেমি., বেধ 1 মিলিমি. এবং প্লেটটির ওজন 4725 গ্রাম। যদি 1 ঘন সেমি. পিতলের ওজন 8.4 গ্রাম হয়, তাহলে x-এর মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি।
14. চাঁদমারির রাস্তাটি উঁচু করতে হবে। তাই রাস্তার দু-পাশে 30 টি সমান গভীর ও সমান মাপের আয়তঘনাকার গর্ত খুঁড়ে সেই মাটি দিয়ে রাস্তাটি উঁচু করা হয়েছে। যদি প্রতিটি গর্তের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 14 মি. এবং 8 মি. হয় এবং রাস্তাটি তৈরি করতে মোট 2520 ঘন মিটার মাটি লেগে থাকে, তবে প্রতিটি গর্তের গভীরতা হিসাব করে লিখি।
15. ঘনকাকৃতি একটি সম্পূর্ণ জলপূর্ণ চৌবাচ্চা থেকে সমান মাপের 64 বালতি জল তুলে নিলে চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{3}$ অংশ জলপূর্ণ থাকে। চৌবাচ্চার একটি ধারের দৈর্ঘ্য 1.2 মিটার হলে, প্রতিটি বালতিতে কত লিটার জল ধরে তা হিসাব করে লিখি।
16. এক গ্রোস দেশলাই বাক্সের একটি প্যাকেটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 2.8 ডেসিমি., 1.5 ডেসিমি. ও 0.9 ডেসিমি. হলে, একটি দেশলাই বাক্সের আয়তন কত হবে হিসাব করি। [এক গ্রোস = 12 ডজন]

    কিন্তু যদি একটি দেশলাই বাক্সের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং প্রস্থ 3.5 সেমি. হয়, তবে তার উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি।

17. 2.1 মিটার দীর্ঘ, 1.5 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তঘনাকার চৌবাচ্চার অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। ওই চৌবাচ্চায় আরও 630 লিটার জল ঢাললে জলের গভীরতা কতটা বৃদ্ধি পাবে হিসাব করে লিখি।

18. গ্রামের আয়তক্ষেত্রাকার মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 20 মিটার এবং 15 মিটার। ওই মাঠের ভিতরে চারটি কোণে পিলার বসানোর জন্য 4 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চারটি ঘনকাকৃতি গর্ত কেটে অপসারিত মাটি অবশিষ্ট জমির উপর ছড়িয়ে দেওয়া হলো। মাঠের তলের উচ্চতা কতটা বৃদ্ধি পেল হিসাব করে লিখি।

19. 48 মিটার লম্বা এবং 31.5 মিটার চওড়া একখণ্ড নীচু জমিকে 6.5 ডেসিমি. উঁচু করার জন্য ঠিক করা হয়েছে পাশের 27 মিটার লম্বা এবং 18.2 মিটার চওড়া একটি জমি গর্ত করে মাটি তোলা হবে। গর্তটি কত মিটার গভীর করতে হবে হিসাব করে লিখি।

20. বাড়ির তিনটি কেরোসিন তেলের ড্রামে যথাক্রমে 800 লিটার, 725 লিটার এবং 575 লিটার তেল ছিল। ওই তিনটি ড্রামের তেল একটি আয়তঘনাকার পাত্রে ঢালা হলো এবং এতে পাত্রে তেলের গভীরতা 7 ডেসিমি. হলো। ওই আয়তঘনাকার পাত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 হলে, পাত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হিসাব করে লিখি।

    যদি ওই আয়তঘনাকার পাত্রের গভীরতা 5 ডেসিমিটার হতো, তবে 1620 লিটার তেল ওই পাত্রে রাখা যেত কিনা হিসাব করে দেখি।

21. আমাদের তিনতলা ফ্ল্যাটের তিনটি পরিবারের দৈনিক জলের চাহিদা যথাক্রমে 1200 লিটার, 1050 লিটার এবং 950 লিটার। এই চাহিদা মেটানোর পরও চাহিদার 25% জল মজুত থাকে এমন একটি ট্যাঙ্ক বসানোর জন্য মাত্র 2.5 মি. দীর্ঘ এবং 1.6 মিটার চওড়া একটি জায়গা পাওয়া গেছে। ট্যাঙ্কটি কত মিটার গভীর করতে হবে হিসাব করে লিখি।

    জায়গাটি যদি প্রস্থের দিকে আরও 4 ডেসিমি. বেশি হতো, তবে ট্যাঙ্কটি কতটা গভীর করতে হতো তা হিসাব করে লিখি।

22. 5 সেমি. পুরু কাঠের তক্তায় তৈরি ঢাকনাসহ একটি কাঠের বাক্সের ওজন 115.5 কিগ্রা.। কিন্তু চাল ভর্তি বাক্সটির ওজন 880.5 কিগ্রা.। বাক্সটির ভিতরের দিকের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 12 ডেসিমি. এবং 8.5 ডেসিমি. এবং এক ঘন ডেসিমি. চালের ওজন 1.5 কিগ্রা.। বাক্সটির ভিতরের উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি। প্রতি বর্গ ডেসিমি. 1.50 টাকা হিসাবে বাক্সটির বাইরের চারিপাশ রং করতে কত খরচ পড়বে হিসাব করে লিখি।

23. 20 মি. দীর্ঘ এবং 18.5 মি. চওড়া একটি আয়তঘনাকার পুকুরে 3.2 মি. গভীর জল আছে। ঘণ্টায় 160 কিলোলিটার জলসেচ করতে পারে এমন একটি পাম্প দিয়ে কতক্ষণে পুকুরটির সমস্ত জলসেচ করা যাবে হিসাব করে লিখি। ওই জল যদি 59.2 মিটার দীর্ঘ এবং 40 মিটার চওড়া একটি আল দেওয়া ধান ক্ষেতে ফেলা হয়, তবে সেই জমিতে জলের গভীরতা কত হবে হিসাব করে লিখি। [1 ঘন মিটার = 1 কিলোলিটার]

24. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :**

    (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

    (i) একটি সমকোণী চৌপলাকৃতি বাক্সের ভিতরের আয়তন 440 ঘন সেমি. এবং ভিতরের ভূমিতলের ক্ষেত্রফল 88 বর্গ সেমি.। বাক্সটির ভিতরের উচ্চতা

    (a) 4 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 3 সেমি. (d) 6 সেমি.

(ii) একটি আয়তঘনাকার গর্তের দৈর্ঘ্য 40 মি., প্রস্থ 12 মি. এবং গভীরতা 16 মি.। ওই গর্তের মধ্যে 5 মি. দৈর্ঘ্য, 4 মি. প্রস্থ এবং 2 মি. পুরু তক্তা রাখা যাবে

(a) 190 টি (b) 192 টি (c) 184 টি (d) 180 টি

(iii) একটি ঘনকের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল 256 বর্গ মিটার। ঘনকটির আয়তন

(a) 64 ঘন মি. (b) 216 ঘন মি. (c) 256 ঘন মি. (d) 512 ঘন মি.

[উত্তর সংকেত : পার্শ্বতলের সংখ্যা 4]

(iv) দুটি ঘনকের আয়তনের অনুপাত 1 : 27 হলে, ঘনক দুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 1 : 3 (b) 1 : 8 (c) 1 : 9 (d) 1 : 18

(v) একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল s বর্গ একক এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য d একক হলে s এবং d-এর সম্পর্ক

(a) $s = 6d^2$ (b) $3s = 7d$ (c) $s^3 = d^2$ (d) $d^2 = \frac{S}{2}$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি ঘনকের প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে, ঘনকটির আয়তন প্রথম ঘনকের 4 গুণ হবে।

(ii) বর্ষার সময় 2 হেক্টর জমিতে বৃষ্টিপাত 5 সেমি. উচ্চতার হলে, বৃষ্টির জলের আয়তন 1000 ঘন মিটার।

[উত্তর সংকেত : 1 আর = 100 বর্গ মি., 1 হেক্টর = 100 আর]

(c) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি সমকোণী চৌপলের কর্ণের সংখ্যা ________ টি।

(ii) একটি ঘনকের একটি তলের কর্ণের দৈর্ঘ্য = ________ × একটি ধারের দৈর্ঘ্য।

(iii) সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে সেই ঘনবস্তুর বিশেষ নাম ________।

25. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) একটি আয়তঘনের তল সংখ্যা = x, ধার সংখ্যা = y, শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা = z এবং কর্ণের সংখ্যা = p হলে, $x - y + z + p$-এর মান কত তা লিখি।

(ii) দুটি আয়তঘনের মাত্রাগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4, 6, 4 একক এবং 8, (2h − 1), 2 একক। যদি আয়তঘন দুটির ঘনফল সমান হয়, তাহলে h-এর মান কত তা লিখি।

(iii) একটি ঘনকের প্রত্যেকটি ধারের দৈর্ঘ্য 50% বৃদ্ধি পেলে, ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি হবে তা হিসাব করে লিখি।

(iv) তিনটি নিরেট ঘনক যাদের প্রত্যেকটি ধারের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সেমি., 4 সেমি. এবং 5 সেমি.। ঘনক তিনটিকে গলিয়ে একটি নতুন নিরেট ঘনক তৈরি করা হলো। নতুন ঘনকটির একটি ধারের দৈর্ঘ্য কত হবে তা লিখি।

(v) একটি ঘরের দুটি সংলগ্ন দেয়ালের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 মি. এবং 8 মি.। ঘরটির উচ্চতা 4 মি. হলে, ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত তা হিসাব করে লিখি।

5 অনুপাত ও সমানুপাত
RATIO AND PROPORTION

আজ সকাল থেকে তেঁতুলতলা গ্রামের বড়ো মাঠে মহিলাদের ফুটবল ম্যাচ হচ্ছে। প্রথমে ভারতী সংঘের মেয়েদের সঙ্গে নেতাজি সংঘের মেয়েদের ফুটবল ম্যাচ হচ্ছে। গ্রামের বিভিন্ন স্কুলের প্রচুর শিক্ষার্থী এই ম্যাচ দেখতে মাঠে এসেছে।

দেখছি, এই ফুটবল ম্যাচের দর্শকদের মধ্যে 60% ছাত্র এবং 40% ছাত্রী আছে।

আমি ও সুজয় মাঠে উপস্থিত ছাত্র ও ছাত্রীদের সংখ্যার অনুপাত (ratio) গঠন করে সমজাতীয় রাশির তুলনা করি।

ছাত্রদের সংখ্যা : ছাত্রীদের সংখ্যা = 60% : 40% = $3 \times 20 : 2 \times 20 = 3 : 2$

অর্থাৎ, একটি রাশি (quantity) অপর একটি সমজাতীয় রাশির কতগুণ বা কতভাগ তাই হলো অনুপাত।

অনুপাতের পদ দুটিকে শূন্যবাদে একই সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে অনুপাতের কোনো পরিবর্তন হয় না।

বুঝেছি, মাঠে উপস্থিত ছাত্রদের সংখ্যা : ছাত্রীদের সংখ্যা = a : b হলে,

$a:b = \frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} = ak:bk \ [k\neq0]$, এবং $a:b = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}} = \frac{a}{k} : \frac{b}{k} \ [k\neq0]$

a ও b (b≠0) বাস্তব সংখ্যা দুটির অনুপাতের মান a : b বা $\frac{a}{b}$; এই a : b-কে পড়া হয় "a অনুপাত b" (a is to b); a-কে a : b-এর পূর্বপদ (Antecedent) ও b-কে উত্তর পদ (Consequent) বলা হয়।

(1) 3:2 অনুপাতের 3 ও 2 -কে কী বলা হয়?

3:2-অনুপাতের 3 [পূর্বপদ] এবং 2 [ ] পদ।

(2) কিন্তু যে-কোনো অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ সমান হলে কী বলা হয়?

a:b অনুপাতের a=b হলে অর্থাৎ পূর্বপদ ও উত্তরপদ সমান হলে সেই অনুপাতকে **সাম্যানুপাত** (ratio of equality) বলা হয় এবং a≠b হলে অর্থাৎ পূর্বপদ ও উত্তরপদ অসমান হলে তাকে **বৈষম্যানুপাত** (ratio of inequality) বলা হয়।

বুঝেছি, 3:2 একটি বৈষম্যানুপাত, কিন্তু 2:2 একটি সাম্যানুপাত।

(3) কিন্তু কোনো অনুপাতের মান $\frac{a}{b} > 1$ এবং $\frac{a}{b} < 1$ হলে, সেই অনুপাত দুটিকে কী বলা হয়?

কোনো অনুপাতের মান $\frac{a}{b} > 1$ হলে, ওই অনুপাতটিকে **গুরু অনুপাত** (ratio of greater inequality) এবং $\frac{a}{b} < 1$ হলে, ওই অনুপাতটিকে **লঘু অনুপাত** (ratio of less inequality) বলা হয়।

বুঝেছি, 3 : 2 অনুপাতটি গুরু অনুপাত যেহেতু $\frac{3}{2} > 1$

কিন্তু 2 : 3 অনুপাতটির $\frac{2}{3} < 1$;

∴ 2 : 3 একটি [ ] অনুপাত।

4 কোনো অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে যে নতুন অনুপাত তৈরি হবে সেই অনুপাতকে পূর্বের অনুপাতের কী বলা হয়?

কোনো অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে যে নতুন অনুপাত তৈরি হয় সেই অনুপাতকে পূর্বের অনুপাতের **ব্যস্ত অনুপাত** বা **বিপরীত অনুপাত** (inverse ratio) বলে।

$a:b$ অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত $b:a$

বুঝেছি, $2:3$ অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত $3:2$

আমার বন্ধু সুজয় এক মজার কাজ করল। সে ওই মাঠে বিভিন্ন সময়ের ফুটবল খেলায় উপস্থিত ছাত্রী ও ছাত্র দর্শকদের সংখ্যার 3 টি অনুপাত তার খাতায় লিখল।

সে লিখল, $5:2$, $4:3$, $1:2$

5 কিন্তু সুজয়ের লেখা অনুপাতগুলির পূর্বপদগুলির গুণফল পূর্বপদ এবং উত্তরপদগুলির গুণফল উত্তরপদ ধরে যে অনুপাত পাবো সেই অনুপাতকে কী বলা হয়?

দুই বা ততোধিক প্রদত্ত অনুপাতের পূর্বপদগুলির গুণফলকে পূর্বপদ এবং উত্তরপদগুলির গুণফলকে উত্তরপদ ধরে যে অনুপাত পাওয়া যাবে সেই অনুপাতকে প্রদত্ত অনুপাতগুলির **যৌগিক অনুপাত** (Compound ratio) বা **মিশ্র অনুপাত বলা** (Mixed ratio) হয়।

যেমন : $a:b$ এবং $c:d$-এর যৌগিক অনুপাত $ac:bd$

বুঝেছি, $5:2$, $4:3$ এবং $1:2$-এর যৌগিক অনুপাত $(5\times4\times1):(2\times3\times2) = 20:12 = 5:3$

প্রয়োগ : 1. আমি নীচের অনুপাতগুলি দেখি এবং ফাঁকা ঘরে বুঝে লিখি।

অনুপাত	সাম্যানুপাত/ বৈষম্যানুপাত	গুরু অনুপাত/ লঘু অনুপাত	ব্যস্ত অনুপাত বা বিপরীত অনুপাত
7:5	বৈষম্যানুপাত	গুরু অনুপাত	5:7
6:6			
1:4			
9:2			
7:5, 1:4 ও 9:2-এর যৌগিক অনুপাত ☐			

প্রয়োগ : 2. $x:y$ অনুপাতটি কোন শর্তে লঘু অনুপাত ও কোন শর্তে গুরু অনুপাত হবে লিখি এবং $x:y$-এর সমতুল্য দুটি অনুপাত লিখি।

$x:y$ অনুপাতটি লঘু অনুপাত হবে যখন $\frac{x}{y}<1$ এবং গুরু অনুপাত হবে যখন $\frac{x}{y}>1$ হবে।

$x:y$-এর সমতুল্য দুটি অনুপাত $xk:yk$ এবং $\frac{x}{k}:\frac{y}{k}$ [যেখানে $k\neq0$]

প্রয়োগ : 3. আমি pr : qr-এর লঘিষ্ঠ আকারের ব্যস্ত অনুপাত লিখি।

$pr : qr = \frac{pr}{qr} = \frac{p}{q} = p : q$

$\therefore$ pr : qr -এর লঘিষ্ঠ আকার = p : q

$\therefore$ pr : qr -এর লঘিষ্ঠ আকারের ব্যস্ত অনুপাত = q : p

প্রয়োগ : 4. $x^2yp : xy^2p$ -এর লঘিষ্ঠ আকারের ব্যস্ত অনুপাত লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5. যদি দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার অনুপাতের লঘিষ্ঠ আকার p : q এবং তাদের গ.সা.গু. r হয়,তবে সংখ্যা দুটি কী কী হবে লিখি।

সংখ্যা দুটি pr এবং qr.

প্রয়োগ : 6. যদি দুটি সংখ্যার অনুপাত 2:3 এবং তাদের গ.সা.গু. 7 হয়, তবে সংখ্যাদুটি লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 7. আমি নীচের অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত লিখি—

(i) a : b, p : q এবং x : y (ii) a : bc, b : ca, c : ab

(i) a : b, p : q এবং x : y -এর যৌগিক বা মিশ্র অনুপাত

$= a \times p \times x : b \times q \times y$

$= apx : bqy$

(ii) a : bc, b : ca ও c : ab -এর যৌগিক বা মিশ্র অনুপাত

$= a \times b \times c : bc \times ca \times ab$

$= abc : a^2b^2c^2 = 1 : abc$ [পূর্ব ও উত্তরপদকে abc দিয়ে ভাগ করে পাই]

প্রয়োগ : 8. pq : r ও r : pq -এর যৌগিক অনুপাত নির্ণয় করি ও ওই যৌগিক অনুপাতকে কী বলে লিখি।

pq : r ও r : pq -এর যৌগিক অনুপাত $= pq \times r : r \times pq$

$= pqr : pqr$

$= 1 : 1$ [পূর্ব ও উত্তরপদকে pqr দিয়ে ভাগ করে পেলাম]

$\therefore$ pq : r ও r : pq -এর যৌগিক অনুপাত সাম্যানুপাত।

প্রয়োগ : 9. $p^2q : r$, $q^2r : p$ ও $r^2p : q$ -অনুপাত তিনটির মিশ্র অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 10. যদি A : B = 4 : 5 এবং B : C = 6 : 7 হয়, তবে A : C নির্ণয় করি।

A : B = 4 : 5 এবং B : C = 6 : 7

$\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$ এবং $\frac{B}{C} = \frac{6}{7}$

$\therefore \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$

বা, $\frac{A}{C} = \frac{24}{35}$

$\therefore A : C = 24 : 35$

প্রয়োগ : 11. যদি A : B = 3 : 7 এবং B : C = 8 : 5 হয়, তবে A : C নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 12. যদি $A:B=6:7$ এবং $B:C=8:9$ হয়, তবে $A:B:C$ কত হবে হিসাব করে লিখি।

$A:B=6:7$ এবং $B:C=8:9$

$B:C=8:9=1:\frac{9}{8}=7:\frac{63}{8}$ $\therefore A:B:C=6:7:\frac{63}{8}=48:56:63$

অন্যভাবে, $A:B:C$ নির্ণয় করার সময়ে প্রথমে উভয় ক্ষেত্রে B-এর মান সমান করে নিই।

B-এর দুটি মান 7 ও 8-এর ল.সা.গু. 56

$A:B=6:7=6\times8:7\times8=48:56$

$B:C=8:9=8\times7:9\times7=56:63$ $\therefore A:B:C=48:56:63$

প্রয়োগ : 13. যদি $A:B=5:9$ এবং $B:C=4:5$ হয়, তবে $A:B:C$ কত হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 14. যদি $x:y=2:3$ হয়, তবে $(4x-y):(2x+3y)$ কত হবে হিসাব করে লিখি।

$x:y=2:3$

ধরি, $x=2p$ এবং $y=3p$ [যেখানে, p একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $p\neq0$]

$\therefore (4x-y):(2x+3y)=\frac{4x-y}{2x+3y}=\frac{4\times2p-3p}{2\times2p+3\times3p}=\frac{8p-3p}{4p+9p}=\frac{5p}{13p}=\frac{5}{13}=5:13$

$\therefore (4x-y):(2x+3y)=5:13$

বিকল্প পদ্ধতি, $(4x-y):(2x+3y)=\frac{4x-y}{2x+3y}=\frac{\frac{4x-y}{y}}{\frac{2x+3y}{y}}$ [লব ও হরকে y দ্বারা ভাগ করে পাই]

$=\frac{4\frac{x}{y}-1}{2\frac{x}{y}+3}=\frac{4\times\frac{2}{3}-1}{2\times\frac{2}{3}+3}$ $\left[\frac{x}{y}=\frac{2}{3}\text{ বসিয়ে}\right]$

$=\frac{\frac{8-3}{3}}{\frac{4+9}{3}}=\frac{5}{13}=5:13$

প্রয়োগ : 15. $x:y=7:4$ হলে, দেখাই যে $(5x-6y):(3x+11y)=11:65$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 16. $(3x+5y):(7x-4y)=7:4$ হলে, $x:y$ -এর মান নির্ণয় করি।

$(3x+5y):(7x-4y)=7:4$

বা, $\frac{3x+5y}{7x-4y}=\frac{7}{4}$

বা, $4(3x+5y)=7(7x-4y)$

বা, $12x+20y=49x-28y$

বা, $12x-49x=-28y-20y$

বা, $-37x=-48y$

বা, $\frac{x}{y}=\frac{48}{37}$ $\therefore x:y=48:37$

প্রয়োগ : 17. যদি $(2x+5y):(5x-7y)=5:3$ হয়, তবে $x:y$ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 18. $(3x-2y):(x+3y)=5:6$ হলে, $(2x-5y):(3x+4y)$ নির্ণয় করি।

$$\frac{3x-2y}{x+3y}=\frac{5}{6}$$

বা, $6(3x-2y)=5(x+3y)$

বা, $18x-12y=5x+15y$

বা, $13x=27y$

বা, $\frac{x}{y}=\frac{27}{13}$ $\qquad\therefore\ x:y=27:13$

ধরি, $x=27k$ এবং $y=13k$ [k একটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা]

$$\therefore (2x-5y):(3x+4y)=\frac{2x-5y}{3x+4y}=\frac{2\times27k-5\times13k}{3\times27k+4\times13k}=\frac{54k-65k}{81k+52k}=\frac{-11k}{133k}=\frac{-11}{133}=-11:133$$

$\therefore (2x-5y):(3x+4y)=-11:133$

কিন্তু এখানে দেখছি অনুপাতের একটি পদ ঋণাত্মক। বাস্তবে এরকম উদাহরণ আছে কি?
শ্যামল 100 টাকায় একটি জিনিস কিনে 130 টাকায় বিক্রি করে। সুতরাং,শ্যামলের লাভ হয় 30 টাকা।
রফিকুল 100 টাকায় একটি জিনিস কিনে 80 টাকায় বিক্রি করে। সুতরাং,রফিকুলের ক্ষতি হয় 20 টাকা।
অর্থাৎ, রফিকুলের লাভ হয় – 20 টাকা। শ্যামল ও রফিকুলের লাভের অনুপাত 30 : –20 বা, 3 : –2

প্রয়োগ : 19. $(7x-5y):(3x+4y)=7:11$ হলে, $(5x-3y):(6x+5y)$ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 20. $x:y$ **বৈষম্যানুপাতের** উভয়পদের সঙ্গে কত যোগ করলে $p:q$ **বৈষম্যানুপাতটি** হবে নির্ণয় করি।

ধরি, $x:y$ অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে k যোগ করলে অনুপাতটি $p:q$ হবে।

সুতরাং, $\frac{x+k}{y+k}=\frac{p}{q}$

বা, $q(x+k)=p(y+k)$

বা, $qx+qk=py+pk$

বা, $qk-pk=py-qx$

বা, $k(q-p)=py-qx$

$\therefore k=\frac{py-qx}{q-p}$ $\qquad$ ($\because$ $p:q$ **একটি বৈষম্যানুপাত,** $\therefore p\neq q$; $\therefore q-p\neq 0$)

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $\frac{py-qx}{q-p}$ উভয়পদের সঙ্গে যোগ করতে হবে।

প্রয়োগ : 21. 5:3 অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে কত যোগ করলে অনুপাতটি 7:6 হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 22. $x:y$ **বৈষম্যানুপাতের** উভয়পদ থেকে কত বিয়োগ করলে $p:q$ **বৈষম্যানুপাতটি** হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, $x:y$ অনুপাতের উভয়পদ থেকে r বিয়োগ করলে অনুপাতটি $p:q$ হবে।

সুতরাং, $\frac{x-r}{y-r}=\frac{p}{q}$

বা, $qx-qr=py-pr$

বা, $pr-qr=py-qx$

বা, $r(p-q)=py-qx$

$\therefore r=\frac{py-qx}{p-q}$ $\qquad\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $\frac{py-qx}{p-q}$ উভয়পদের থেকে বিয়োগ করতে হবে।

কষে দেখি 5.1

1. নীচের রাশিগুলি অনুপাতে প্রকাশ করি ও অনুপাতগুলি সাম্যানুপাত, লঘু অনুপাত না গুরু অনুপাত বুঝে লিখি।

   (i) 4 মাস এবং 1 বছর 6 মাস　　(ii) 75 পয়সা এবং 1 টাকা 25 পয়সা

   (iii) 60 সেমি. এবং 0.6 মিটার　　(iv) 1.2 কিগ্রা. এবং 60 গ্রাম

2. (i) p কিগ্রা. ও q গ্রামের অনুপাতটি লিখি।

   (ii) x দিন ও z মাসের মধ্যে অনুপাত নির্ণয় কখন সম্ভব হবে লিখি।

   (iii) একটি অনুপাত ও তার ব্যস্ত অনুপাতের মিশ্র অনুপাত কী ধরনের অনুপাত হবে লিখি।

   (iv) $\frac{a}{b}:c, \frac{b}{c}:a, \frac{c}{a}:b$ -এর মিশ্র অনুপাত নির্ণয় করি।

   (v) $x^2:yz$ এবং কোন অনুপাতের মিশ্র অনুপাত $xy:z^2$ হবে হিসাব করে লিখি।

   (vi) $x^2:\frac{yz}{x}, y^2:\frac{zx}{y}, z^2:\frac{yx}{z}$ অনুপাতগুলির ব্যস্ত অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত নির্ণয় করি।

3. নিম্নলিখিতগুলির মিশ্র অনুপাত বা যৌগিক অনুপাত নির্ণয় করি :

   (i) $4:5, 5:7$ এবং $9:11$　　(ii) $(x+y):(x-y), (x^2+y^2):(x+y)^2$ এবং $(x^2-y^2)^2:(x^4-y^4)$

4. (i) $A:B=6:7$ এবং $B:C=8:7$ হলে, $A:C$ নির্ণয় করি।

   (ii) $A:B=2:3, B:C=4:5$ এবং $C:D=6:7$ হলে, $A:D$ নির্ণয় করি।

   (iii) যদি $A:B=3:4$ এবং $B:C=2:3$ হয়, তাহলে $A:B:C$ নির্ণয় করি।

   (iv) $x:y=2:3$ এবং $y:z=4:7$ হলে, $x:y:z$ নির্ণয় করি।

5. (i) $x:y=3:4$ হলে, $(3y-x):(2x+y)$ কত হবে নির্ণয় করি।

   (ii) $a:b=8:7$ হলে, দেখাই যে $(7a-3b):(11a-9b)=7:5$

   (iii) $p:q=5:7$ এবং $p-q=-4$ হলে, $3p+4q$ -এর মান নির্ণয় করি।

6. (i) $(5x-3y):(2x+4y)=11:12$ হলে, $x:y$ নির্ণয় করি।

   (ii) $(3a+7b):(5a-3b)=5:3$ হলে, $a:b$ নির্ণয় করি।

7. (i) $(7x-5y):(3x+4y)=7:11$ হলে, দেখাই যে $(3x-2y):(3x+4y)=137:473$

   (ii) $(10x+3y):(5x+2y)=9:5$ হলে, দেখাই যে $(2x+y):(x+2y)=11:13$

8. (i) $2:5$ অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে কত যোগ করলে অনুপাতটি $6:11$ হবে নির্ণয় করি।

   (ii) $a:b$ বৈষম্যানুপাতের উভয়পদ থেকে কত বিয়োগ করলে বৈষম্যানুপাতটি $m:n$ হবে নির্ণয় করি।

   (iii) কোন সংখ্যা $4:7$ অনুপাতের পূর্বপদের সঙ্গে যোগ এবং উত্তরপদ থেকে বিয়োগ করলে উৎপন্ন অনুপাতটির মান $2:3$ ও $5:4$ -এর যৌগিক অনুপাত হবে।

পরের মাসে তেঁতুলতলা গ্রামের ওই মাঠে কিশোরদের ফুটবল ম্যাচের আয়োজন করা হচ্ছে। ভারতী সংঘ থেকে ঠিক করা হয়েছে প্রত্যেক কিশোরকে ফুটবল খেলার জার্সি কিনে দেবে।

সৌমেনকাকু 560 টাকায় 7 টি জার্সি কিনে এনেছেন। আমরা শর্মিষ্ঠাদির সঙ্গে গিয়ে একই দামের 15 টি জার্সি 1200 টাকায় কিনে আনলাম।

6 আমি সৌমেনকাকুর কেনা ও আমাদের কেনা জার্সির সংখ্যার ও তাদের দামের আলাদা আলাদা অনুপাত তৈরি করি ও কী পাই দেখি।

সৌমেনকাকুর কেনা জার্সির সংখ্যা : আমাদের কেনা জার্সির সংখ্যা = $7 : 15$

সৌমেনকাকুর কেনা জার্সির দাম : আমাদের কেনা জার্সির দাম $= 560 : 1200 = 7\times80 : 15\times80 = 7 : 15$

7 কিন্তু অনুপাত দুটি লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশের পর দেখছি, দুটি অনুপাতই সমান। এই ধরনের সমান অনুপাত তৈরি করার সংখ্যাগুলিকে কী বলা হয়?

যদি চারটি বাস্তব সংখ্যা এমন হয় যে, প্রথম দুটি সংখ্যার অনুপাত ও শেষ দুটি সংখ্যার অনুপাত পরস্পর সমান হয় তা হলে ওই সংখ্যা চারটিকে **সমানুপাতী** বলে অথবা সংখ্যা চারটি **সমানুপাতে** (proportion) আছে বলা হয়।

চারটি বাস্তব সংখ্যা a, b, c, d $(b\neq0, d\neq0)$ সমানুপাতে থাকলে তাদেরকে $a : b :: c : d$-এইভাবে লেখা হয়। a ও d-কে **প্রান্তীয় পদ** (extremes) ও b ও c-কে **মধ্যপদ** (means) বলা হয়।

'd'-কে **চতুর্থপদ** বা **চতুর্থ সমানুপাত** বলা হয়।

বুঝেছি, 7, 15, 560, 1200-এই চারটি সংখ্যা সমানুপাতে আছে। অর্থাৎ $7 : 15 :: 560 : 1200$; এখানে 7 ও 1200 প্রান্তীয় পদ এবং 15 ও 560 মধ্যপদ। 1200 চতুর্থপদ বা চতুর্থ সমানুপাত।

8 চারটি সংখ্যা a, b, c ও d সমানুপাতে থাকলে, তাদের মধ্যে সম্পর্ক লেখার চেষ্টা করি।

a, b, c ও d সমানুপাতে আছে,

$\therefore a : b :: c : d$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad \therefore ad = bc$

দেখছি, সমানুপাতী চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রান্তীয় পদ দুটির গুণফল অবশ্যই মধ্যপদ দুটির গুণফলের সমান হবে।

বুঝেছি, $7 : 15 :: 560 : 1200$ -এর ক্ষেত্রে,

$7\times1200 = \square = 15\times560$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 23. 2, 3, 4 ও 6 সমানুপাতে আছে কিনা দেখি।

$2\times6 = \square$ এবং $3\times4 = \square$ $\quad \therefore 2 : 3 :: 4 : 6$

প্রয়োগ : 24. 2.5, –2, –5 ও 4 সমানুপাতে আছে কিনা দেখি।

$2.5\times4 = \square$ এবং $(-2)\times(-5) = \square$ $\quad \therefore 2.5 : (-2) :: (-5) : 4$

প্রয়োগ : 25. 2, 7, 12 ও 42 সমানুপাতে আছে কিনা দেখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 26. $-\sqrt{2}$, 6, 1 ও $-\sqrt{18}$ সমানুপাতে আছে কিনা দেখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 27. 5pq, 3q -এর সঙ্গে নীচের কোন জোড়া সংখ্যা সমানুপাতে আছে নির্ণয় করি—

(a) 15pt, 3q (b) 15pt, 9t (c) 15pr, 9t

$$5pq:3q = \frac{5pq}{3q} = \frac{5p}{3} = \frac{5p \times 3t}{3 \times 3t} = \frac{15pt}{9t}$$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 15pt ও 9t.

প্রয়োগ : 28. 2a, 3b, 6ac ও 9bc সমানুপাতী কিনা দেখি।

$2a \times 9bc = \square$ এবং $3b \times 6ac = \square$

পেলাম প্রান্তীয় পদদ্বয়ের গুণফল = মধ্যপদদ্বয়ের গুণফল

∴ 2a, 3b, 6ac ও 9bc সমানুপাতী।

প্রয়োগ : 29. 8x, 5yz, 40qx ও 25qyz সমানুপাতী কিনা দেখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 30. যদি $6 : x :: 2 : 13$ হয়, তবে x -এর মান হিসাব করে লিখি।

$6 : x :: 2 : 13$

$\frac{6}{x} = \frac{2}{13}$

বা, $2x = 6 \times 13$

বা, $x = \frac{78}{2}$ ∴ $x = 39$

প্রয়োগ : 31. যদি $8 : y :: 2 : 21$ হয়, তবে y -এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 32. 6, 9, 12 -এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করি।

মনে করি, চতুর্থ সমানুপাতী x

সুতরাং, $6 : 9 :: 12 : x$

বা, $\frac{6}{9} = \frac{12}{x}$

বা, $6x = 9 \times 12$ ∴ $x = \square$

প্রয়োগ : 33. 5, 4, 25 -এর চতুর্থ সমানুপাতী হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

যে-কোনো চারটি সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে কতগুলি স্বতন্ত্র (আলাদা আলাদা) সমানুপাত গঠন করা যায় দেখি।

ধরি, a, b, c ও d চারটি সমানুপাতী সংখ্যা।

সুতরাং, $a : b :: c : d$ ∴ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ∴ $a : c :: b : d$

(ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ∴ $b : a :: d : c$

(iii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ ∴ $c : a :: d : b$

∴ পেলাম, a, b, c ও d সমানুপাতী হলে, (i) a, c, b, d সমানুপাতী (ii) b, a, d, c সমানুপাতী (iii) c, a, d, b সমানুপাতী

বুঝেছি, 2, 3, 4 ও 6 চারটি সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে যে সকল স্বতন্ত্র সমানুপাত গঠন করা যাবে সেগুলি হলো (i) $2 : 4 :: 3 : 6$ (ii) $3 : 2 :: 6 : 4$ (iii) $4 : 2 :: 6 : 3$

প্রয়োগ : 34. 5, 6, 10 ও 12 চারটি সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে কতগুলি ও কী কী স্বতন্ত্র সমানুপাত গঠন করা যাবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 35. 2, 4, 6 ও 10 -এর প্রত্যেকের সঙ্গে কোন সংখ্যা যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, প্রত্যেকের সঙ্গে x যোগ করতে হবে।

সুতরাং, (2+x), (4+x), (6+x) ও (10+x) সমানুপাতী হবে।

$\therefore (2+x):(4+x)::(6+x):(10+x)$

বা, $\frac{2+x}{4+x}=\frac{6+x}{10+x}$

বা, $(2+x)(10+x)=(6+x)(4+x)$

বা, $20+10x+2x+x^2=24+4x+6x+x^2$

বা, $2x=4 \quad \therefore x=2$

∴ নির্ণেয় সংখ্যা 2.

প্রয়োগ : 36. 12, 22, 42 ও 72 -এর প্রত্যেকের সঙ্গে কোন সংখ্যা যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 37. a, b, c, d -এর প্রত্যেকটির সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, প্রত্যেকের সঙ্গে x যোগ করলে সংখ্যাগুলি সমানুপাতী হবে।

সুতরাং, $(a+x):(b+x)::(c+x):(d+x)$

$\therefore \frac{a+x}{b+x}=\frac{c+x}{d+x}$

বা, $(a+x)(d+x)=(c+x)(b+x)$

বা, $ad+dx+ax+x^2=cb+bx+cx+x^2$

বা, $x(d+a-b-c)=cb-ad \qquad \therefore x=\frac{cb-ad}{a+d-b-c}$ (যখন $a+d\neq b+c$)

∴ প্রত্যেকেটির সঙ্গে $\frac{cb-ad}{a+d-b-c}$ যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে।

প্রয়োগ : 38. 3, 6, 7, 10 -এর প্রত্যেকটির সঙ্গে যেকোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে কিনা বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

শর্মিষ্ঠাদি ক্লাব ঘরের বোর্ডে তিনটি সংখ্যা লিখলেন।

তিনি বোর্ডে লিখলেন 4, 8 ও 16

4, 8 ও 16 তিনটি সংখ্যাকে সমানুপাতে লেখা যাবে কিনা দেখি।

$4:8=1:2$

এবং $8:16=1:2$

∴ লিখতে পারি, $4:8::8:16$

(9) কিন্তু তিনটি রাশি এভাবে সমানুপাতে থাকলে, সেই সমানুপাতকে কী বলা হয়?

সমজাতীয় তিনটি রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয় পদের অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাতের সমান হলে, ওই সমজাতীয় তিনটি রাশিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** বলা হয়।

বুঝেছি, বোর্ডে লেখা 4, 8 ও 16 সংখ্যাগুলি ক্রমিক সমানুপাতী।

10 তিনটি বাস্তব সংখ্যা a, b ও c, ($b\neq0$, $c\neq0$) ক্রমিক সমানুপাতে থাকলে তাদের মধ্যে কী সম্পর্ক পাই হিসাব করে দেখি।

a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতে আছে।

$\therefore a:b::b:c$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

বা, $b^2 = ac$ $\quad \therefore b=\pm\sqrt{ac}$

$\therefore$ পেলাম a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতী হলে $b^2 = ac$ বা $b=\pm\sqrt{ac}$

b ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে যদি a এবং c উভয়েই ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত হয় এবং b ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে যদি a এবং c উভয়েই ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হয়।

a এবং c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে b অসংজ্ঞাত হবে।

11 a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতে থাকলে b-কে কী বলা হয়?

a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতে থাকলে $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ $\quad \therefore b^2 = ac$

এখানে b-কে a ও c -এর **মধ্যসমানুপাতী** (Mean Proportional) এবং c-কে **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third Proportional) বলা হয়।

এভাবে a, b, c, d, e ক্রমিক সমানুপাতী হলে, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}$ হবে।

বুঝেছি, 4, 8 ও 16 তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যার 8 মধ্যসমানুপাতী এবং 16 তৃতীয় সমানুপাতী।

প্রয়োগ : 39. 9 ও 15-এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি।

ধরি, তৃতীয় সমানুপাতী x

$\therefore$ 9, 15 ও x ক্রমিক সমানুপাতী

সুতরাং, $\frac{9}{15}=\frac{15}{x}$

বা, $9x = 15\times15$

বা, $x=\frac{15\times15}{9}$ $\quad \therefore x=$ ☐

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী 25

প্রয়োগ : 40. আমি 3 টাকা ও 12 টাকার তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 41. আমি $2a^2$ ও $3ab$ -এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি।

মনে করি, তৃতীয় সমানুপাতী x

$\therefore$ $2a^2$, $3ab$ ও x ক্রমিক সমানুপাতী

$\therefore \frac{2a^2}{3ab}=\frac{3ab}{x}$

বা, $2a^2x = 3ab\times3ab$

বা, $x=\frac{3ab\times3ab}{2a^2}$

$\therefore x=\frac{9b^2}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী $\frac{9b^2}{2}$

প্রয়োগ : 42. $9pq$, $12pq^2$ -এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 43. $\frac{1}{12}$ ও $\frac{1}{75}$ -এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করি।

ধরি, $\frac{1}{12}$ ও $\frac{1}{75}$ -এর মধ্যসমানুপাতী x

সুতরাং, $\frac{\frac{1}{12}}{x} = \frac{x}{\frac{1}{75}}$ বা, $x^2 = \frac{1}{12} \times \frac{1}{75}$

বা, $x = \sqrt{\frac{1}{12 \times 75}}$

$\therefore x = \frac{1}{30}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যসমানুপাতী $\frac{1}{30}$

প্রয়োগ : 44. 0.5 ও 4.5 -এর মধ্যসমানুপাতী হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 45. তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী ধনাত্মক সংখ্যার প্রান্তীয় পদদুটি $pqr, \frac{pr}{q}$ হলে মধ্যসমানুপাতী হিসাব করে লিখি।

ধরি, মধ্যসমানুপাতী পদটি x

$\therefore pqr, x$ ও $\frac{pr}{q}$ ক্রমিক সমানুপাতী।

সুতরাং, $\frac{pqr}{x} = \frac{x}{\frac{pr}{q}}$

বা, $x^2 = pqr \times \frac{pr}{q} = p^2r^2$

বা, $x = \sqrt{p^2r^2}$

$\therefore x = pr$ ($\because$ প্রান্তীয় পদদুটি ধনাত্মক সংখ্যা)

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যসমানুপাতীটি pr

প্রয়োগ : 46. ধনাত্মক সংখ্যা xy^2 ও xz^2 -এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করি। [নিজে করি]

কষে দেখি 5.2

1. নিম্নলিখিত সমানুপাতে x-এর মান নির্ণয় করি।

   (i) $10 : 35 :: x : 42$ (ii) $x : 50 :: 3 : 2$

2. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুচ্ছগুলির চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করি:

   (i) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ (ii) 9.6 কিগ্রা., 7.6 কিগ্রা., 28.8 কিগ্রা. (iii) x^2y, y^2z, z^2x

   (iv) $(p-q), (p^2-q^2), p^2-pq+q^2$

3. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুচ্ছগুলির তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি :

   (i) 5, 10 (ii) 0.24, 0.6 (iii) p^3q^2, q^2r (iv) $(x-y)^2, (x^2-y^2)^2$

4. নিম্নলিখিত ধনাত্মক সংখ্যাগুচ্ছগুলির মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করি :
   (i) 5 এবং 80 (ii) 8.1 এবং 2.5 (iii) x^3y এবং xy^3 (iv) $(x-y)^2, (x+y)^2$
5. যদি a : b এবং c : d এই অনুপাত দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী সম্পর্ক প্রকাশ করে, তবে তাদের ব্যস্ত অনুপাতগুলি কী সম্পর্ক প্রকাশ করে লিখি।
6. তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে কটি ক্রমিক সমানুপাত গঠন করা যাবে হিসাব করে লিখি।
7. 5 টি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যার প্রথমটি 2 এবং দ্বিতীয়টি 6 হলে, পঞ্চমটি নির্ণয় করি।
8. 6, 15, 20 ও 43-এর প্রত্যেকটির সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি।
9. 23, 30, 57 এবং 78 -এর প্রত্যেকটি থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হবে নির্ণয় করি।
10. p, q, r, s-এর প্রত্যেকটির থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হবে নির্ণয় করি।

শর্মিষ্ঠাদির মতো সাব্বাও ক্লাবঘরের বোর্ডে চারটি সংখ্যা লিখেছে যারা সমানুপাতে আছে।

সাব্বা লিখেছে, 3, 5, 6 ও 10

দেখছি, 3 : 5 : : 6 : 10 অর্থাৎ 3 : 5 = 6 : 10

আবার, 3 : 6 = 1 : 2 = 5 : 10

অর্থাৎ, 3 : 6 : : 5 : 10

পেলাম, 3 : 5 : : 6 : 10 হলে, 3 : 6 : : 5 : 10

12 আমি যে-কোনো চারটি সমানুপাতী অশূন্য বাস্তব সংখ্যা a, b, c ও d বোর্ডে লিখি ও সমানুপাতের কিছু ধর্ম প্রমাণ করি। যদি a, b, c ও d সমানুপাতী হয় তবে **প্রমাণ করি** a, c, b ও d সমানুপাতী হবে।

প্রমাণ : a, b, c ও d সমানুপাতী অর্থাৎ a : b : : c : d

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

উভয়পক্ষকে $\frac{b}{c}$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c}$$

বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\therefore a : c = b : d$

পেলাম, a : b : : c : d হলে, a : c : : b : d হবে।

13 কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

'যে-কোনো সমানুপাতের দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ পরস্পর স্থান বিনিময় করলেও পদ চারটি সমানুপাতী থাকে'— সমানুপাতের এই ধর্মকে **একান্তর প্রক্রিয়া** (Alternendo) বলা হয়।

বুঝেছি, 2 : 3 : : 10 : 15 হলে, 2 : 10 : : 3 : ☐ হবে। **[নিজে করি]**

আবার দেখছি, 3 : 5 : : 6 : 10 হলে, 3 : 6 : : 5 : 10

14 আমি a, b, c, d চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে $a:b::c:d$ হলে $b:a::d:c$ হবে কিনা প্রমাণ করি।

প্রমাণ : $a:b::c:d$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ অর্থাৎ, $ad = bc$

উভয়পক্ষকে ac দিয়ে ভাগ করে পাই,

$ad \div ac = bc \div ac$

বা, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

বা, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

$\therefore b:a::d:c$

$\therefore$ পেলাম, $a:b::c:d$ হলে, $b:a::d:c$ হবে।

15 কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

'যে-কোনো দুটি অনুপাত সমান হলে তাদের বিপরীত বা ব্যস্ত অনুপাত দুটিও সমান হবে'। সমানুপাতের এই ধর্মকে **বিপরীত বা ব্যস্ত প্রক্রিয়া (Invertendo)** বলা হয়।

বুঝেছি, $6:10::9:15$ হলে $10:6::\square:\square$ **[নিজে লিখি]**

আমাদের বন্ধু বিভাস এক মজার কাণ্ড করল। সে সাব্বার লেখা 3, 5, 6 ও 10 এই চারটি সমানুপাতী সংখ্যার সাহায্যে অন্যরকম সমানুপাত তৈরি করল।

সে করল, $(3+5):5=(6+10):10$

16 $a:b::c:d$ হলে $a+b:b::c+d:d$ -হবে কিনা প্রমাণ করি।

প্রমাণ : $a:b::c:d$ অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে পাই]

বা, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$\therefore (a+b):b::(c+d):d$

পেলাম, a, b, c ও d চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে $a:b::c:d$ হলে, $(a+b):b::(c+d):d$ হবে।

17 সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

সমানুপাতের এই ধর্মকে **যোগ প্রক্রিয়া (Componendo)** বলা হয়।

বুঝেছি, $4:5::8:10$ হলে, সমানুপাতের যোগপ্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই, $(4+5):5=\square:10$ **[নিজে লিখি]**

18 কিন্তু $a:b::c:d$ হলে $a-b:b$ ও $c-d:d$ সমানুপাত হবে কিনা প্রমাণ করি।

প্রমাণ : $a:b::c:d$ অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে পাই]

বা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$\therefore (a-b):b::(c-d):d$

$\therefore$ পেলাম, $a:b::c:d$ হলে, $(a-b):b::(c-d):d$ হবে।

(19) সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

a, b, c, d চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে $a:b::c:d$ হলে, $(a-b):b::(c-d):d$ হবে। সমানুপাতের এই ধর্মকে **ভাগ প্রক্রিয়া** (Dividendo) বলা হয়।

বুঝেছি, $5:4=10:8$ হলে সমানুপাতের ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই, $(5-4):4=\square:8$ **[নিজে যাচাই করে লিখি]**

প্রয়োগ : 47. আমি সমানুপাতের যোগ প্রক্রিয়া ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা প্রমাণ করি যে $a:b::c:d$ হলে, $(a+b):(a-b)::(c+d):(c-d)$ হবে।

প্রমাণ : $a:b::c:d$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ [যোগ প্রক্রিয়া থেকে পাই]

আবার, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ [ভাগ প্রক্রিয়া থেকে পাই]

সুতরাং, $\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$

বা, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\therefore (a+b):(a-b)::(c+d):(c-d)$

বিকল্প প্রমাণ :

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\ (k\neq 0)$

$\therefore a=bk$ এবং $c=dk$

$\because \frac{a+b}{a-b}=\frac{bk+b}{bk-b}=\frac{b(k+1)}{b(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$

আবার, $\frac{c+d}{c-d}=\frac{dk+d}{dk-d}=\frac{d(k+1)}{d(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$

$\therefore (a+b):(a-b)::(c+d):(c-d)$

$\therefore$ পেলাম, $a:b::c:d$ হলে, $(a+b):(a-b)::(c+d):(c-d)$ হবে।

(20) কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

'$a:b::c:d$ হলে, $(a+b):(a-b)::(c+d):(c-d)$ হবে'। সমানুপাতের এই ধর্মকে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া (Componendo and Dividendo) বলা হয়।

প্রয়োগ : 48. আমি 7:3::14:6 সমানুপাতের সংখ্যাগুলি নিয়ে সমানুপাতের যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া করি।

$7:3=14:6\quad \therefore (7+3):(7-3)=10:4=5:2$

আবার, $(14+6):(14-6)=20:8=5:2$

$\therefore (7+3):(7-3)::(14+6):(14-6)$

প্রয়োগ : 49. $5:4::10:8$ হলে সমানুপাতের যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই, $(5+4):(5-4)::(10+8):\square$ [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 50. $a:b::c:d$ হলে, প্রমাণ করি যে $(a^2+b^2):(a^2-b^2)::(c^2+d^2):(c^2-d^2)$

$a:b::c:d$ অর্থাৎ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$ [বর্গ করে পাই]

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$ [সমানুপাতের যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$\therefore (a^2+b^2):(a^2-b^2)::(c^2+d^2):(c^2-d^2)$

বিকল্প প্রমাণ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ধরি, $(k\neq 0)$ $\therefore a=bk$ এবং $c=dk$

বামপক্ষ $=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(bk)^2+b^2}{(bk)^2-b^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{b^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

ডানপক্ষ $=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}=\frac{(dk)^2+d^2}{(dk)^2-d^2}=\frac{d^2(k^2+1)}{d^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$ $\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 51. যদি $a:b::c:d$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে $(4a+7b):(4a-7b)::(4c+7d):(4c-7d)$ [নিজে করি]

তুষার বোর্ডে অনেকগুলি অনুপাত লিখল।

তুষার লিখল, $2:5, 6:15, 16:40, 24:60$

দেখছি, $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{16}{40}=\frac{24}{60}$

21 আমি তুষারের লেখা অনুপাতগুলির পূর্ব পদগুলির যোগফলকে পূর্বপদ ও উত্তরপদগুলির যোগফলকে উত্তরপদ ধরে অনুপাত তৈরি করি ও কী পাই দেখি।

$$\frac{2+6+16+24}{5+15+40+60}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$$

$\therefore$ পেলাম, $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{16}{40}=\frac{24}{60}=\frac{2+6+16+24}{5+15+40+60}$

22 $a:b=c:d=e:f$ হলে প্রতিটি অনুপাত $(a+c+e):(b+d+f)$-এর সমান হবে কিনা প্রমাণ করে দেখি।

প্রমাণ, $a:b=c:d=e:f$

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ (যেখানে, $k\neq 0$)

$\therefore a=bk, c=dk$ এবং $e=fk$

$\therefore \frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{bk+dk+fk}{b+d+f}=\frac{k(b+d+f)}{b+d+f}=k$

$\therefore$ পেলাম, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

$\therefore$ সাধারণভাবে লিখতে পারি, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}$

23 কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}$ —— সমানুপাতের এই ধর্মকে সংযোজন প্রক্রিয়া (Addendo) বলা হয়।

24 $a:b=c:d=e:f$ হলে, প্রতিটি অনুপাত (i) $(a+c-e):(b+d-f)$ (ii) $(a-c+e):(b-d+f)$ (iii) $(a-c-e):(b-d-f)$-এদের প্রত্যেকটির সঙ্গে সমান হবে কিনা দেখি।

(i) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ (যেখানে, $k\neq0$) $\therefore a=bk, c=dk, e=fk$

$$\frac{a+c-e}{b+d-f}=\frac{bk+dk-fk}{b+d-f}=\frac{k(b+d-f)}{(b+d-f)}=k \quad \therefore a:b=c:d=e:f=(a+c-e):(b+d-f)$$

(ii) $$\frac{a-c+e}{b-d+f}=\frac{bk-dk+fk}{b-d+f}=\frac{k(b-d+f)}{(b-d+f)}=k \quad \therefore a:b=c:d=e:f=(a-c+e):(b-d+f)$$

(iii) $$\frac{a-c-e}{b-d-f}=\frac{bk-dk-fk}{b-d-f}=\frac{k(b-d-f)}{(b-d-f)}=k \quad \therefore a:b=c:d=e:f=(a-c-e):(b-d-f)$$

25 '$a:b=c:d=e:f$ হলে প্রত্যেক অনুপাত $\frac{am+cn+ep}{bm+dn+fp}$ -এর সমান হবে [m, n, p যে-কোনো অশূন্য সংখ্যা]' প্রমাণ করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :52. সমানুপাতের সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে লিখতে পারি, $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{2+6+8}{\square+\square+\square}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 53. $a:b=c:d$ হলে, প্রমাণ করি যে $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$

$a:b=c:d$ বা, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a^2}{ab}=\frac{c^2}{cd}=\frac{a^2+c^2}{ab+cd}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

আবার, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{ab}{b^2}=\frac{cd}{d^2}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

সুতরাং, $\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$

$\therefore (a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$ **[প্রমাণিত]**

বিকল্প প্রমাণ

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ $(k\neq0)$

$\therefore a=bk, c=dk$

$\therefore$ বামপক্ষ $=(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(b^2k^2+d^2k^2)(b^2+d^2)=k^2(b^2+d^2)^2$

ডানপক্ষ $=(ab+cd)^2=(bk\times b+dk\times d)^2=(b^2k+d^2k)^2=k^2(b^2+d^2)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 54. $x:a=y:b=z:c$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{3xyz}{abc}$

ধরি, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ (যেখানে, $k\neq0$)

$\therefore x=ak, y=bk$ এবং $z=ck$

বামপক্ষ $=\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{a^3k^3}{a^3}+\frac{b^3k^3}{b^3}+\frac{c^3k^3}{c^3}=k^3+k^3+k^3=3k^3$

ডানপক্ষ $=\frac{3xyz}{abc}=\frac{3\times ak\times bk\times ck}{abc}=3k^3$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 55. $a:b=b:c$ হলে, দেখাই যে, $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ (যেখানে, $k\neq 0$)

$\therefore a=bk,\ b=ck$

সুতরাং, $a=ck\times k=ck^2$

বামপক্ষ $=(a+b+c)(a-b+c)$
$=(ck^2+ck+c)(ck^2-ck+c)$
$=c(k^2+k+1)\times c(k^2-k+1)$
$=c^2(k^2+k+1)(k^2-k+1)$

ডানপক্ষ $=a^2+b^2+c^2$
$=(ck^2)^2+(ck)^2+c^2$
$=c^2k^4+c^2k^2+c^2$
$=c^2(k^4+k^2+1)$
$=c^2[k^4+2k^2+1-k^2]$
$=c^2[(k^2+1)^2-(k)^2]$
$=c^2(k^2+1+k)(k^2+1-k)$
$=c^2(k^2+k+1)(k^2-k+1)$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 56. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হলে, দেখাই যে $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(b^2-c^2)^2$

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ ধরি, (যেখানে, $k\neq 0$)

সুতরাং, $a=bk,\ b=ck,\ c=dk$

$\therefore b=dk\times k=dk^2$ এবং $a=dk^2\times k=dk^3$

বামপক্ষ $=(a^2-b^2)(c^2-d^2)$
$=\{(dk^3)^2-(dk^2)^2\}\{(dk)^2-d^2\}$
$=\{d^2k^6-d^2k^4\}\{d^2k^2-d^2\}$
$=d^2k^4(k^2-1)\times d^2(k^2-1)$
$=d^4k^4(k^2-1)^2$

ডানপক্ষ $=(b^2-c^2)^2$
$=\{(dk^2)^2-(dk)^2\}^2$
$=\{d^2k^4-d^2k^2\}^2$
$=\{d^2k^2(k^2-1)\}^2$
$=d^4k^4(k^2-1)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 57. যদি $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

$\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$

$\therefore \frac{c(ay-bx)}{c^2}=\frac{b(cx-az)}{b^2}=\frac{a(bz-cy)}{a^2}$

$=\frac{c(ay-bx)+b(cx-az)+a(bz-cy)}{c^2+b^2+a^2}=\frac{cay-cbx+bcx-baz+abz-acy}{c^2+b^2+a^2}=0$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

সুতরাং, $\frac{ay-bx}{c}=0$ বা, $ay-bx=0$

বা, $ay=bx$ $\therefore \frac{y}{b}=\frac{x}{a}$

আবার, $\frac{cx-az}{b}=0$ বা, $cx=az$ $\therefore \frac{x}{a}=\frac{z}{c}$

$\therefore \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ [প্রমাণিত]

বিকল্প প্রমাণ

ধরি, $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a} = k$ [যেখানে $k \neq 0$]

$\because ay-bx = ck, cx-az = bk$ এবং $bz-cy = ak$

$ay-bx = ck$ ______ (i) $\quad cx-az = bk$ ______ (ii)

(i) নং সমীকরণকে c দ্বারা ও (ii) নং সমীকরণকে b দ্বারা গুণ করি এবং তারপর তাদের যোগ করি।

$acy - bcx = c^2k$

$bcx - abz = b^2k$

$a(cy-bz) = k(b^2+c^2)$

বা, $cy-bz = \frac{k}{a}(b^2+c^2)$

বা, $-ak = \frac{k}{a}(b^2+c^2)$ $[\because bz-cy = ak]$

বা, $-a^2k = kb^2+kc^2$

বা, $k(a^2+b^2+c^2) = 0 \quad \therefore k = 0 \quad [\because a^2+b^2+c^2 \neq 0]$

সুতরাং, $\frac{ay-bx}{c} = 0$ বা, $ay-bx = 0$ বা, $ay = bx$ $\therefore \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

আবার, $\frac{cx-az}{b} = 0$ বা, $cx-az = 0$ বা, $cx = az$ $\therefore \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ $\quad \therefore \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 58. যদি $\frac{x}{a+b-c} = \frac{y}{b+c-a} = \frac{z}{c+a-b}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে প্রতিটি অনুপাত $= \frac{x+y+z}{a+b+c}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 59. যদি $\frac{bz+cy}{a} = \frac{cx+az}{b} = \frac{ay+bx}{c}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে,

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$$

$$\frac{bz+cy}{a} = \frac{cx+az}{b} = \frac{ay+bx}{c}$$

বা, $\frac{abz+acy}{a^2} = \frac{bcx+baz}{b^2} = \frac{cay+cbx}{c^2}$

$= \frac{(bcx+baz)+(cay+cbx)-(abz+acy)}{b^2+c^2-a^2} = \frac{2bcx}{b^2+c^2-a^2}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

আবার একই ভাবে পাই,

প্রতিটি অনুপাত $= \frac{(abz+acy)+(acy+bcx)-(bcx+baz)}{a^2+c^2-b^2} = \frac{2acy}{c^2+a^2-b^2}$

এবং প্রতিটি অনুপাত $= \frac{(abz+acy)+(bcx+abz)-(acy+bcx)}{a^2+b^2-c^2} = \frac{2abz}{a^2+b^2-c^2}$

$\therefore \frac{2bcx}{b^2+c^2-a^2} = \frac{2acy}{c^2+a^2-b^2} = \frac{2abz}{a^2+b^2-c^2}$ বা, $\frac{2abcx}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{2abcy}{b(c^2+a^2-b^2)} = \frac{2abcz}{c(a^2+b^2-c^2)}$

$\therefore \frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$ [প্রত্যেকটিকে 2abc দ্বারা ভাগ করে পাই]

প্রয়োগ : 60. $x = \frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$ [প্রদত্ত $a \neq 0$, $b \neq 0$ এবং $a \neq b$]

$x = \frac{4ab}{a+b}$ বা, $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$ [উভয়পক্ষকে 2a দ্বারা ভাগ করে পাই]

সুতরাং, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$= \frac{a+3b}{b-a}$

আবার, $x = \frac{4ab}{a+b}$ বা, $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$ [উভয়পক্ষকে 2b দ্বারা ভাগ করে পাই]

সুতরাং, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$= \frac{3a+b}{a-b}$

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b} = \frac{3b+a}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a} = \frac{3b+a-3a-b}{b-a} = \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$

প্রয়োগ : 61. $\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c \neq 0$ হলে, প্রমাণ করি যে $a=b=c$

$\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$

বা, $1 - \frac{c}{a+b} = 1 - \frac{a}{b+c} = 1 - \frac{b}{c+a}$

বা, $\frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}$ [প্রতিটি সংখ্যামালাকে 1 থেকে বিয়োগ করে পাই]

বা, $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}$ [বিপরীত প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে পাই]

বা, $\frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{a+c+b}{b}$ [প্রতিটি অনুপাতে 1 যোগ করে পাই]

বা, $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ [যেহেতু $a+b+c \neq 0$, সুতরাং, $a+b+c$ দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore a = b = c$ [বিপরীত প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে পাই] **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 62. $\frac{bz-cy}{b-c} = \frac{cx-az}{c-a}$ হলে, দেখাই যে, প্রত্যেকটি অনুপাত $\frac{ay-bx}{a-b}$ -এর সমান।

$\frac{bz-cy}{b-c} = \frac{cx-az}{c-a}$

$\frac{ay-bx}{a-b}$ অনুপাতে z না থাকায় z অপসারণের জন্যে প্রথম অনুপাতের উভয় পদকে a এবং দ্বিতীয় অনুপাতের উভয় পদকে b দ্বারা গুণ করে পাই,

$\frac{abz-acy}{ab-ac} = \frac{bcx-abz}{bc-ba} = \frac{abz-acy+bcx-abz}{ab-ac+bc-ba}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$= \frac{-acy+bcx}{-ac+bc} = \frac{-c(ay-bx)}{-c(a-b)} = \frac{ay-bx}{a-b}$

$\therefore \frac{bz-cy}{b-c} = \frac{cx-az}{c-a} = \frac{ay-bx}{a-b}$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 63. যদি $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{1}{2}$ অথবা (-1) -এর সমান।

ধরি, $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=k$ (যেখানে, $k\neq 0$)

সুতরাং, $x=k(y+z)$, $y=k(z+x)$ এবং $z=k(x+y)$

এখন, $x+y+z=k(y+z)+k(z+x)+k(x+y)$

বা, $x+y+z=k(y+z+z+x+x+y)$

বা, $x+y+z=2k(x+y+z)$

বা, $(x+y+z)-2k(x+y+z)=0$

বা, $(x+y+z)(1-2k)=0$

হয়, $x+y+z=0$

অথবা, $1-2k=0$

বা, $-2k=-1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{1}{2}$

আবার, $x+y+z=0$ হলে, $y+z=-x$

$\therefore \frac{x}{y+z}=\frac{x}{-x}=-1$

আবার, $z+x=-y$; সুতরাং, $\frac{y}{z+x}=\frac{y}{-y}=-1$ এবং $x+y=-z$; সুতরাং, $\frac{z}{x+y}=\frac{z}{-z}=-1$

$\therefore \frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ হলে প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{1}{2}$ অথবা (-1) -এর সমান।

প্রয়োগ : 64. যদি $\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$ হয়, (যেখানে $a+b+c\neq 0$) তবে দেখাই যে, $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$

$$\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$$

বা, $\frac{2b}{2(a+b)}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{2(a+b+c)}{2(2a+b+2c)}=\frac{2b+a+c-b+2a+2b+2c}{2a+2b+b+c-a+4a+2b+4c}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$$=\frac{3(a+b+c)}{5(a+b+c)}=\frac{3}{5} \quad (\because a+b+c\neq 0)$$

সুতরাং, $\frac{b}{a+b}=\frac{3}{5}$ বা, $5b=3a+3b$

বা, $2b=3a$ $\quad\therefore \frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ ——— (i)

আবার, $\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{3}{5}$

বা, $5(a+c-b)=3(b+c-a)$

বা, $5a+5c-5b=3b+3c-3a$

বা, $8a-8b=-2c$

বা, $8a-12a=-2c$ [$\because 2b=3a$]

বা, $-4a=-2c$ $\quad\therefore \frac{a}{2}=\frac{c}{4}$ ——— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 65. যদি $\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b-c}{x+y-z}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

$\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b-c}{x+y-z}=\frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{y+z-x+z+x-y+x+y-z}$ [সংযোগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{a+b+c}{x+y+z}$

সুতরাং, $\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(b+c-a)}{(x+y+z)-(y+z-x)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2a}{2x}=\frac{a}{x}$

অনুরূপে, $\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(c+a-b)}{(x+y+z)-(z+x-y)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2b}{2y}=\frac{b}{y}$

এবং $\frac{a+b-c}{x+y-z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(a+b-c)}{(x+y+z)-(x+y-z)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2c}{2z}=\frac{c}{z}$

$\therefore \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 66. যদি $(4a+5b)(4c-5d)=(4a-5b)(4c+5d)$ হয়, প্রমাণ করি যে a, b, c ও d সমানুপাতে আছে। [নিজে করি]

কষে দেখি 5.3

1. $a:b=c:d$ হলে, দেখাই যে,

   (i) $(a^2+b^2):(a^2-b^2)=(ac+bd):(ac-bd)$

   (ii) $(a^2+ab+b^2):(a^2-ab+b^2)=(c^2+cd+d^2):(c^2-cd+d^2)$

   (iii) $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=(pa+qc):(pb+qd)$

2. $x:a=y:b=z:c$ হলে, প্রমাণ করি যে,

   (i) $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$ (ii) $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}$

   (iii) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

3. $a:b=c:d=e:f$ হলে, প্রমাণ করি যে,

   (i) প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{5a-7c-13e}{5b-7d-13f}$ (ii) $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2$

4. যদি $a:b=b:c$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে,

   (i) $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (ii) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$ (iii) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}=1$

5. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হলে, প্রমাণ করি যে,

   (i) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$ (ii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$

6. (i) যদি $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}$ হয়, তবে দেখাই যে, $(m^2+n^2)(a^2+b^2)=(am+bn)^2$

(ii) যদি $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ হয়, তবে দেখাই যে, $(a+b)(a^2+b^2)x^3=(x+y)(x^2+y^2)a^3$

(iii) যদি $\frac{x}{\ell m-n^2}=\frac{y}{mn-\ell^2}=\frac{z}{n\ell-m^2}$ হয়, তবে দেখাই যে, $\ell x+my+nz=0$

(iv) $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ হলে, দেখাই যে, $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

(v) $\frac{x}{y}=\frac{a+2}{a-2}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{4a}{a^2+4}$

(vi) $x=\frac{8ab}{a+b}$ হলে, $\left(\frac{x+4a}{x-4a}+\frac{x+4b}{x-4b}\right)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

7. (i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{a+b+c}{c}=2$

(ii) $\frac{a}{q-r}=\frac{b}{r-p}=\frac{c}{p-q}$ হলে, দেখাই যে, $a+b+c=0=pa+qb+rc$

(iii) $\frac{ax+by}{a}=\frac{bx-ay}{b}$ হলে, দেখাই যে প্রতিটি অনুপাত x-এর সমান।

8. (i) যদি $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $c=a$ অথবা $a+b+c+d=0$

(ii) যদি $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হয়, দেখাই যে, $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$

(iii) $\frac{x+y}{3a-b}=\frac{y+z}{3b-c}=\frac{z+x}{3c-a}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$

(iv) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2-yz}{a^2-bc}=\frac{y^2-zx}{b^2-ca}=\frac{z^2-xy}{c^2-ab}$

9. (i) যদি $\frac{3x+4y}{3u+4v}=\frac{3x-4y}{3u-4v}$ হয়, তবে দেখাই যে $\frac{x}{y}=\frac{u}{v}$

(ii) $(a+b+c+d):(a+b-c-d)=(a-b+c-d):(a-b-c+d)$ হলে, প্রমাণ করি যে, $a:b=c:d$

10. (i) $\frac{a^2}{b+c}=\frac{b^2}{c+a}=\frac{c^2}{a+b}=1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$

(ii) $x^2:(by+cz)=y^2:(cz+ax)=z^2:(ax+by)=1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+y}+\frac{c}{c+z}=1$

11. (i) $\frac{x}{xa+yb+zc}=\frac{y}{ya+zb+xc}=\frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z\neq 0$ হলে, দেখাই যে, প্রতিটি অনুপাত $\frac{1}{a+b+c}$ -এর সমান।

(ii) $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$ হলে, প্রমাণ করি যে, $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$

(iii) $\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$ হলে, প্রমাণ করি যে, $\frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$

12. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) 3, 4 এবং 6-এর চতুর্থ সমানুপাতী (a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 24

(ii) 8 এবং 12-এর তৃতীয় সমানুপাতী (a) 12 (b) 16 (c) 18 (d) 20

(iii) 16 এবং 25-এর মধ্য সমানুপাতী (a) 400 (b) 100 (c) 20 (d) 40

(iv) a একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং $a:\frac{27}{64}=\frac{3}{4}:a$ হলে, a -এর মান

(a) $\frac{81}{256}$ (b) 9 (c) $\frac{9}{16}$ (d) $\frac{16}{9}$

(v) $2a=3b=4c$ হলে, $a:b:c$ হবে (a) 3:4:6 (b) 4:3:6 (c) 3:6:4 (d) 6:4:3

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $ab:c^2$, $bc:a^2$ এবং $ca:b^2$ -এর যৌগিক অনুপাত 1 : 1

(ii) x^3y, x^2y^2 এবং xy^3 ক্রমিক সমানুপাতী।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী ধনাত্মক সংখ্যার গুণফল 64 হলে, তাদের মধ্যসমানুপাতী ________

(ii) $a:2=b:5=c:8$ হলে a-এর 50% = b-এর 20% = c-এর ________ %

(iii) $(x+2)$ এবং $(x-3)$ এর মধ্য সমানুপাতী x হলে, x-এর মান ________

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{2a-3b+4c}{p}$ হলে, p-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $\frac{3x-5y}{3x+5y}=\frac{1}{2}$ হলে, $\frac{3x^2-5y^2}{3x^2+5y^2}$ -এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $a:b=3:4$ এবং $x:y=5:7$ হলে, $(3ax-by):(4by-7ax)$ কত নির্ণয় করি।

(iv) x, 12, y, 27 ক্রমিক সমানুপাতী হলে, x ও y-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় করি।

(v) $a:b=3:2$ এবং $b:c=3:2$ হলে, $a+b:b+c$ কত নির্ণয় করি।

6 চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস

COMPOUND INTEREST AND UNIFORM RATE OF INCREASE OR DECREASE

আমাদের পাড়ার বাপ্পাদা সাইকেল কেনার জন্য পাড়ার সমবায় ব্যাংক থেকে বার্ষিক 8% সুদে 1200 টাকা 2 বছরের জন্য ধার করেছেন।

1 হিসাব করে দেখি 2 বছর পরে বাপ্পাদাকে মোট কত টাকা ফেরত দিতে হবে?

2 বছরের সুদ $= \frac{1200 \times 8 \times 2}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

∴ 2 বছর পরে বাপ্পাদাকে মোট (1200 + 192) টাকা = 1392 টাকা ফেরত দিতে হবে।

কিন্তু 2 বছর পরে বাপ্পাদাকে মোট 1399.68 টাকা ফেরত দিতে হলো।

2 এমন হলো কেন? অর্থাৎ 2 বছরে সুদ-আসলে কীভাবে মোট টাকার পরিমাণ 1392 টাকার চেয়ে বেশি হলো হিসাব করে দেখি।

ওই সমবায় ব্যাংক বাপ্পাদাদাকে 1200 টাকা 2 বছরের জন্য বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদে (Compound interest) ধার দিয়েছিলেন।

3 চক্রবৃদ্ধি সুদ কী?

বাস্তবে সুদ দুই ধরনের হয়ে থাকে — (i) সরল সুদ (ii) চক্রবৃদ্ধি সুদ।

সরল সুদ : কেবল আসল বা মূলধনের উপর সুদ ধার্য হলে তাকে সরল সুদ বলা হয়। [Simple Interest]

চক্রবৃদ্ধি সুদ : কোনো নির্দিষ্ট সময় শেষে অর্জিত সুদ মূলধন বা আসলের সঙ্গে যুক্ত করে ওই সুদ-আসল বা সবৃদ্ধিমূলকে পরবর্তী নির্দিষ্ট সময়ের জন্য নতুন আসল বা মূলধন হিসাবে গণ্য করে পুনরায় যখন সুদ হিসাব করা হয় তখন সেই সুদকে চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) বলা হয়।

4 চক্রবৃদ্ধি সুদ কত সময়ের শেষে প্রাপ্য হবে কীভাবে জানব?

যে সময়ের শেষে চক্রবৃদ্ধি সুদ প্রাপ্য হবে তাকে চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব (Interest Period of Compound interest) বলে। চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব সাধারণত 3 মাস, 6 মাস, 1 বছর হয়ে থাকে। চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে কোনো পর্বের উল্লেখ না থাকলে চক্রবৃদ্ধি সুদ বছরের শেষে দেয় বলে ধরা হয়ে থাকে অর্থাৎ সাধারণত সুদের পর্ব 1 বছর ধরা হয়।

5 সমূল চক্রবৃদ্ধি কী?

আসল বা মূলধন এবং কোনো নির্দিষ্ট সময়ের চক্রবৃদ্ধি সুদের সমষ্টিকে সমূল চক্রবৃদ্ধি বলা হয়।

বাপ্পাদার, প্রথম বছরের আসল = 1200 টাকা

প্রথম বছরের সুদ $= (1200 \times \frac{8}{100})$ টাকা = 96 টাকা

দ্বিতীয় বছরের আসল = (1200 + 96) টাকা = 1296 টাকা

∴ দ্বিতীয় বছরের সুদ $= (1296 \times \frac{8}{100})$ টাকা = 103.68 টাকা

∴ দ্বিতীয় বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = (1296 + 103.68) টাকা = 1399.68 টাকা

∴ চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে আসল বা মূলধন সবসময় এক থাকে না এবং প্রত্যেক সুদ পর্বের শেষে আসল বা মূলধন পরিবর্তিত হয়।

প্রয়োগ : 1. আমি যদি বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদে 1400 টাকা 2বছরের জন্য ধার নিই, তবে কত টাকা চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমূল চক্রবৃদ্ধি দেবো হিসাব করে লিখি।

ধরি, প্রথম বছরের আসল = 100.00 টাকা

প্রথম বছরের 5% সুদ = 5.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের আসল = 105.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ = 5.25 টাকা $[105 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

---

2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 110.25 টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (110.25 – 100.00) টাকা অথবা (5.00 + 5.25) টাকা = 10.25 টাকা

এখন গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকায়)
100	10.25
1400	?

100 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ 10.25 টাকা

1 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{10.25}{100}$ টাকা

1400 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{10.25 \times 1400}{100} = \square$ টাকা

($\because$ আসল ও চক্রবৃদ্ধি সুদের মধ্যে $\square$ সম্পর্ক [সরল/ব্যস্ত] আছে)

$\therefore$ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ 143.50 টাকা এবং সমূল চক্রবৃদ্ধি (1400 + 143.50) টাকা $= \square$ টাকা

বিকল্প পদ্ধতি, প্রথম বছরের আসল = 1400.00 টাকা

প্রথম বছরের সুদ = 70.00 টাকা $[\because 1400 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

দ্বিতীয় বছরের মূলধন = 1470.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের সুদ = 73.50 টাকা $[\because 1470 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

---

2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 1543.50 টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (1543.50 – 1400.00) টাকা
অথবা (70.00 + 73.50) টাকা = 143.50 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করে কী পাই দেখি

মনে করি আসল = p টাকা, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার = r%

$\therefore$ প্রথম বছরের শেষে সুদ = $\frac{p \times r \times 1}{100}$ টাকা

প্রথম বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p + \frac{pr}{100} = p\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ টাকা

দ্বিতীয় বছরের মূলধন = $p\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে সুদ = $\left\{\dfrac{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)\times r\times 1}{100}\right\}$ টাকা

দ্বিতীয় বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left\{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)+\dfrac{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)\times r\times 1}{100}\right\}$ টাকা

$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)\left\{1+\frac{r}{100}\right\}$ টাকা

$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ টাকা

$\therefore$ পেলাম 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ টাকা ------------------- (I)

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\left\{p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 - p\right\}$ টাকা

$= p\left\{1^2+\left(2\times1\times\frac{r}{100}\right)+\left(\frac{r}{100}\right)^2-1^2\right\}$ টাকা

$= p\frac{r}{100}\left(2+\frac{r}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ p = 1400 টাকা, r = 5 হলে,

(I) থেকে পাই, 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $1400\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$ টাকা

$= 1400\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (1543.50 – 1400.00) টাকা = 143.50 টাকা

প্রয়োগ :2. মূলধন p এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার r% হলে 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে হিসাব করি।

(I) থেকে পেলাম, তৃতীয় বছরের মূলধন = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

$\therefore$ 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$

$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$

$\therefore$ 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$ ------------------- (II)

$\therefore$ n বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$
যেখানে, p = মূলধন, r = শতকরা বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার এবং n = সময় (বছরে)

প্রয়োগ :3. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 1000 টাকার 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :4. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 4000 টাকা একটি ব্যাংকে থাকলে, 3 বছর পর চক্রবৃদ্ধি সুদ কত পাব হিসাব করে লিখি।

ধরি প্রথম বছরের মূলধন = 4000.00 টাকা

প্রথম বছরের 5% সুদ = 200.00 টাকা ($\because 4000 \times \frac{5}{100}$ টাকা)

দ্বিতীয় বছরের আসল = 4200.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ = 210.00 টাকা ($\because 4200 \times \frac{5}{100}$ টাকা)

তৃতীয় বছরের আসল = 4410.00 টাকা

তৃতীয় বছরের 5% সুদ = 220.50 টাকা ($4410 \times \frac{5}{100}$ টাকা)

3 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 4630.50 টাকা

$\therefore$ 3 বছর পর চক্রবৃদ্ধি সুদ পাব = 4630.50 টাকা – 4000 টাকা

= 630.50 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

ধরি, p = 4000 টাকা, r = 5 এবং n = 3 বছর,

(II) থেকে পেলাম, 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ টাকা

$= 4000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ টাকা

$= 4000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ টাকা

= ☐ টাকা

3 বছর পরে চক্রবৃদ্ধি সুদ পাব = (4630.50 – 4000) টাকা = ☐ টাকা

প্রয়োগ : 5. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 10,000 টাকার 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 6. যদি 6 মাস অন্তর সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত হয় তাহলে বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 8000 টাকার $1\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি ও চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।

প্রথম 6 মাসের আসল = 8000 টাকা

প্রথম 6 মাস বা $\frac{1}{2}$ বছরের 10% সুদ = 400 টাকা ($\because 8000 \times \frac{10}{100} \times \frac{1}{2}$ টাকা)

দ্বিতীয় 6 মাসে আসল = 8400 টাকা

দ্বিতীয় 6 মাসে 10% সুদ = 420 টাকা ($\because 8400 \times \frac{10}{100} \times \frac{1}{2}$ টাকা)

তৃতীয় 6 মাসে আসল = 8820 টাকা

তৃতীয় 6 মাসে 10% সুদ = 441 টাকা ($\because 8820 \times \frac{10}{100} \times \frac{1}{2}$ টাকা)

$\therefore 1\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 9261 টাকা

$\therefore 1\frac{1}{2}$ বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ = (9261 টাকা – 8000 টাকা) = 1261 টাকা

অন্যভাবে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, মূলধন = p টাকা, বার্ষিক সুদের হার = r%

$\therefore$ প্রথম 6 মাস বা $\frac{1}{2}$ বছরের শেষে সুদ = $\dfrac{p \times r \times \frac{1}{2}}{100}$ টাকা

$\therefore$ প্রথম 6 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left(p + \dfrac{p \times \frac{r}{2}}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1 + \dfrac{\frac{r}{2}}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় 6 মাসে মূলধন = $p\left(1 + \dfrac{\frac{r}{2}}{100}\right)$ টাকা

দ্বিতীয় 6 মাসের শেষে সুদ = $\dfrac{p\left(1 + \dfrac{\frac{r}{2}}{100}\right) \times r \times \frac{1}{2}}{100}$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় 6 মাস বা 1 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1 + \dfrac{\frac{r}{2}}{100}\right)^2$ টাকা = $p\left(1 + \dfrac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2\times1}$

একইভাবে, তৃতীয় 6 মাসে বা $1\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1 + \dfrac{\frac{r}{2}}{100}\right)^3$ টাকা = $p\left(1 + \dfrac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2\times\frac{3}{2}}$ টাকা

বুঝেছি, বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে অর্জিত সুদ যাণ্মাসিক বা বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব 2 হলে n বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1 + \dfrac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2n}$ ------------------- (III)

ধরি, p = 8000 টাকা r = 10, n = $1\frac{1}{2}$ বছর = $\frac{3}{2}$ বছর

$\therefore$ (III থেকে পেলাম), $1\frac{1}{2}$ বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $8000\left(1 + \dfrac{\frac{10}{2}}{100}\right)^{\frac{3}{2}\times2}$ টাকা = $8000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ টাকা

$= 8000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = \square$ টাকা

$\therefore$ $1\frac{1}{2}$ বছরের নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\square$ টাকা **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :7. 6 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 1000 টাকার 1 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :8. 3 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 10000 টাকার 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।

প্রথম 3 মাসে আসল $= 10000.00$ টাকা

প্রথম 3 মাস বা $\frac{1}{4}$ বছরের 8% সুদ $= 200.00$ টাকা $[\because 10000 \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4}$ টাকা$]$

দ্বিতীয় 3 মাসে আসল $= 10200.00$ টাকা

দ্বিতীয় 3 মাসের 8% সুদ $= 204.00$ টাকা $[\because 10200 \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4}$ টাকা$]$

তৃতীয় 3 মাসে আসল $= 10404.00$ টাকা

তৃতীয় 3 মাসের 8% সুদ $= 208.08$ টাকা $[\because 10404 \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4}$ টাকা$]$

$\therefore$ 9 মাসের সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 10612.08$ টাকা

$\therefore$ 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ $= 10612.08$ টাকা $- 10000.00$ টাকা $= 612.08$ টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

ধরি, মূলধন $= p$ টাকা, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার $= r\%$

প্রথম 3 মাসে বা $\frac{1}{4}$ বছরের শেষে সুদ $= \frac{p \times r \times \frac{1}{4}}{100}$ টাকা

প্রথম 3 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= \left(p + \frac{p \times r \times \frac{1}{4}}{100}\right)$ টাকা $= p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right)$ টাকা $= p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4 \times \frac{1}{4}}$ টাকা

$(\because 3$ মাস $= \frac{1}{4}$ বছর$)$

$\therefore$ দ্বিতীয় 3 মাসের মূলধন $= p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় 3 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right) + \frac{p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right) \times r \times \frac{1}{4}}{100}$ টাকা

$= p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^2$ টাকা $= p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4 \times \frac{2}{4}}$ $(\because 6$ মাস $= \frac{2}{4}$ বছর$)$

একইভাবে, তৃতীয় 3 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^3$ টাকা $= p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4 \times \frac{3}{4}}$ টাকা $(\because 9$ মাস $= \frac{3}{4}$ বছর$)$

বুঝেছি, বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে অর্জিত সুদ ত্রৈমাসিক অর্থাৎ বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব 4 হলে n বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\left(1 + \frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4n}$ ——— (IV)

ধরি, p = 10000 টাকা, r = 8 এবং $n = \frac{9}{12}$ বছর $= \frac{3}{4}$ বছর

∴ (IV থেকে পেলাম), 9 মাসে বা $\frac{3}{4}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 10000\left(1+\frac{\frac{8}{4}}{100}\right)^{4\times\frac{3}{4}}$ টাকা

$= 10000\left(1+\frac{2}{100}\right)^{3}$ টাকা

$= 10000 \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100}$ টাকা

= ☐ টাকা

∴ 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (☐ – ☐) টাকা = ☐ টাকা **[নিজে লিখি]**

বি: দ্র: — এখানে উল্লেখযোগ্য যে, চক্রবৃদ্ধি সুদ সংক্রান্ত বর্তমান পাঠ্যসূচির আলোচনা সর্বসাকুল্যে কেবলমাত্র চক্রবৃদ্ধি সুদের 3টি পর্বের মধ্যে এবং মোট জমার 3 বছরের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

প্রয়োগ :9. রোকেয়াবিবি 30000 টাকা 3 বছরের জন্য এমনভাবে ধার করলেন যে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বছরে বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যথাক্রমে 4% , 5% ও 6%; 3 বছরের শেষে রোকেয়াবিবি সুদে-আসলে কত টাকা জমা দেবেন হিসাব করে লিখি।

ধরি প্রথম বছরের আসল = 100.00 টাকা

প্রথম বছরের 4% সুদ = 4.00 টাকা [∵ $100 \times \frac{4}{100}$ টাকা]

দ্বিতীয় বছরের আসল = 104.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ = 5.20 টাকা [∵ $104 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

তৃতীয় বছরের আসল = 109.20 টাকা

তৃতীয় বছরের 6% সুদ = 6.552 টাকা [∵ $109.20 \times \frac{6}{100}$ টাকা]

∴ 3 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 115.752 টাকা

∴ চক্রবৃদ্ধি সুদ = (115.752 – 100.00) টাকা অথবা (4.00 + 5.20 + 6.552) টাকা = 15.752 টাকা

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি,

আসল (টাকায়)	চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকায়)
100	15.752
30000	?

100 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ 15.752 টাকা

1 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{15.752}{100}$ টাকা

30000 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{15.752 \times 30000}{100}$ টাকা = 4725.60 টাকা

∴ 3 বছরের শেষে রোকেয়াবিবিকে সুদে-আসলে দিতে হবে = (30000 + 4725.60) টাকা

= 34725.60 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করে কী পাই দেখি।

ধরি, আসল = p টাকা এবং প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বছরের বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যথাক্রমে $r_1\%$, $r_2\%$ এবং $r_3\%$

$\therefore$ প্রথম বছরের সুদ = $\frac{p \times r_1 \times 1}{100}$ টাকা = $\frac{pr_1}{100}$ টাকা

$\therefore$ প্রথম বছরের সুদাসল = $p + \frac{pr_1}{100} = p\,(1 + \frac{r_1}{100})$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের আসল = $p\,(1 + \frac{r_1}{100})$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\dfrac{p\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\times r_2 \times 1}{100}$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left[p\left(1+\frac{r_1}{100}\right)+\dfrac{p\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\times r_2}{100}\right]$ টাকা

$= p\,(1 + \frac{r_1}{100})\,(1 + \frac{r_2}{100})$ টাকা

$\therefore$ একইভাবে পাই, 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\,(1 + \frac{r_1}{100})\,(1 + \frac{r_2}{100})\,(1 + \frac{r_3}{100})$ টাকা

ধরি, $p = 30000$, $r_1 = 4\%$, $r_2 = 5\%$ এবং $r_3 = 6\%$

$\therefore$ 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $30000 \times (1+\frac{4}{100})\,(1+\frac{5}{100})\,(1+\frac{6}{100})$ টাকা

$= 30000 \times \frac{104}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{106}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

$\therefore$ 3 বছরের শেষে রোকেয়াবিবি সুদে-আসলে 34725.60 টাকা ফেরত দেবেন।

প্রয়োগ : 10. যদি বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার প্রথম বছর 4% এবং দ্বিতীয় বছর 5% হয়, তবে 25000 টাকার 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 11. আমি বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 10000 টাকা $2\frac{1}{2}$ বছরের জন্য ধার নিয়েছি। সুদে-আসলে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

প্রথম 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\,(1 + \frac{r}{100})^2$ [p = 10000 টাকা, r = 4]

$= 10000\,(1 + \frac{4}{100})^2$ টাকা $= 10000 \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100}$ টাকা

= 10816 টাকা

2 বছরের শেষে মূলধন = 10816 টাকা

পরবর্তী $\frac{1}{2}$ বছরের সুদ = $\dfrac{10816 \times 4 \times \frac{1}{2}}{100}$ টাকা = 216.32 টাকা

$\therefore 2\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = (10816 + 216.32)টাকা = ☐ টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

$2\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 10000\,(1+\frac{4}{100})^2$ টাকা $+ 10000\,(1+\frac{4}{100})^2 \times \frac{6}{12} \times \frac{4}{100}$ টাকা

$= 10000\,(1+\frac{4}{100})^2\,(1+\frac{6}{12} \times \frac{4}{100})$টাকা

$= 10000 \times \frac{104 \times 104}{100 \times 100} \times \frac{102}{100}$ টাকা $= \frac{1103232}{100}$ টাকা $= 11032.32$ টাকা

প্রয়োগ : 12. বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 30000 টাকার $2\frac{1}{2}$ বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 13. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 246 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, প্রথম বছরের আসল = 100.00 টাকা
প্রথম বছরের 5% সুদ = 5.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের আসল = 105.00 টাকা
দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ = 5.25 টাকা [$\because 105 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

$\therefore$ 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = 110.25 টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (110.25 – 100.00) টাকা = 10.25 টাকা

$\therefore$ গণিতের ভাষায় সম্পর্কটি হলো,

চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকা)	আসল (টাকা)
10.25	100
246	?

চক্রবৃদ্ধি সুদ 10.25 টাকা হলে আসল 100 টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ 1 টাকা হলে আসল $\frac{100}{10.25}$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ 246 টাকা হলে আসল $\frac{100 \times 246}{10.25}$ টাকা = 2400 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

ধরি, আসল = x টাকা

বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= x\,(1+\frac{5}{100})^2$ টাকা

$= x \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ টাকা $= \frac{441x}{400}$ টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ $= (\frac{441x}{400} - x)$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{441x}{400} - x = 246$

বা, $\frac{441x - 400x}{400} = 246$

বা, $\frac{41x}{400} = 246$

$\therefore x = \frac{246 \times 400}{41} = 2400$

$\therefore$ আসল 2400 টাকা।

প্রয়োগ : 14. কত টাকা বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 2 বছর পরে সুদে-আসলে 3528 টাকা হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 15. বার্ষিক 4% হার সুদে কত টাকার 2 বছরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদের অন্তর 80 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, আসল = 100 টাকা

∴ বার্ষিক 4% সরল সুদের হারে 100 টাকার 2 বছরের সুদ = $\frac{100 \times 2 \times 4}{100}$ টাকা = 8 টাকা

বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 100 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ

$= \left\{100\left(1+\frac{4}{100}\right)^2 - 100\right\}$ টাকা

$= 100\left\{\left(\frac{26}{25}\right)^2 - 1\right\}$ টাকা $= 100\left(\frac{676}{625} - 1\right)$ টাকা $= \frac{100 \times 51}{625}$ টাকা $= \frac{204}{25}$ টাকা $= 8.16$ টাকা

∴ চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর = (8.16 – 8.00) টাকা = 0.16 টাকা।

∴ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

সুদের অন্তর (টাকায়)	আসল (টাকায়)
0.16	100
80	?

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 0.16 টাকা হলে আসল 100 টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 1 টাকা হলে আসল $\frac{100}{0.16}$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 80 টাকা হলে আসল $\frac{100 \times 80}{0.16}$ টাকা = 50000 টাকা

∴ আসল 50000 টাকা

আমি অন্য পদ্ধতিতে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, আসল = x টাকা

∴ 4% হারে 2 বছরের সরল সুদ = $\frac{x \times 4 \times 2}{100}$ টাকা = $\frac{2x}{25}$ টাকা

4% হারে 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $x\left(1+\frac{4}{100}\right)^2$ টাকা

$= x \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100}$ টাকা $= \frac{676x}{625}$ টাকা

∴ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\left(\frac{676x}{625} - x\right)$ টাকা = $\frac{51x}{625}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{51x}{625} - \frac{2x}{25} = 80$

বা, $\frac{51x - 50x}{625} = 80$

বা, $x = 80 \times 625$

∴ $x = 50000$

∴ আসল 50000 টাকা

প্রয়োগ :16. মিনতিদি বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকা 3 বছরের জন্য ব্যাংকে রেখে মেয়াদ শেষে 37791.36 টাকা পেলেন। মিনতিদি কত টাকা ব্যাংকে রেখেছিলেন হিসাব করে লিখি।

মনে করি, মিনতিদিদি x টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন।

বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 3 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= x\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$ টাকা $= x \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100}$ টাকা

∴ শর্তানুসারে, $x \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = 37791.36$

বা, $\frac{x \times 27 \times 27 \times 27}{25 \times 25 \times 25} = 37791.36$

বা, $x = \frac{37791.36 \times 25 \times 25 \times 25}{27 \times 27 \times 27}$ $\therefore x = 30000$

∴ মিনতিদিদি 30000 টাকা ব্যাংকে রেখেছিলেন।

প্রয়োগ :17. আমি অন্যভাবে হিসাব করে দেখি মিনতিদি ব্যাংকে 30000 টাকা রেখেছিলেন। [নিজে করি]

প্রয়োগ :18. কোনো মূলধনের 2 বছরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদ যথাক্রমে 400 টাকা ও 410 টাকা হলে, ওই মূলধনের পরিমাণ ও শতকরা বার্ষিক সুদের হার নির্ণয় করি।

2 বছরের সরল সুদ = 400 টাকা

1 বছরের সরল সুদ = (400 ÷ 2) টাকা = 200 টাকা

2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের পার্থক্য = (410 – 400) টাকা = 10 টাকা

∴ 200 টাকার 1 বছরের সুদ = 10 টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ = (10 ÷ 2) টাকা = 5 টাকা

∴ বার্ষিক সুদের হার = 5%

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছরে)	সুদ (টাকায়)
100	1	5
?	2	400

1 বছরে 5 টাকা সুদ হবে যখন আসল 100 টাকা

2 বছরে 5 টাকা সুদ হবে যখন আসল $\frac{100}{2}$ টাকা

2 বছরে 1 টাকা সুদ হবে যখন আসল $\frac{100}{2 \times 5}$ টাকা

2 বছরে 400 টাকা সুদ হবে যখন আসল $\frac{100 \times 400}{2 \times 5}$ টাকা = 4000 টাকা

∴ নির্ণেয় মূলধন 4000 টাকা এবং বার্ষিক সুদের হার 5%

আমি অন্যভাবে হিসাব করে কী পাই দেখি।

ধরি, মূলধন p টাকা এবং বার্ষিক সুদের হার r%

∴ বার্ষিক r% সরল সুদে 2 বছরের সুদ $= \frac{p \times r \times 2}{100}$ টাকা $= \frac{2pr}{100}$ টাকা

আবার বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ টাকা

∴ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ $= \left[p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 - p\right]$ টাকা $= p\left[1+\frac{2r}{100}+\left(\frac{r}{100}\right)^2 - 1\right]$ টাকা

$= \frac{pr}{100}\left[2+\frac{r}{100}\right]$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{2pr}{100} = 400$ .... (i)

$\frac{pr}{100}[2 + \frac{r}{100}] = 410$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণরকে (i) নং সমীকরণ দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{\frac{pr}{100}\left[2+\frac{r}{100}\right]}{\frac{2pr}{100}} = \frac{410}{400}$$

বা, $\frac{2+\frac{r}{100}}{2} = \frac{41}{40}$

বা, $80 + \frac{40r}{100} = 82$

বা, $\frac{2r}{5} = 82 - 80 = 2$

বা, $2r = 10 \quad \therefore r = 5$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণ থেকে পেলাম, $\frac{2 \times p \times 5}{100} = 400 \quad \therefore p = 4000$

$\therefore$ মূলধন 4000 টাকা এবং সুদের হার 5%

প্রয়োগ :19. কোনো মূলধনের 2 বছরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদ যথাক্রমে 840 টাকা এবং 869.40 টাকা হলে, ওই মূলধনের পরিমাণ ও বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ :20. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত হলে 2 বছরে 10000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 11664 টাকা হবে তা নির্ণয় করি।

ধরি, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার r%

$\therefore$ বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 10000\,(1 + \frac{r}{100})^2$

শর্তানুসারে, $10000\,(1 + \frac{r}{100})^2 = 11664$

বা, $(1 + \frac{r}{100})^2 = \frac{11664}{10000}$

বা, $(1 + \frac{r}{100})^2 = \frac{729}{625}$

বা, $(1 + \frac{r}{100})^2 = (\frac{27}{25})^2$

বা, $1 + \frac{r}{100} = \frac{27}{25}$

বা, $\frac{r}{100} = \frac{27}{25} - 1$

বা, $\frac{r}{100} = \frac{2}{25}$

বা, $r = \frac{200}{25} \quad \therefore r = 8$

$\therefore$ বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 8%

প্রয়োগ :21. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত হলে 2 বছরে 5000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5832 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :22. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত বছরে 4000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5324 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।

ধরি, বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে n বছরে 4000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5324 টাকা হবে।

$\therefore$ n বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 4000\left(1+\frac{10}{100}\right)^n$ টাকা

শর্তানুসারে, $4000\left(1+\frac{10}{100}\right)^n = 5324$

বা, $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \frac{5324}{4000}$

বা, $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \frac{1331}{1000}$

বা, $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^3$

$\therefore n = 3$

$\therefore$ বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 3 বছরে 4000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5324 টাকা হবে।

প্রয়োগ :23. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত বছরে 5000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 6050 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

কষে দেখি 6.1

1. আমার কাছে 5000 টাকা আছে। আমি ওই টাকা একটি ব্যাংকে বার্ষিক 8.5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে জমা রাখলাম। 2 বছরের শেষে সুদে-আসলে মোট কত টাকা পাব হিসাব করে লিখি।
2. 5000 টাকার বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে নির্ণয় করি।
3. গৌতমবাবু 2000 টাকা বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 2 বছরের জন্য ধার নিয়েছেন। 2 বছর পরে তিনি কত টাকা চক্রবৃদ্ধি সুদ দেবেন তা হিসাব করে লিখি।
4. 30000 টাকার বার্ষিক 9% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি।
5. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 80000 টাকার $2\frac{1}{2}$ বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।
6. ছন্দাদেবী বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কিছু টাকা 2 বছরের জন্য ধার করেন। চক্রবৃদ্ধি সুদ 2496 টাকা হলে ছন্দাদেবী কত টাকা ধার করেছিলেন নির্ণয় করি।
7. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধির হার সুদে কোন আসলের 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 2648 হবে, তা হিসাব করে লিখি।
8. রহমতচাচা বার্ষিক 9% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকা সমবায় ব্যাংকে জমা রেখে 2 বছর পরে সুদে-আসলে 29702.50 টাকা ফেরত পেলেন। রহমতচাচা কত টাকা সমবায় ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন নির্ণয় করি।

9. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত টাকার 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 31492.80 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।
10. বার্ষিক 7.5% সুদের হারে 12000 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর নির্ণয় করি।
11. 10,000 টাকার বার্ষিক 5% সুদের হারে 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের পার্থক্য হিসাব করে লিখি।
12. বার্ষিক 9% সুদের হারে কিছু টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 129.60 টাকা হলে, ওই টাকার পরিমাণ হিসাব করে লিখি।
13. যদি বার্ষিক 10% হারে কিছু টাকার 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 930 টাকা হয়, তবে ওই টাকার পরিমাণ কত হিসাব করে লিখি।
14. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যদি প্রথম বছর 7% এবং দ্বিতীয় বছর 8% হয়, তবে 6000 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।
15. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যদি প্রথম বছর 5% এবং দ্বিতীয় বছর 6% হয়, তবে 5000 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি।
16. কোনো নির্দিষ্ট পরিমাণ মূলধনের 1 বছরের সরল সুদ 50 টাকা এবং 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 102 টাকা হলে, মূলধনের পরিমাণ ও বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি।
17. কোনো মূলধনের 2 বছরের সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদ যথাক্রমে 8400 টাকা এবং 8652 টাকা হলে মূলধন ও বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি।
18. 6 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 6000 টাকার 1 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি।
19. 3 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 6250 টাকার 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।
20. যদি 60000 টাকার 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি 69984 টাকা হয়, তবে বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি।
21. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত বছরে 40000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 46656 টাকা হবে, তা নির্ণয় করি।
22. শতকরা বার্ষিক কত চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 10000 টাকার 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 12100 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।
23. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত বছরে 50000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 60500 টাকা হবে, তা নির্ণয় করি।
24. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত বছরের 300000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 399300 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।
25. সুদের পর্ব 6 মাস হলে বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 1600 টাকার $1\frac{1}{2}$ বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সুদ-আসল নির্ণয় করি।

গত বছরে আমাদের গ্রামে একটি কম্পিউটার প্রশিক্ষণ কেন্দ্র চালু হয়েছে। সেখানে খুব অল্প খরচে পঞ্চম থেকে দশম শ্রেণির ইচ্ছুক ছাত্রছাত্রীরা ও অন্যান্য ইচ্ছুক ব্যক্তিরা তাদের যোগ্যতা অনুযায়ী কম্পিউটারের বিভিন্ন বিষয়ে প্রাথমিক জ্ঞান লাভ করতে পারে।

প্রয়োগ : 24. বর্তমানে 4000 জন শিক্ষার্থী এই প্রশিক্ষণ কেন্দ্রে প্রশিক্ষণ নিচ্ছে। ঠিক করা হয়েছে যে পরবর্তী 2 বছরের প্রতি বছরে পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 5% বেশি শিক্ষার্থীকে এই প্রশিক্ষণ কেন্দ্রে প্রশিক্ষণের সুযোগ দেওয়া হবে। হিসাব করে দেখি পরবর্তী 2 বছরের শেষে কতজন শিক্ষার্থী এই প্রশিক্ষণে অংশগ্রহণের সুযোগ পাবে?

বর্তমান শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4000 জন

প্রথম বছরে 5% বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বাড়বে = 200 জন [$\because 4000 \times \frac{5}{100}$ জন = 200 জন]

দ্বিতীয় বছরের শুরুতে শিক্ষার্থী = 4200 জন

দ্বিতীয় বছরে 5% বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বাড়বে = 210 জন [$\because 4200 \times \frac{5}{100}$ জন = 210 জন]

দ্বিতীয় বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা হবে = 4410 জন

6 সমহারে এই বৃদ্ধিকে কী বলা হয়?

সমহারে বৃদ্ধি ঘটলে তাকে সমহার বৃদ্ধি [Uniform rate of growth] এবং সমহারে হ্রাস ঘটলে তাকে সমহার হ্রাস বা অপচয় [Uniform rate of decrease or depreciation] বলা হয়।

জনসংখ্যা বৃদ্ধি, শিক্ষার্থীর সংখ্যা বৃদ্ধি, কৃষি ও শিল্পের উৎপাদন বৃদ্ধি প্রভৃতি সমহার বৃদ্ধির অন্তর্গত। আবার ক্রমাগত চলার ফলে যন্ত্রের ক্ষয়, অনেকদিনের ঘরবাড়ি, আসবাবপত্র, যানবাহন ইত্যাদি অস্থাবর সম্পত্তির মূল্য হ্রাস, সচেতনতা বৃদ্ধির ফলে রোগ ব্যাধির সংখ্যা হ্রাস প্রভৃতি সমহার হ্রাসের অন্তর্গত।

বিকল্প পদ্ধতি, বর্তমান শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4000 জন

প্রথম বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= 4000 \times \frac{105}{100}$ জন

দ্বিতীয় বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= 4000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ জন = 4410 জন

দ্বিতীয় বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4410 জন হবে।

সমহারে বৃদ্ধির সূত্র এবং চক্রবৃদ্ধি সুদের সূত্র একইরকম।

আমি $p(1+\frac{r}{100})^n$ সূত্রের সাহায্যে হিসাব করি ও কী পাই দেখি যেখানে p = বর্তমান জনসংখ্যা, r% = বছরে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার এবং n = বছরের সংখ্যা

মনে করি, ওই শহরের বর্তমান জনসংখ্যা p এবং জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার বছরে r%

$\therefore$ n বছর পরে জনসংখ্যা হবে $= p(1+\frac{r}{100})^n$

বুঝেছি, এখানে p = 4000 জন, r = 5 এবং n = 2 বছর

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে মোট শিক্ষার্থী হবে $= 4000 \times (1+\frac{5}{100})^2$ জন $= 4000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ জন

= ☐ জন

প্রয়োগ : 25. কোনো শহরে বছরের শেষে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার ওই বছরের শুরুতে যে জনসংখ্যা থাকে তার 2%; ওই শহরের বর্তমান জনসংখ্যা যদি 2000000 হয়, তবে 3 বছর পরে ওই শহরের জনসংখ্যা কত হবে হিসাব করে লিখি।

বর্তমান জনসংখ্যা	= 2000000
প্রথম বছরে 2% হারে জনসংখ্যা বৃদ্ধি	= 40000 [$\because 2000000 \times \frac{2}{100} = 40000$]
দ্বিতীয় বছরের শুরুতে জনসংখ্যা	= 2040000
দ্বিতীয় বছরে 2% হারে জনসংখ্যা বৃদ্ধি	= 40800 [$\because 2040000 \times \frac{2}{100} = 40800$]
তৃতীয় বছরের শুরুতে জনসংখ্যা	= 2080800
তৃতীয় বছরে 2% হারে জনসংখ্যা বৃদ্ধি	= 41616 [$\because 2080800 \times \frac{2}{100} = 41616$]
3 বছরের শেষে জনসংখ্যা	= 2122416

$\therefore$ 3 বছর পরে জনসংখ্যা হবে 2122416.

আমি অন্যভাবে হিসাব করি,

ধরি, $p = 2000000$ জন, $r = 2$ এবং $n = 3$

$\therefore$ 3 বছর পর জনসংখ্যা $= 2000000\left(1+\frac{2}{100}\right)^3$

$= 2000000 \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100}$

$= 2122416$

প্রয়োগ : 26. আমার কাকার কারখানার একটি মেশিনের মূল্য প্রতি বছর 10% হারে হ্রাস প্রাপ্ত হয়। মেশিনটির বর্তমান মূল্য 60000 টাকা হলে, 3 বছর পরে ওই মেশিনটির মূল্য কত হবে নির্ণয় করি।

ধরি, যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য	= 100.00 টাকা
প্রথম বছর 10% মূল্য হ্রাস	= 10.00 টাকা
দ্বিতীয় বছরের শুরুতে হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য	= 90.00 টাকা
দ্বিতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস	= 9.00 টাকা [$\because 90 \times \frac{10}{100} = 9$]
তৃতীয় বছরের শুরুতে হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য	= 81.00 টাকা
তৃতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস	= 8.10 টাকা [$\because 81 \times \frac{10}{100} = 8.10$]
3 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য	= 72.90 টাকা

$\therefore$ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

বর্তমান মূল্য (টাকায়)	হ্রাস প্রাপ্ত মূল্য (টাকায়)
100	72.90
60000	?

বর্তমান মূল্য ও হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য সরল সম্পর্কে আছে।

$\therefore$ 3 বছর পর মেশিনটির মূল্য $= 72.90 \times \frac{60000}{100}$ টাকা $= 43740$ টাকা

বিকল্প পদ্ধতি,

যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য	= 60000 টাকা
প্রথম বছরে 10% হ্রাস	= 6000 টাকা [$\because 60000 \times \frac{10}{100} = 6000$]
দ্বিতীয় বছরের শুরুতে মূল্য	= 54000 টাকা
দ্বিতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস	= 5400 টাকা [$\because 54000 \times \frac{10}{100} = 5400$]
তৃতীয় বছরের শুরুতে মূল্য	= 48600 টাকা
তৃতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস	= 4860 টাকা [$\because 48600 \times \frac{10}{100} = 4860$]
3 বছর পর মূল্য	= 43740 টাকা

$\therefore$ 3 বছর পর মেশিনটির মূল্য 43740 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য p টাকা, 1 বছরে হ্রাস পায় = r%

$\therefore$ প্রথম বছরে হ্রাস পায় = $\frac{p \times r}{100}$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শুরুতে যন্ত্রটির মূল্য হয় = $\left(p - \frac{pr}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)$ টাকা

দ্বিতীয় বছরে হ্রাস পায় $\frac{p\left(1-\frac{r}{100}\right)\times r}{100}$ টাকা

$\therefore$ তৃতীয় বছরের শুরুতে মূল্য হয় = $\left[p\left(1 - \frac{r}{100}\right) - \frac{pr}{100}\left(1 - \frac{r}{100}\right)\right]$ টাকা = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^2$ টাকা

একইভাবে, তৃতীয় বছরের শেষে মূল্য হবে = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^3$ টাকা

বুঝেছি, n বছর পরে যন্ত্রটির মূল্য হবে = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

$\therefore$ 3 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য হবে = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ [যেখানে p = 60000 টাকা, r = 10% এবং n = 3]

$= 60000\left(1-\frac{10}{100}\right)^3$ টাকা $= 60000 \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

$\therefore$ 3 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য হবে 43740 টাকা।

প্রয়োগ : 27. একটি মোটর গাড়ির মূল্য 3 লাখ টাকা। গাড়িটির বাৎসরিক অপচয়ের হার 30% হলে, 3 বছর পরে গাড়িটির কী দাম হবে, তা হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 28. কোনো রাজ্যে পথ নিরাপত্তা সংক্রান্ত প্রচারাভিযানের মাধ্যমে পথ দুর্ঘটনা প্রতি বছর তার পূর্ব বছরের তুলনায় 10% হ্রাস পেয়েছে। বর্তমান বছরে ওই রাজ্যে যদি 2916 টি পথ দুর্ঘটনা ঘটে তবে 3 বছর পূর্বে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা কত ছিল, তা হিসাব করে লিখি।

মনে করি, 3 বছর পূর্বে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা ছিল x টি

$\therefore$ বর্তমানে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা = $x\left(1-\frac{10}{100}\right)^3$ টি

শর্তানুসারে, $x\left(1-\frac{10}{100}\right)^3 = 2916$

বা, $x \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} = 2916$ বা, $x = \frac{2916\times100\times100\times100}{90\times90\times90}$ $\therefore x = 4000$

$\therefore$ 3 বছর পূর্বে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা ছিল 4000 টি।

প্রয়োগ : 29. একটি শহরের বর্তমান জনসংখ্যা 5,76,000; যদি জনসংখ্যা প্রতি বছর $6\frac{2}{3}\%$ হিসাবে বাড়ে তাহলে 2 বছর আগে জনসংখ্যা কত ছিল, তা নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

কষে দেখি 6.2

1. পহলমপুর গ্রামের বর্তমান লোকসংখ্যা 10000; ওই গ্রামে প্রতি বছর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার 3% হলে, 2 বছর পরে ওই গ্রামের জনসংখ্যা কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

2. কোনো একটি রাজ্যের প্রতি বছর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার 2%; বর্তমান জনসংখ্যা 80000000 হলে, 3 বছর পরে ওই রাজ্যের জনসংখ্যা কত হবে, তা নির্ণয় করি।

3. পাড়ার একটি লেদ কারখানার একটি মেশিনের মূল্য প্রতি বছর 10% হ্রাস প্রাপ্ত হয়। মেশিনটির বর্তমান মূল্য 100000 টাকা হলে, 3 বছর পরে ওই মেশিনটির মূল্য কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

4. সর্বশিক্ষা অভিযানের ফলে বিদ্যালয় ছেড়ে চলে যাওয়া শিক্ষার্থীদের পুনরায় বিদ্যালয়ে ভর্তির ব্যবস্থা করা হয়েছে। এরূপ শিক্ষার্থীদের ভর্তির হার প্রতি বছর তার পূর্ববর্তী বছর অপেক্ষা 5% বৃদ্ধি পেয়েছে। কোনো এক জেলায় বর্তমান বছরে যদি 3528 জন এরূপ শিক্ষার্থী নতুন করে ভর্তি হয়ে থাকে, তবে 2 বছর পূর্বে এরূপ কত জন শিক্ষার্থী ভর্তি হয়েছিল, তা হিসাব করে লিখি।

5. পুরুলিয়া জেলায় পথ নিরাপত্তা সংক্রান্ত প্রচার অভিযানের মাধ্যমে পথ দুর্ঘটনা প্রতি বছর তার পূর্ব বছরের তুলনায় 10% হ্রাস পেয়েছে। বর্তমান বছরে এই জেলায় 8748 টি পথ দুর্ঘটনা ঘটে থাকলে, 3 বছর আগে পথ দুর্ঘটনার সংখ্যা কত ছিল, তা নির্ণয় করি।

6. একটি মৎস্যজীবী সমবায় সমিতি উন্নত প্রথায় মাছ চাষ করার জন্য এরূপ একটি পরিকল্পনা গ্রহণ করেছে যে কোনো বছরের মাছের উৎপাদন পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 10% বৃদ্ধি করবে। বর্তমান বছরে যদি ওই সমবায় সমিতি 400 কুইন্টাল মাছ উৎপাদন করে, তবে 3 বছর পরে সমবায় সমিতির মাছের উৎপাদন কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

7. একটি গাছের উচ্চতা প্রতি বছর 20% হারে বৃদ্ধি পায়। গাছটির বর্তমান উচ্চতা 28.8 মিটার হলে, 2 বছর আগে গাছটির উচ্চতা কত ছিল, তা নির্ণয় করি।

8. কোনো একটি পরিবার আজ থেকে 3 বছর পূর্বে বিদ্যুৎ অপচয় বন্ধ করতে ইলেকট্রিক বিলের খরচ পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 5% হ্রাস করার পরিকল্পনা গ্রহণ করে। 3 বছর পূর্বে ওই পরিবারকে বছরে 4000 টাকার ইলেকট্রিক বিল দিতে হয়েছিল। বর্তমান বছরে ইলেকট্রিক বিলে বিদ্যুৎ খরচ কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

9. শোভনবাবুর ওজন 80 কিগ্রা.। ওজন কমানোর জন্য তিনি নিয়মিত হাঁটা শুরু করলেন। তিনি ঠিক করলেন যে প্রতি বছরের প্রারম্ভে যা ওজন থাকবে তার 10% হ্রাস করবেন। 3 বছর পরে শোভনবাবুর ওজন কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

10. কোনো এক জেলার সমস্ত মাধ্যমিক শিক্ষাকেন্দ্রের (M.S.K) বর্তমান শিক্ষার্থীর সংখ্যা 3993 জন। প্রতি বছর বিগত বছরের তুলনায় যদি 10% শিক্ষার্থী বৃদ্ধি পেয়ে থাকে, তবে 3 বছর পূর্বে ওই জেলার সকল মাধ্যমিক শিক্ষাকেন্দ্রের শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত ছিল, তা নির্ণয় করি।

11. কৃষিজমিতে কেবলমাত্র রাসায়নিক সার ও কীটনাশক ব্যবহারের কুফল সম্পর্কে সচেতনতা বৃদ্ধির ফলে রসুলপুর গ্রামে কেবলমাত্র রাসায়নিক সার ও কীটনাশক ব্যবহারকারী কৃষকের সংখ্যা পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 20% হ্রাস পায়। 3 বছর পূর্বে রসুলপুর গ্রামের ওরকম কৃষকের সংখ্যা 3000 জন হলে, বর্তমানে ওই গ্রামে ওরকম কৃষকের সংখ্যা কত হবে, তা নির্ণয় করি।

12. একটি কারখানার একটি মেশিনের মূল্য 180000 টাকা। মেশিনটির মূল্য প্রতি বছর 10% হ্রাস প্রাপ্ত হয়। 3 বছর পরে ওই মেশিনটির মূল্য কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

13. বকুলতলা গ্রামের পঞ্চায়েত সমিতি যেসব পরিবারে বিদ্যুৎ সংযোগ নেই তাদের বাড়িতে বিদ্যুৎ পৌঁছানোর পরিকল্পনা গ্রহণ করে। এই গ্রামে 1200 পরিবারের বিদ্যুৎ সংযোগ নেই। প্রতি বছর যদি পূর্ব বছরের তুলনায় 75% বিদ্যুৎহীন পরিবারে বিদ্যুৎ পৌঁছানোর ব্যবস্থা করা হয়, তবে 2 বছর পরে বকুলতলা গ্রামে বিদ্যুৎহীন পরিবারের সংখ্যা কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

14. বোতল ভর্তি ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারের উপর বিরূপ প্রতিক্রিয়া প্রচারের ফলে প্রতি বছর তার পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় ওই ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারকারীর সংখ্যা 25% হ্রাস পায়। 3 বছর পূর্বে কোনো শহরে ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারকারীর সংখ্যা 80000 হলে, বর্তমান বছরে ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারকারীর সংখ্যা কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

15. ধূমপান বিরোধী প্রচারের ফলে প্রতি বছর ধূমপায়ীর সংখ্যা $6\frac{1}{4}\%$ হারে হ্রাস পায়। বর্তমানে কোনো শহরে 33750 জন ধূমপায়ী থাকলে, 3 বছর পূর্বে ওই শহরে কত জন ধূমপায়ী ছিল, তা হিসাব করে লিখি।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে প্রতি বছর বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার
(a) সমান (b) অসমান (c) সমান অথবা অসমান উভয়ই (d) কোনোটিই নয়

(ii) চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে
(a) প্রতি বছর আসল একই থাকে (b) প্রতি বছর আসল পরিবর্তিত হয়
(c) প্রতি বছর আসল একই থাকতে পারে অথবা পরিবর্তিত হতে পারে (d) কোনোটিই নয়

(iii) একটি গ্রামের বর্তমান জনসংখ্যা p এবং প্রতি বছর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার 2r% হলে, n বছর পর জনসংখ্যা হবে
(a) $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ (b) $p\left(1+\frac{r}{50}\right)^n$ (c) $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^{2n}$ (d) $p\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

(iv) একটি মেশিনের বর্তমান মূল্য 2p টাকা এবং প্রতি বছর মেশিনটির দাম 2r% হ্রাস হলে 2n বছর পরে মেশিনের দাম হবে
(a) $p\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$ টাকা (b) $2p\left(1-\frac{r}{50}\right)^n$ টাকা

(c) $p\left(1-\frac{r}{50}\right)^{2n}$ টাকা (d) $2p\left(1-\frac{r}{50}\right)^{2n}$ টাকা

(v) এক ব্যক্তি একটি ব্যাংকে 100 টাকা জমা রেখে, 2 বছর পর সমূল চক্রবৃদ্ধি পেলেন 121 টাকা। বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার

(a) 10% (b) 20% (c) 5% (d) $10\frac{1}{2}$%

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকার বার্ষিক নির্দিষ্ট শতকরা হার সুদে নির্দিষ্ট সময়ের জন্য চক্রবৃদ্ধি সুদ সরল সুদের থেকে কম হবে।

(ii) চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট সময় অন্তর সুদ আসলের সঙ্গে যোগ হয়। সেই কারণে আসলের পরিমাণ ক্রমাগত বাড়তে থাকে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকার বার্ষিক নির্দিষ্ট শতকরা হার সুদে 1 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদের পরিমাণ এবং সরল সুদের পরিমাণ ________।

(ii) সময়ের সঙ্গে কোনো কিছুর নির্দিষ্ট হারে বৃদ্ধি হলে সেটি ________ বৃদ্ধি।

(iii) সময়ের সঙ্গে কোনো কিছুর নির্দিষ্ট হারে হ্রাস হলে সেটি সমহার ________।

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) 400 টাকার 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি 441 টাকা হলে, বার্ষিক শতকরা চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত তা লিখি।

(ii) বার্ষিক নির্দিষ্ট শতকরা চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকা n বছরে দ্বিগুণ হলে, কত বছরে 4 গুণ হবে তা লিখি।

(iii) বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকার 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ 615 টাকা হলে, আসল নির্ণয় করি।

(iv) প্রতি বছর r% হ্রাসপ্রাপ্ত হলে, n বছর পর একটি মেশিনের মূল্য হয় v টাকা। n বছর পূর্বে মেশিনটির মূল্য কত ছিল তা নির্ণয় করি।

(v) প্রতি বছর জনসংখ্যা r% বৃদ্ধি হলে n বছর পর জনসংখ্যা হয় p; n বছর পূর্বে জনসংখ্যা কত ছিল তা নির্ণয় করি।

7 বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য

THEOREMS RELATED TO ANGLES IN A CIRCLE

প্রতি বছরের মতো এ বছরেও আমাদের বিদ্যালয়ের মাঠে ফেব্রুয়ারি মাসে একটি প্রদর্শনীর আয়োজন করা হয়েছে। আমরা দশম শ্রেণির ছাত্রছাত্রীরা গণিতের উপর কিছু মডেল তৈরি করব। এখনও প্রায় দুই সপ্তাহ সময় আছে।

আমরা ছোটো-বড়ো নানান আকারের কিছু বৃত্তাকার রিং ও ছোটো-বড়ো নানান দৈর্ঘ্যের কাঠি জোগাড় করেছি।

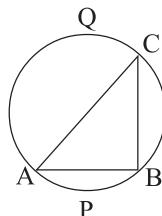
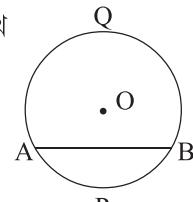
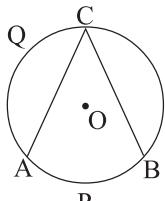
আমরা ঠিক করেছি এই বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে নানাভাবে কাঠি রেখে কী কী পাই দেখে নানান তথ্য জানব ও সেই অনুযায়ী মডেল তৈরির চেষ্টা করব।

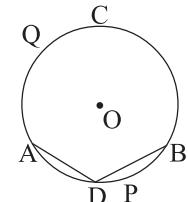
সাথি প্রথমে একটি বৃত্তাকার রিং-এ একটি কাঠি পাশের ছবির মতো রাখল।

দেখছি, AB কাঠিটি বৃত্তকার রিং-এর একটি জ্যা।

বৃত্তাকার রিং-এর উপচাপ $\overset{\frown}{APB}$ ও অধিচাপ $\overset{\frown}{AQB}$ ।

আমি আরও দুটি কাঠি AC ও BC পাশের ছবির মতো রাখলাম।

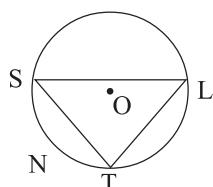
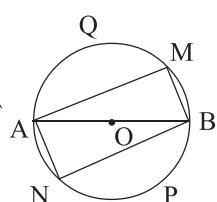
AC ও BC বৃত্তের অপর দুটি জ্যা।

(1) কিন্তু AB জ্যা বৃত্তের C বিন্দুতে একটি সম্মুখ কোণ ∠ACB তৈরি করেছে। এই কোণকে কী বলা হয়?

C বিন্দুটি $\overset{\frown}{APB}$ বৃত্তচাপ বাদে বাকি বৃত্তচাপটিতে অবস্থিত। তাই ∠ACB -কে বলা হয় বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{APB}$ -এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

আবার যদি D বিন্দুটি $\overset{\frown}{AQB}$ বৃত্তচাপ বাদে বাকি বৃত্তচাপটিতে অবস্থিত হয়, তবে ∠ADB -কে বলা হবে বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{AQB}$ দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

নিজে করি 7.1

1) পাশের ছবিতে ∠AMB, বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{APB}$ দ্বারা গঠিত সম্মুখ ☐ কোণ এবং ∠ANB, বৃত্তচাপ ☐ দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

2) পাশের ছবিতে ∠SLT, ☐ জ্যা-এর দ্বারা L বিন্দুতে গঠিত সম্মুখ কোণ।

আবার যেহেতু L বিন্দুটি বৃত্তে অবস্থিত, অতএব কোণ ☐ ST জ্যা-এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

আবার ∠SLT, বৃত্তচাপ ☐ দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

সোহম আরও দুটি কাঠি বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে পাশের ছবির মতো রাখল।

দেখছি, APB চাপের দ্বারা গঠিত অপর একটি সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ ∠ADB তৈরি হয়েছে।

কিন্তু ∠ACB ও ∠ADB বৃত্তস্থ কোণ দুটি ADQCB বৃত্তাংশে অবস্থিত।

সুতরাং, ∠ACB ও ∠ADB বৃত্তস্থ কোণদুটি একই বৃত্তাংশস্থ।

আমি আমার খাতায় O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি এবং একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ আঁকি।

পাশের ছবির O কেন্দ্রীয় বৃত্তের চারটি বৃত্তস্থ কোণ হলো ☐, ☐, ☐ ও ☐।

এদের মধ্যে ADEQCB অধিবৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণগুলি এবং ASPB উপবৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণটি নিজে লিখি।

2 O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB জ্যা কেন্দ্রে একটি সম্মুখ কোণ ∠AOB উৎপন্ন করেছে।এই ∠AOB -কে কী বলা হয়?

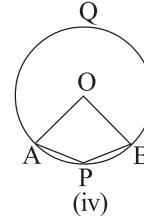
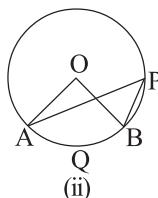
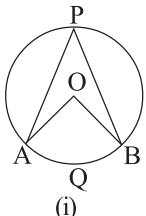
∠AOB -কে বৃত্তচাপ $\overparen{ASB}$ -এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ বলে।

মারিয়া ও শাকিল অনেকগুলি বৃত্তে কেন্দ্রস্থ ও বৃত্তস্থ কোণ এঁকেছে। সেগুলি হলো,

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

দেখছি, (i) নং, (ii) নং বৃত্তে AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ☐ ও বৃত্তস্থ কোণ ☐। কিন্তু (iii) নং বৃত্তে ASB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ☐ এবং ASQ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ ☐।

∴ (iii) নং বৃত্তে কেন্দ্রস্থ কোণ ∠AOB এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠APQ একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত নয়।

আবার (iv) নং বৃত্তে AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ প্রবৃদ্ধ ∠AOB এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠APB

নিজে করি 7.2

1) আমি একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে দুটি বৃত্তস্থ কোণ আঁকি যারা (a) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত (b) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত নয়।

2) আমি O কেন্দ্রীয় বৃত্তে একটি বৃত্তস্থ কোণ ও একটি কেন্দ্রস্থ কোণ আঁকি যারা (a) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত (b) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত নয়।

3) ছবিগুলি দেখে উত্তর দিই : (O বৃত্তের কেন্দ্র)

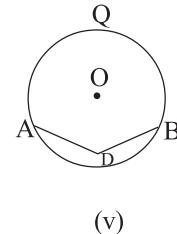
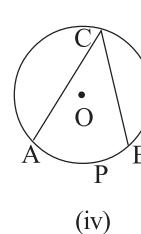
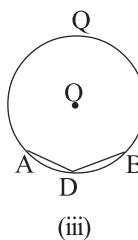
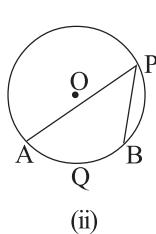
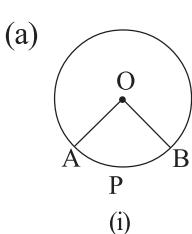
(a)

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(i) নং চিত্রে ∠AOB কোণটি APB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত ☐ কোণ।

(ii) নং চিত্রে ☐ কোণটি AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ।

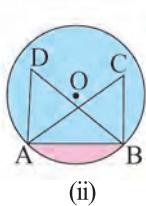
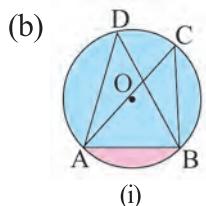
(iii) নং চিত্রে ∠ADB কোণটি ☐ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত ☐ কোণ।

(iv) নং চিত্রে ∠ACB কোণটি ☐ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ ☐।

(v) নং চিত্রে ☐ কোণটি ☐ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ নয়।

(b)

(i)

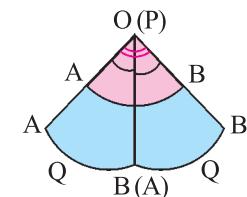
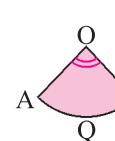
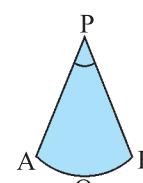
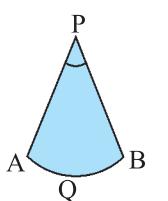
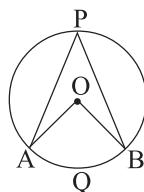
(ii)

(i) নং চিত্রের কোণদুটি ☐ এবং ☐ একই বৃত্তাংশস্থ কোণ। এরা ADCB বৃত্তাংশে অবস্থিত।

(ii) নং চিত্রের ☐ ও ☐ কোণদুটি বৃত্তাংশস্থ কোণ ☐।

বীণা একটি বৃত্ত এঁকেছে। আমি ওই বৃত্তে একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ ও বৃত্তস্থ কোণ আঁকি ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক বের করি।

হাতেকলমে

1) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ∠AOB এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠APB আঁকলাম।

2) ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে দুটো ∠APB এবং একটি ∠AOB কেটে নিলাম।

3) ট্রেসিং পেপারের এই দুটি ∠APB, বৃত্তের ∠AOB-এর উপর পাশাপাশি বসিয়ে দিলাম।

হাতেকলমে দেখছি, $2\angle APB = \angle AOB$

অর্থাৎ হাতেকলমে পেলাম, একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

আমি অন্য একটি যে-কোনো বৃত্ত এঁকে তার একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ও বৃত্তস্থ কোণ এঁকে একইভাবে হাতেকলমে করে দেখছি কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ। [নিজে করি]

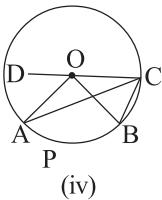
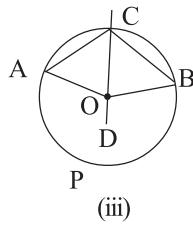
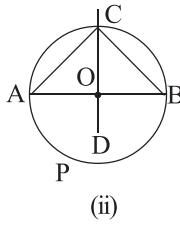
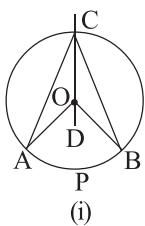
যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 34. কোনো বৃত্তের একটি বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ ওই চাপের দ্বারা গঠিত যে-কোনো বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃত্তচাপ APB-এর দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$ এবং একটি বৃত্তস্থ কোণ $\angle ACB$।

প্রমাণ করতে হবে: $\angle AOB = 2\angle ACB$

বৃত্তচাপ AB-এর দৈর্ঘ্য অনুযায়ী বিষয়টি তিনরকম হতে পারে। (i) ও (iv) নং চিত্রে APB উপচাপ (ii) নং চিত্রে APB অর্ধবৃত্তচাপ (iii) নং চিত্রে APB অধিচাপ।

অঙ্কন : C, O যুক্ত করে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম।

প্রমাণ : প্রতিক্ষেত্রেই Δ AOC-এর OA = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \angle OCA = \angle OAC$

আবার, প্রতিক্ষেত্রেই, Δ AOC-এর CO বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায়

বহিঃস্থ $\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$

$= 2\angle OCA$..... (I) [$\because \angle OAC = \angle OCA$]

প্রতিক্ষেত্রেই Δ BOC-এর, OB = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

সুতরাং $\angle OBC = \angle OCB$

আবার প্রতিক্ষেত্রেই Δ BOC-এর বাহুকে CO বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায়

বহিঃস্থ $\angle BOD = \angle OCB + \angle OBC$

$= 2\angle OCB$ ...... (II) [$\because \angle OBC = \angle OCB$]

(i) ও (ii) নং চিত্রের ক্ষেত্রে, $\angle AOD + \angle BOD = 2\angle OCA + 2\angle OCB$ [I ও II থেকে পেলাম]

$\therefore \angle AOB = 2(\angle OCA + \angle OCB) = 2\angle ACB$ .... (III)

কিন্তু (iii) নং চিত্রের ক্ষেত্রে অর্থাৎ যখন APB অধিচাপ, III-কে লিখব,

প্রবৃদ্ধ $\angle AOB = 2\angle ACB$

(iv) নং চিত্রের ক্ষেত্রে, $\angle BOD - \angle AOD = 2\angle OCB - 2\angle OCA$

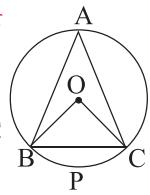
বা, $\angle AOB = 2(\angle OCB - \angle OCA)$

$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 1. আমি P কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি এবং ওই বৃত্তে ACB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle APB$ ও বৃত্তস্থ কোণ $\angle AQB$ অঙ্কন করে, প্রমাণ করি যে $\angle APB = 2\angle AQB$ [নিজে করি]

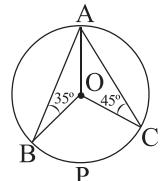
প্রয়োগ : 2. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O; বিন্দু A এবং BC জ্যা কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\angle BOC = 120^\circ$ হলে $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

ছবি এঁকে দেখছি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একই বৃত্তচাপ BPC-এর দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ ও বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

প্রয়োগ : 3. পাশের ছবির O কেন্দ্রীয় বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী। $\angle ABO = 35^\circ$ এবং $\angle ACO = 45^\circ$ হলে, $\angle BOC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

ΔOAB-তে, OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAB = \angle OBA = 35^\circ$

ΔOAC-তে, OA = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$

$\therefore \angle BAC = \square + \square = \square$ **[নিজে লিখি]**

যেহেতু, O কেন্দ্রীয় বৃত্তে BPC বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$, সুতরাং $\angle BOC = 2\angle BAC = 160^\circ$

প্রয়োগ : 4. পাশের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবিটি দেখি এবং $\angle OAB$-এর মান হিসাব করে লিখি যখন $\angle OAP = 25^\circ$ এবং $\angle OBP = 35^\circ$।

অঙ্কন : OP যোগ করি।

প্রমাণ : OA = OP (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAP = \angle OPA$

$\because \angle OAP = 25^\circ$, সুতরাং, $\angle OPA = 25^\circ$

OB = OP (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OBP = \angle OPB$

$\because \angle OBP = 35^\circ$, সুতরাং, $\angle OPB = 35^\circ$

$\angle APB = \angle OPA + \angle OPB = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$

$\angle AOB = 2\angle APB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

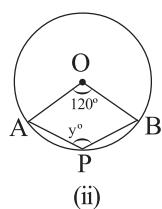
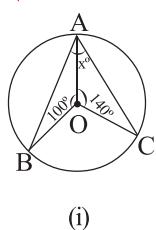
ΔAOB-তে, $\angle OAB + \angle OBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ [ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°]

$\because$ AO = BO [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$

প্রয়োগ : 5. নীচের চিত্রদুটি দেখে x ও y-এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

(i)

(ii)

প্রয়োগ : 6. দুটি সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত যারা পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা AB-এর বিপরীত পার্শ্বে একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। যেখানে, P ও Q বিন্দুদ্বয় AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, BP = BQ

প্রদত্ত : দুটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী সরলরেখা একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে: BP = BQ

অঙ্কন : ধরি, X ও Y যথাক্রমে প্রথম বৃত্ত ও দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র। A, B; A, X; B, X; A,Y; B,Y যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : Δ AXB ও Δ AYB-এর AX = AY [$\because$ সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

BX = BY [$\because$ ☐]

AB সাধারণ বাহু।

$\therefore$ Δ AXB $\cong$ Δ AYB (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

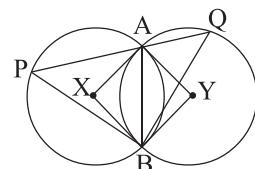
$\therefore$ $\angle$AXB = $\angle$AYB [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

$\therefore \frac{1}{2}\angle AXB = \frac{1}{2}\angle AYB$

আবার, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AXB$ [$\because$ প্রথম বৃত্তের AB উপচাপের দ্বারা গঠিত $\angle$AXB কেন্দ্রস্থ কোণ ও $\angle$APB বৃত্তস্থ কোণ]

অনুরূপভাবে, $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AYB$ [$\because$ দ্বিতীয় বৃত্তের AB উপচাপের দ্বারা গঠিত $\angle$AYB কেন্দ্রস্থ কোণ ও $\angle$AQB বৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore$ $\angle$APB = $\angle$AQB অর্থাৎ $\angle$QPB = $\angle$PQB

$\therefore$ Δ PQB-এর $\angle$QPB = $\angle$PQB $\therefore$ BP = BQ [প্রমাণিত]

[যদি AB-এর একই পার্শ্বে সরলরেখাটি P ও Q বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে তাহলে নিজে ছবি এঁকে প্রমাণ করি BP = BQ]

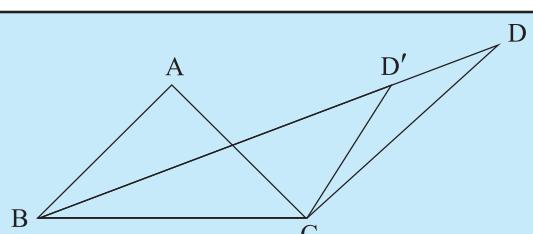
প্রয়োগ : 7. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB = AC; BC-এর যে পার্শ্বে Δ ABC অবস্থিত, সেই পার্শ্বেই Δ DBC এমনভাবে অঙ্কন করা হলো যাতে $\angle$BAC = 2$\angle$BDC হয়। প্রমাণ করি যে, A-কে কেন্দ্র করে AB ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করা হবে তা D বিন্দুগামী হবে অর্থাৎ D বিন্দু ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে। **[নিজে করি]**

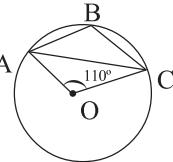
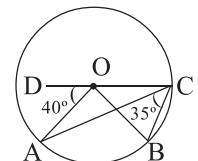
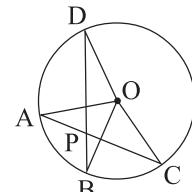
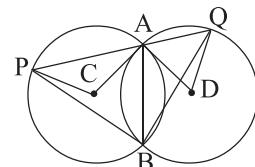
[**উত্তর সংকেত :** ধরি D বিন্দু ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়। $\therefore$ বৃত্তটি BD বা বর্ধিত BD -কে ধরি D′ বিন্দুতে ছেদ করেছে। D′ ও C বিন্দু দুটি যুক্ত করি।

$\therefore$ $\angle$BAC = 2$\angle$BD′C;

কিন্তু $\angle$BAC = 2$\angle$BDC

$\therefore$ $\angle$BD′C = $\angle$BDC , কিন্তু এটা অসম্ভব যদি না D ও D′ বিন্দু সমাপতিত হয়। কারণ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত একটি কোণের সমান হতে পারে না।]

কষে দেখি 7.1

1. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র O এবং BC বাহুর যেদিকে A বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বে কেন্দ্র O অবস্থিত। $\angle BOC = 100^\circ$ হলে $\angle ABC$ ও $\angle ABO$-এর মান হিসাব করে লিখি।

2. পাশের চিত্রে ΔABC-এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle AOC = 110^\circ$; $\angle ABC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

3. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। DC বাহুকে P বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো। $\angle BCP = 108^\circ$ হলে, $\angle BOD$-এর মান হিসাব করে লিখি।

4. পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle AOD = 40^\circ$ এবং $\angle ACB = 35^\circ$; $\angle BCO$ ও $\angle BOD$-এর মান হিসাব করে লিখি ও উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিই।

5. পাশের চিত্রের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle APB = 80^\circ$ হলে, $\angle AOB$ ও $\angle COD$-এর মানের সমষ্টি নির্ণয় করি ও উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিই।

6. পাশের ছবির মতো C ও D কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা C কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং D কেন্দ্রীয় বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে,
(i) $\angle PBQ = \angle CAD$ (ii) $\angle BPC = \angle BQD$

7. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O; প্রমাণ করি যে, $\angle OBC + \angle BAC = 90^\circ$

8. দুটি সমান বৃত্ত একটি অপরটির কেন্দ্রগামী এবং বৃত্তদুটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী সরলরেখা বৃত্ত দুটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, ΔBCD সমবাহু ত্রিভুজ।

9. ΔABC-এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র S এবং $AD \perp BC$ হলে, প্রমাণ করি যে $\angle BAD = \angle SAC$

10. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের দুটি জ্যা AB ও CD পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $\angle AOD + \angle BOC = 2\angle BPC$

    যদি $\angle AOD$ ও $\angle BOC$ পরস্পর সম্পূরক হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, জ্যা দুটি পরস্পর লম্ব।

11. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা-কে বর্ধিত করলে তারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $\angle AOC - \angle BOD = 2\angle BPC$

12. ABCD চতুর্ভুজের A বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হলো যেটি B, C ও D বিন্দু দিয়ে যায়। প্রমাণ করি যে, $\angle CBD + \angle CDB = \frac{1}{2}\angle BAD$

13. ΔABC-এর পরিকেন্দ্র O এবং OD, BC বাহুর উপর লম্ব। প্রমাণ করি যে $\angle BOD = \angle BAC$

14. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

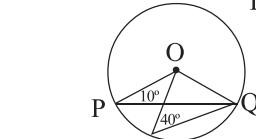
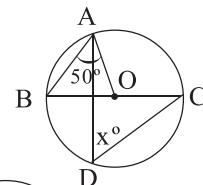
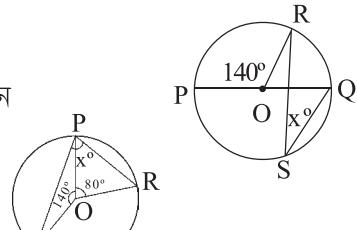
(A) বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PQ ব্যাস হলে, x-এর মান
(a) 140 (b) 40 (c) 80 (d) 20

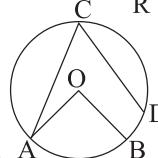
(ii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, x-এর মান
(a) 70 (b) 60 (c) 40 (d) 200

(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং BC ব্যাস হলে, x-এর মান
(a) 60 (b) 50 (c) 100 (d) 80

(iv) ABC ত্রিভুজের O পরিকেন্দ্র। $\angle OAB = 50^\circ$ হলে, $\angle ACB$-এর মান
(a) 50° (b) 100° (c) 40° (d) 80°

(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, $\angle POR$-এর মান
(a) 20° (b) 40° (c) 60° (d) 80°

(B) সত্য বা মিথ্যা লিখি :

(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, $\angle AOB = 2\angle ACD$

(ii) ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ভিতর O বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে OA = OB এবং $\angle AOB = 2\angle ACB$. O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে C বিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একই চাপের উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের ________।

(ii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ও AC জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান। $\angle APB$ ও $\angle DQC$ বৃত্তস্থ কোণ হলে, কোণ দুটির মান ________।

(iii) একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O হলে, যে-কোনো একটি বাহু দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণের মান ________।

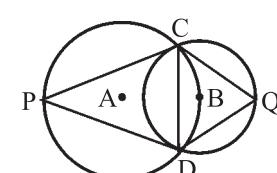
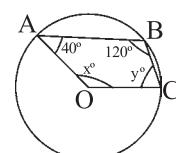
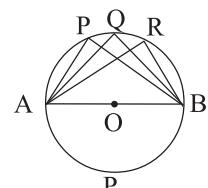
15. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle OAB = 40^\circ$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle BCO = y^\circ$ এবং $\angle COA = x^\circ$ হলে, x ও y-এর মান নির্ণয় করি।

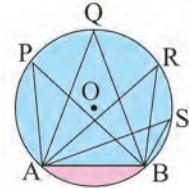
(ii) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু। $\angle BAC = 40^\circ$ হলে, $\angle BOD$-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর A, B, C তিনটি বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে AOCB একটি সামান্তরিক। $\angle AOC$-এর মান নির্ণয় করি।

(iv) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle ABC = 120^\circ$; বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. হলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(v) A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় C এবং D বিন্দুতে ছেদ করে। A কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর অপর বৃত্তের কেন্দ্র B অবস্থিত। $\angle CQD = 70^\circ$ হলে, $\angle CPD$-এর মান নির্ণয় করি।

রাবেয়ার মতো শাকিলও স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এবং ওই বৃত্তের একটি ব্যাস AB এঁকেছে। তৃষা ওই বৃত্তে তিনটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ∠APB, ∠AQB ও ∠ARB অঙ্কন করেছে।

প্রতিটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ [ ] সমকোণ [কোণগুলি মেপে লিখি]

∴ অর্থাৎ অর্ধবৃত্তস্থ সকল কোণই [ ] [সমান / অসমান]

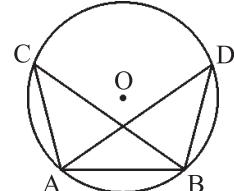
আমি একই বৃত্তাংশস্থ অনেকগুলি বৃত্তস্থ কোণ আঁকি এবং চাঁদার সাহায্যে মেপে কোণগুলির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের চেষ্টা করি।

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ∠APB, ∠AQB, ∠ARB ও ∠ASB হলো ABSRQP বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ।

চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি,

∠APB [ ] ∠AQB [ ] ∠ARB = ∠ASB [= / ≠ লিখি]

আমি খাতায় একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ একাধিক কোণ এঁকে ও চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণ [ ] [সমান / অসমান] **[নিজে এঁকে ও মেপে লিখি]**

হাতেকলমে

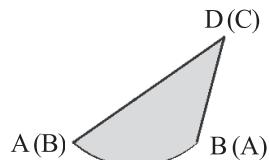
(1) সাদা আর্টপেপারে একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকলাম।

(2) এবার পাশের ছবির মতো O কেন্দ্রীয় বৃত্তে A ও B দুটি বিন্দু যোগ করে AB জ্যা পেলাম।

(3) এবার AB জ্যা-এর একই দিকে বৃত্তের C ও D বিন্দুতে দুটি কোণ ∠ACB ও ∠ADB আঁকলাম। অর্থাৎ ∠ACB ও ∠ADB হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ACDB বৃত্তাংশস্থ দুটি বৃত্তস্থ কোণ।

(4) ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে ∠ACB ও ∠ADB কোণদুটি এঁকে কেটে নিলাম।

(5) এবার ট্রেসিং পেপারের কোণদুটি একটির উপর অপরটি এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু C ও D মিশে যায়।

দেখছি, ∠ACB ও ∠ADB কোণদুটি পরস্পর মিশে গেছে।

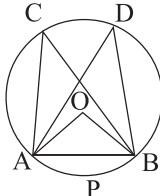
∴ হাতেকলমে পেলাম, ∠ACB = ∠ADB

∴ হাতেকলমে পেলাম, একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণ সমান।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 35. একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণের মান সমান।

প্রদত্ত : মনে করি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ যে-কোনো দুটি কোণ ABDC বৃত্তাংশে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে : ACDB বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণই সমান।

যেহেতু $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ ওই বৃত্তাংশস্থ যে-কোনো দুটি বৃত্তস্থ কোণ, সুতরাং $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ পরস্পর সমান প্রমাণ করলেই উপপাদ্যটি প্রমাণিত হবে।

অঙ্কন : O, A বিন্দুদ্বয় ও O, B বিন্দুদ্বয় সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : APB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত $\angle AOB$ কেন্দ্রস্থ কোণ এবং $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$

এবং $\angle AOB = 2\angle ADB$

সুতরাং, $2\angle ACB = 2\angle ADB$

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$

নিজে করি 7.3

(1) প্রমাণ করি যে, একই বৃত্তের সমান সমান চাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ সকল কোণই সমান।

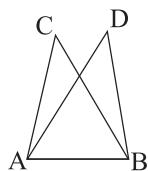
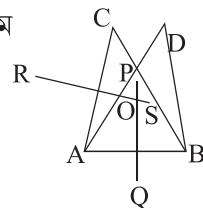
(2) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের একাধিক বৃত্তস্থ কোণ সমান হলে সেই কোণগুলি যে যে চাপের দ্বারা গঠিত সেই, চাপগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান।

আমরা হাতেকলমে যাচাই করে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করলাম যে একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণের মান সমান।

এই উপপাদ্যের বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ যে-কোনো দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে দুটি সমান কোণ উৎপন্ন করলে, ওই বিন্দু চারটি কি সমবৃত্তস্থ হবে?

হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

(i) সাদা কাগজে A ও B যে-কোনো দুটি বিন্দু যোগ করে AB সরলরেখাংশ পেলাম। AB সরলরেখাংশ তার একই দিকে C ও D বিন্দুতে দুটি সমান কোণ $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ উৎপন্ন করেছে।

(ii) কাগজ ভাঁজ করে হাতেকলমে AB ও AC সরলরেখাংশ দুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ এবং RS পেলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(iii) স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি, AO [ ] OB [ ] OC [ ] OD

[নিজে হাতেকলমে করে = / ≠ বসাই]

(iv) O-কে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C ও D বিন্দুগামী হবে।

সুতরাং পেলাম, A, B ও C তিনটি অসমরেখ বিন্দুগামী নির্দিষ্ট বৃত্ত D বিন্দুগামী হবে।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, A, B, D ও C বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 36. *দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে দুটি সমান কোণ উৎপন্ন করলে ওই চারটি বিন্দু সমবৃত্তস্থ হবে।* ***[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]***

প্রদত্ত দুটি বিন্দু A ও B-এর সংযোজক সরলরেখাংশ C ও D বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে ।

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$

প্রমাণ করতে হবে : A, B, D ও C বিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

প্রমাণ : A, B ও C তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে নির্দিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করি।

যদি নির্দিষ্ট বৃত্তটি D বিন্দুগামী না হয় তবে বৃত্তটি AD-কে বা বর্ধিত AD-কে একটি বিন্দুতে ছেদ করবে।

ধরি, বৃত্তটি AD-কে বা বর্ধিত AD-কে D' বিন্দুতে ছেদ করেছে।

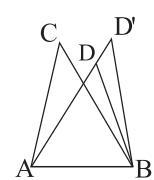
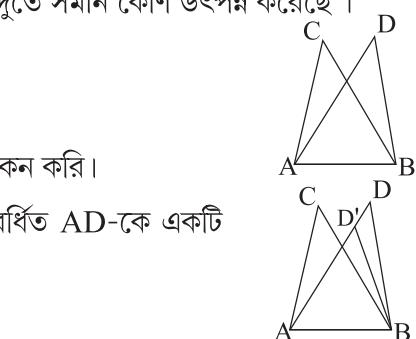
$\therefore$ A, B, D' ও C বিন্দুচারটি সমবৃত্তস্থ। D' ও B বিন্দু দুটি সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করি।

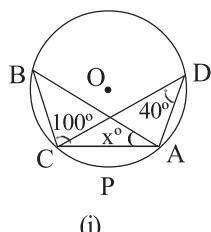
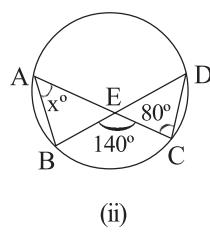
$\therefore \angle ACB = \angle AD'B$ (একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ)

কিন্তু $\angle ACB = \angle ADB$

$\therefore \angle AD'B = \angle ADB$

কিন্তু ইহা সম্ভব নয়, যদি না D ও D' বিন্দুদ্বয় সমাপতিত হয়।

$\therefore$ A, B, D ও C বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

[কারণ একটি ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থকোণের সমান হতে পারে না]

প্রয়োগ : 8. নীচের বৃত্তের ছবি দেখি ও x-এর মান নির্ণয় করি। O বৃত্তের কেন্দ্র।

(i)

(ii)

(i) O বৃত্তের কেন্দ্র।

দুটি বৃত্তস্থ কোণ $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ উপচাপ CPA-এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ কোণ।

$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 40^\circ$ ($\because$ দেওয়া আছে $\angle ADC = 40^\circ$)

এবং ΔABC-এর $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

$\therefore 40^\circ + 100^\circ + x = 180^\circ$

বা, $x^\circ = 180^\circ - 140^\circ =$ ☐

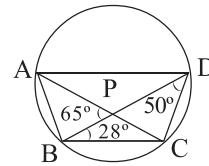
$\therefore x = 40$

একইভাবে (ii) নং ছবির x-এর মান হিসাব করে লিখি।

প্রয়োগ : 9. পাশের ছবির $\angle BDC = 50^\circ$, $\angle APB = 65^\circ$, $\angle CBD = 28^\circ$; $\angle ADB$, $\angle ABD$, $\angle BAC$, $\angle ACB$, $\angle CAD$ এবং $\angle ACD$-এর মান নির্ণয় করি।

$\angle BAC = \angle BDC = \square$ [যেহেতু, একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ]

আবার, $\angle CAD = \square = 28^\circ$ [যেহেতু, একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ]

ΔBPC-এর, বহিঃস্থ $\angle APB = \angle PBC + \angle PCB$.

$\therefore 65^\circ = 28^\circ + \angle ACB$; $\therefore \angle ACB = \square$

$\therefore \angle ADB = \angle ACB = \square$ [একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ]

ΔABP-এর, $\angle ABP + \angle BPA + \angle PAB = 180^\circ$

$\therefore \angle ABP = \square$

$\therefore \angle ABD = \square$ [নিজে করি]

$\angle ACD = \angle ABD = \square$ **[∵ একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ বৃত্তস্ত কোণ]**

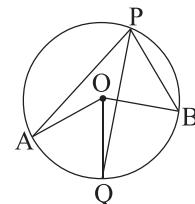
প্রয়োগ : 10. প্রমাণ করি যে-কোনো বৃত্তে একই বৃত্তাংশস্থ সমস্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের APB বৃত্তাংশে অবস্থিত একটি কোণ $\angle APB$. $\angle APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে: PQ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী।

প্রমাণ : $\angle APQ = \angle BPQ$ [∵ PQ, $\angle APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\angle AOQ = 2\angle APQ$; আবার $\angle BOQ = 2\angle BPQ$

যেহেতু, $\angle APQ = \angle BPQ$, সুতরাং $\angle AOQ = \angle BOQ$

$\therefore$ বৃত্তচাপ AQ = বৃত্তচাপ BQ (যেহেতু চাপ AQ ও চাপ BQ কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে)

$\therefore$ AQB বৃত্তচাপের মধ্যবিন্দু Q.

AQB নির্দিষ্ট হলে, Q একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

$\therefore$ APB বৃত্তচাপের উপর P বিন্দুর যে-কোনো অবস্থানের জন্য $\angle APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক উহার বিপরীত চাপের মধ্যবিন্দুগামী অর্থাৎ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হবে।

প্রয়োগ : 11. পাশের চিত্রের একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা। BA ও DC-কে বর্ধিত করলে পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে $\angle PCB = \angle PAD$

প্রদত্ত : একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা। BA ও DC-কে বর্ধিত করলে পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

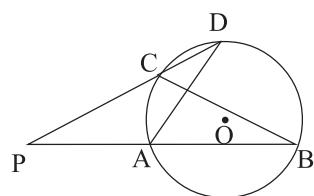
প্রমাণ করতে হবে : $\angle PCB = \angle PAD$

প্রমাণ : $\angle BCD = \angle BAD$ (একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ)

আবার $\angle PCB = 180^\circ - \angle BCD$

এবং $\angle PAD = 180^\circ - \angle BAD$

$\because \angle BCD = \angle BAD$, সুতরাং $180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$

$\therefore \angle PCB = \angle PAD$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 12. ABC সমবাহু ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত। BC উপচাপের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ করি যে PA = PB + PC

প্রদত্ত : ABC সমবাহু ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত। BC উপচাপের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে : PA = PB + PC

অঙ্কন : PA-এর থেকে PB-এর সমান করে PX অংশ কেটে নিলাম। B, X বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : PB = PX [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore \angle PBX = \angle PXB$ ________ (I)

আবার, $\angle ACB = \angle APB$ [একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ]

$= 60^\circ$ [যেহেতু, ABC সমবাহু ত্রিভুজ, সুতরাং $\angle ACB = 60^\circ$]

$\therefore \angle PBX + \angle PXB = 180^\circ - 60^\circ =$ ☐

$\therefore \angle PBX = \angle PXB = 60^\circ$ [(I) থেকে পেলাম]

$\therefore$ PBX সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore \angle PBC = \angle PBX - \angle CBX = \angle CBA - \angle CBX = \angle XBA$ ________ (II)

ΔPBC ও ΔABX-এর মধ্যে AB = BC [$\because \Delta ABC$ সমবাহু]

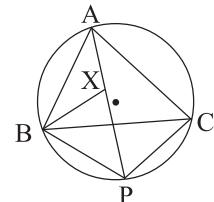
$\angle ABX = \angle PBC$ [(II) থেকে পেলাম]

BX = PB ($\because \Delta BPX$ সমবাহু)

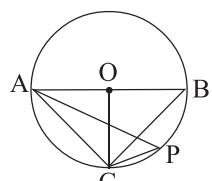
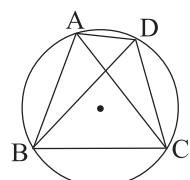
$\therefore \Delta BPC \cong \Delta ABX$ [সর্বসমতার S-A-S শর্তনুসারে]

সুতরাং, AX = PC

$\therefore$ PA = PX + XA = PB + PC **[প্রমাণিত]**

কষে দেখি 7.2

1. পাশের ছবিতে $\angle DBA = 40^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ এবং $\angle CAD = 20^\circ$; $\angle DCA$ ও $\angle BCA$-এর মান নির্ণয় করি। $\angle BAD$ ও $\angle DCB$-এর মানের সমষ্টি কত হবে হিসাব করে দেখি।

2. পাশের চিত্রে AOB বৃত্তের ব্যাস এবং O বৃত্তের কেন্দ্র। OC ব্যাসার্ধ AB-এর উপর লম্ব। যদি উপচাপ CB-এর উপর কোনো বিন্দু P হয়, তবে $\angle BAC$ ও $\angle APC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

3. ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু এবং BC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব AD-কে বর্ধিত করলে ΔABC-এর পরিবৃত্তকে G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, OD = DG

4. ΔABC-এর অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র I; বর্ধিত AI ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $PB = PC = PI$

5. তিমির দুটি বৃত্ত এঁকেছে যারা পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু দিয়ে দুটি সরলরেখা টানলাম যারা একটি বৃত্তকে A, B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে যথাক্রমে C, D বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে $\angle AQC = \angle BQD$

6. একটি বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটি পরস্পর লম্ব। AB ও CD জ্যা দুটির ছেদবিন্দু P থেকে AD-এর উপর অঙ্কিত লম্বকে বর্ধিত করলে সেটি BC-কে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে, E, BC-এর মধ্যবিন্দু।

7. যদি ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $AB = DC$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $AC = BD$ হবে।

8. O কেন্দ্রীয় বৃত্তে OA ব্যাসার্ধ এবং AQ একটি জ্যা। বৃত্তের উপর C একটি বিন্দু। O, A, C বিন্দুগামী বৃত্ত AQ জ্যা-কে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $CP = PQ$

9. একটি বৃত্তে ABC ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত। AX, BY এবং CZ যথাক্রমে $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং বৃত্তে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, AX, YZ-এর উপর লম্ব।

10. একটি বৃত্তে ABC ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত। $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি ΔXYZ -এর, $\angle YXZ = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}$

11. ΔABC-এর A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব BC বাহুকে D বিন্দুতে এবং B বিন্দু থেকে CA বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব CA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, A, B, D, E বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

12. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

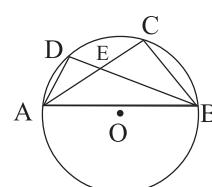
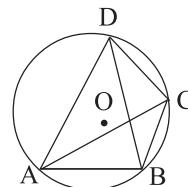
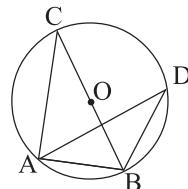
(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র ; $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle DAB = 35^\circ$ এবং $\angle DBC = x^\circ$ হলে, x-এর মান

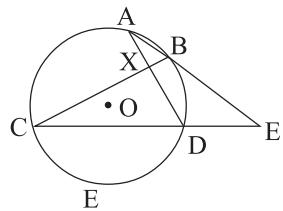
(a) 35 (b) 70 (c) 65 (d) 55

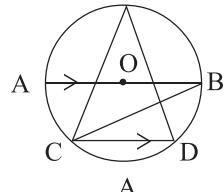
(ii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle BAD = 65^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$ হলে, $\angle CBD$-এর মান

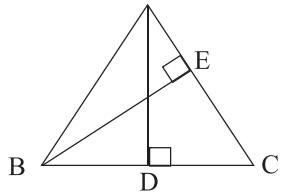
(a) 65° (b) 45° (c) 40° (d) 20°

(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle AEB = 110^\circ$ এবং $\angle CBE = 30^\circ$ হলে, $\angle ADB$ -এর মান

(a) 70° (b) 60° (c) 80° (d) 90°

(iv) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle BCD = 28^o$, $\angle AEC = 38^o$ হলে, $\angle AXB$-এর মান

(a) 56^o (b) 86^o (c) 38^o (d) 28^o

(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। AB || CD. $\angle ABC = 25^o$ হলে, $\angle CED$ -এর মান

(a) 80^o (b) 50^o (c) 25^o (d) 40^o

(B) সত্য বা মিথ্যা লিখি :

(i) পাশের চিত্রে AD ও BE যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC ও AC বাহুর উপর লম্ব। A, B, D, E বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

(ii) ABC ত্রিভুজের AB = AC; BE ও CF যথাক্রমে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং AC ও AB বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। B, C, E, F বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ নয়।

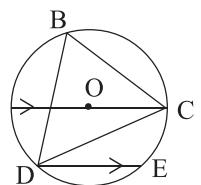
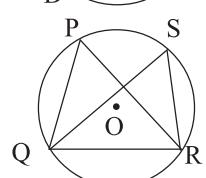
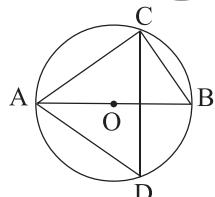
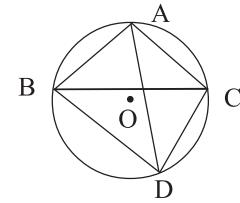
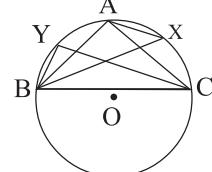
(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ _________।

(ii) দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করলে বিন্দু চারটি _________ হবে।

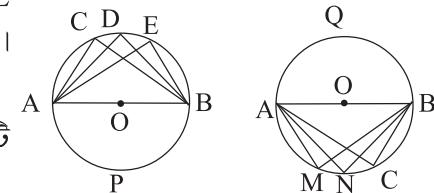
(iii) একই বৃত্তে দুটি চাপ দ্বারা উৎপন্ন বৃত্তস্থ কোণ দুটি সমান হলে চাপ দুটির দৈর্ঘ্য _________।

13. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)

(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র, AC ব্যাস এবং জ্যা DE ও ব্যাস AC সমান্তরাল। $\angle CBD = 60^o$ হলে, $\angle CDE$-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) পাশের চিত্রে $\angle PQR$-এর সমদ্বিখণ্ডক QS; $\angle SQR = 35^o$ এবং $\angle PRQ = 32^o$ হলে , $\angle QSR$-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। AB ও CD পরস্পর লম্ব এবং $\angle ADC = 50^o$; $\angle CAD$-এর মান নির্ণয় করি।

(iv) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB = AC ; ∠ABC = 32° হলে, ∠BDC-এর মান নির্ণয় করি।

(v) পাশের চিত্রে BX ও CY যথাক্রমে ∠ABC ও ∠ACB-এর সমদ্বিখণ্ডক। AB = AC এবং BY = 4সেমি. হলে, AX-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

রাবেয়া একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকেছে। শাকিল রাবেয়ার আঁকা বৃত্তে একটি ব্যাস AB আঁকল।

এই O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস বা APB বৃত্তচাপ কীরূপ বিভিন্ন বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করবে এঁকে ও মেপে লিখি।

মেপে দেখছি, AB ব্যাস বা APB বৃত্তচাপ বৃত্তের উপর C, D ও E প্রতিটি বিন্দুতে ☐ ডিগ্রি মাপের বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করেছে। [নিজে এঁকে ও মেপে লিখি]

আবার AB ব্যাস বা AQP বৃত্তচাপ বৃত্তের উপর M, N ও S প্রতিটি বিন্দুতে ☐ ডিগ্রি মাপের বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করেছে।

3 এই ∠ACB, ∠ADB, ∠AEB, ∠AMB, ∠ANB ও ∠ASB কোণগুলি অর্থাৎ একটি বৃত্তের ব্যাস যে-কোনো অর্ধবৃত্তে যে সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করে তাদের কী বলা হয়?

একটি বৃত্তের ব্যাস অর্ধবৃত্তে যে সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করে তাকে **অর্ধবৃত্তস্থ কোণ** বলা হয়। এখানে ∠ACB, ∠ADB, ∠AEB এবং ∠AMB, ∠ANB ও ∠ASB প্রত্যেকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

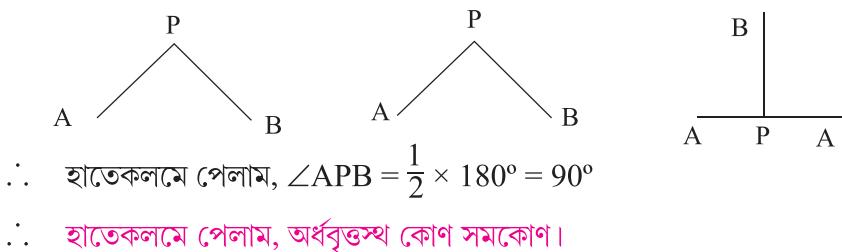
হাতেকলমে যাচাই করে দেখি যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

হাতেকলমে

(1) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে যে-কোনো একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ∠APB আঁকলাম।

(2) ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে দুটি ∠APB এঁকে কেটে নিলাম এবং O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ব্যাসের উপর O বিন্দুতে কোণদুটি নীচের ছবির মতো পাশাপাশি বসিয়ে দেখছি ∠APB, কোণদুটি পরস্পর সম্পূরক এবং সমান। (যেহেতু একই মাপের কোণ)
∴ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

∴ হাতেকলমে পেলাম, $\angle APB = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

∴ হাতেকলমে পেলাম, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 37. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle ACB$ যে-কোনো একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

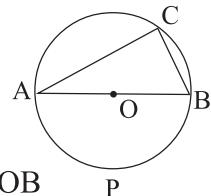
প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ACB = 1$ সমকোণ।

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\overparen{APB}$ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণটি $\angle AOB$ এবং $\angle ACB$ ওই $\overparen{APB}$ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$ .... (I)

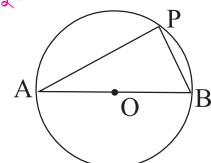
যেহেতু AB একটি সরলরেখাংশ, সুতরাং $\angle AOB$ একটি সরলকোণ । $\therefore \angle AOB = 2$ সমকোণ

সুতরাং, $2\angle ACB = 2$ সমকোণ [I থেকে পেলাম]

$\therefore \angle ACB = 1$ সমকোণ [প্রমাণিত]

> অন্য একটি যে-কোনো O কেন্দ্রীয় বৃত্তে $\angle PQR$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $\angle PQR = 90°$। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 13. একটি বৃত্তের ব্যাস AB এবং P বৃত্তের উপর যে-কোনো একটি বিন্দু। $\angle PAB = 30°$ হলে, $\angle PBA$-এর মান নির্ণয় করি।

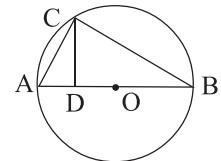
উত্তর : $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle APB = 90°$; $\angle PAB = 30°$

$\therefore \angle PBA = 90° - 30° = 60°$

প্রয়োগ : 14. পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ব্যাস। C বৃত্তের উপর যে-কোনো একটি বিন্দু। $\angle BAC = 50°$ এবং CD, AB-এর উপর লম্ব হলে, $\angle BCD$-এর মান নির্ণয় করি।

উত্তর : $\angle ACB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। সুতরাং $\angle ACB = 90°$

সমকোণী ΔACD-তে, $\angle ADC = 90°$, $\angle DAC = 50°$, সুতরাং

$\angle ACD = 90° - 50° = 40°$

আবার, $\angle ACB = 90°$; সুতরাং $\angle BCD = 90° - 40° = 50°$

প্রয়োগ : 15. পাশের চিত্রে AB ও CD সরলরেখাংশ দুটি বৃত্তের কেন্দ্র O-তে ছেদ করেছে। যদি $\angle AOC = 80°$ $\angle CDE = 40°$ হয়, তাহলে (i) $\angle DCE$ ও (ii) $\angle ABC$-এর মান নির্ণয় করি।

$\angle CED$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle CED = 90°$

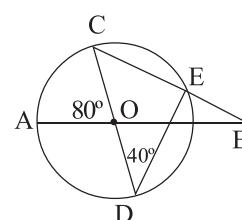
সমকোণী ΔCED-তে, $\angle CED = 90°$, $\angle CDE = 40°$,

$\therefore \angle DCE = 90° - 40° = 50°$ ....(i)

ΔBOC-তে, বহিঃস্থ $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB$

$80° = \angle OBC + 50°$ ($\because \angle DCE = 50°$)

$\therefore \angle OBC = 30°$

সুতরাং, $\angle ABC = 30°$ .... (ii)

প্রয়োগ : 16. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ACB$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

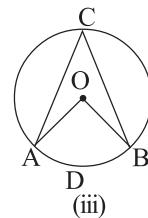
প্রমাণ : যেহেতু, ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ,

$\therefore \overset{\frown}{ADB}$ একটি উপচাপ।

$\therefore$ ADB উপচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$, 2 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

আবার, ADB উপচাপের দ্বারা গঠিত পরিধিস্থ কোণ $\angle ACB$; $\angle AOB < 180^\circ$

অর্থাৎ , $2\angle ACB < 180^\circ$ $\therefore \angle ACB < 90^\circ$

$\therefore \angle ACB$, 1 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ। **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 17. প্রমাণ করি যে অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 18. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

প্রদত্ত : ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB = 90^\circ$ এবং O অতিভুজ AB-এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে : OA = OB = OC

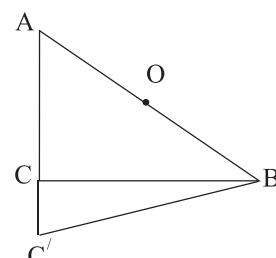
অঙ্কন : O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A ও B বিন্দুগামী। যদি বৃত্তটি C বিন্দুগামী না হয়, ধরি বৃত্তটি AC-কে বা বর্ধিত AC-কে C′ বিন্দুতে ছেদ করে। B , C′ যুক্ত ক রি

$\therefore \angle AC'B = 90^\circ$ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ]

আবার $\angle ACB = 90^\circ$

$\therefore \angle ACB = \angle AC'B$

এটা অসম্ভব, কারণ কোনো ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ একটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হতে পারে না।

এটা সম্ভব হবে যদি C ও C′ একই বিন্দু হয়।

$\therefore$ বৃত্তটি C বিন্দুগামী

$\therefore$ OA = OB = OC [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 19. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি সমকৌণিক বিন্দু দিয়ে যাবে। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 20. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে একটি বিষমবাহু ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর দুটি বাহুকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত দুটির ছেদবিন্দু তৃতীয় বাহুর উপর অবস্থিত হবে।

প্রদত্ত : Δ ABC-এর AC বৃহত্তম বাহু।

AB বাহুকে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যা AC-কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে : BC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়ে যাবে।

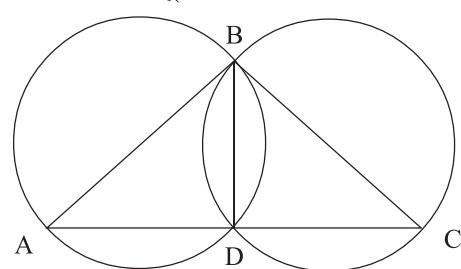
অঙ্কন : B, D বিন্দুদ্বয় সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : $\angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ।

$\therefore \angle ADB = 1$ সমকোণ

$\therefore \angle CDB = 1$ সমকোণ

যেহেতু, CDB সমকোণী ত্রিভুজে $\angle CDB = 1$ সমকোণ, সুতরাং BC বৃত্তের ব্যাস।

$\therefore$ BC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অবশ্যই D বিন্দু দিয়ে যাবে।

প্রয়োগ :21. ABC ও ADC সমকোণী ত্রিভুজদুটির সাধারণ অতিভুজ AC; প্রমাণ করি যে $\angle CAD = \angle CBD$;

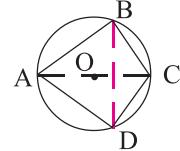
প্রদত্ত : ABC ও ADC সমকোণী ত্রিভুজের সাধারণ অতিভুজ AC।

প্রমাণ করতে হবে : $\angle CAD = \angle CBD$

প্রমাণ : ΔABC -এর $\angle ABC = 90^\circ$

$\therefore$ AC-কে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে B বিন্দুগামী হবে। অনুরূপে, AC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্তটি D বিন্দুগামী।

$\angle CAD$ ও $\angle CBD$ কোণ দুটি বৃত্তের একই উপচাপ DC-এর দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle CAD = \angle CBD$ **(প্রমাণিত)**

কষে দেখি 7.3

1. ABC ত্রিভুজের B কোণটি সমকোণ। যদি AC-কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি যা AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে নীচের তথ্যগুলির মধ্যে কোনটি ঠিক লিখি—
   (i) $AB > AD$ (ii) $AB = AD$ (iii) $AB < AD$

2. প্রমাণ করি যে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুটির যে-কোনোটিকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অসমান বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. সাহানা দুটি বৃত্ত এঁকেছে যারা পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। PA ও PB যথাক্রমে দুটি বৃত্তের ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে A, Q ও B বিন্দুত্রয় সমরেখ।

4. রজত একটি সরলরেখাংশ PQ অঙ্কন করেছে যার মধ্যবিন্দু R এবং সে PR ও PQ-কে ব্যাস করে দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে। আমি P বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা প্রথম বৃত্তকে S বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় বৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করেছে। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $PS = ST$

5. একটি বৃত্তের উপর তিনটি বিন্দু P, Q ও R অবস্থিত। PQ ও PR-এর উপর P বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব দুটি বৃত্তকে যথাক্রমে S ও T বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $RQ = ST$

6. ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস AP; BE ও CF যথাক্রমে AC ও AB বাহুর উপর লম্ব এবং তারা পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, BPCQ একটি সামান্তরিক।

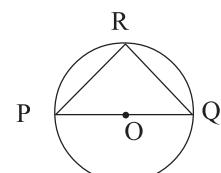
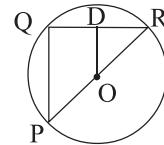
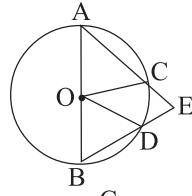
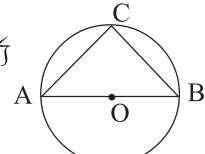
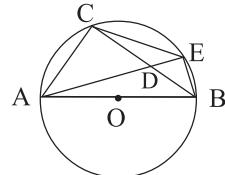
7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক ও বহির্সমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, PQ বৃত্তের একটি ব্যাস।

8. AB এবং CD একটি বৃত্তের দুটি ব্যাস। প্রমাণ করি যে, ACBD একটি আয়তাকার চিত্র।

9. প্রমাণ করি, একটি রম্বসের বাহুগুলিকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তগুলি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

10. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V. S. A.)**

   (A) বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

   (i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে PQ একটি ব্যাস এবং $PR = RQ$; $\angle RPQ$ -এর মান
   (a) 30° (b) 90° (c) 60° (d) 45°

(ii) QR বৃত্তের একটি জ্যা এবং POR বৃত্তের একটি ব্যাস।
OD, QR বাহুর উপর লম্ব। OD = 4 সেমি. হলে, PQ-এর দৈর্ঘ্য
(a) 4সেমি. (b) 2সেমি. (c) 8সেমি. (d) কোনটিই নয়

(iii) AOB বৃত্তের ব্যাস। AC এবং BD জ্যা দুটি বর্ধিত করলে E বিন্দুতে
মিলিত হয়। $\angle COD = 40^\circ$ হলে, $\angle CED$-এর মান
(a) 40° (b) 80° (c) 20° (d) 70°

(iv) AOB বৃত্তের ব্যাস। AC = 3 সেমি. ও BC = 4 সেমি. হলে AB -এর দৈর্ঘ্য
(a) 3 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 5 সেমি. (d) 8 সেমি.

(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। $\angle BCE = 20^\circ$,
$\angle CAE = 25^\circ$ হলে , $\angle AEC$-এর মান নির্ণয় করি।
(a) 50° (b) 90° (c) 45° (d) 20°

(B) সত্য বা মিথ্যা লিখি :

(i) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

(ii) ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু O এবং OA = OB = OC; AB বাহুকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি C বিন্দু দিয়ে যাবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ________।

(ii) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ ________।

(iii) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি ________ বিন্দু দিয়ে যাবে।

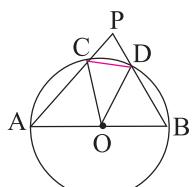
11. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S. A.)**

(i) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC; AB বাহুকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে, BD = 4 সেমি. হলে CD-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(ii) একটি বৃত্তে দুটি জ্যা AB এবং AC পরস্পর লম্ব। AB = 4 সেমি. ও AC = 3 সেমি. হলে , বৃত্তটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iii) একটি বৃত্তে দুটি জ্যা PQ এবং PR পরস্পর লম্ব। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি. হলে, জ্যা QR-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iv) AOB বৃত্তের একটি ব্যাস। C বৃত্তের উপর একটি বিন্দু। $\angle OBC = 60^\circ$ হলে $\angle OCA$-এর মান নির্ণয় করি।

(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। জ্যা CD-এর দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান। AC ও BD-কে বর্ধিত করায় P বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle APB$-এর মান নির্ণয় করি।

8 লম্ব বৃত্তাকার চোঙ
RIGHT CIRCULAR CYLINDER

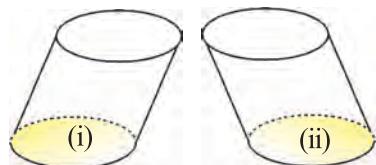
আমাদের বাড়ির পড়ার ঘরের টেবিলে একটি সুন্দর কাঠের পেনস্ট্যান্ড রাখা আছে। এটি অনেকদিনের পুরোনো। এটির কিছুটা অংশ ভেঙে গেছে। তাই আরও একটি পেনস্ট্যান্ডের প্রয়োজন।

আমি ও দিদি দুজনে মিলে ঠিক করেছি যে ওইরকম একটি পেনস্ট্যান্ড তৈরি করব।

(1) কিন্তু এই পেনস্ট্যান্ড কীরূপ আকারের?

এই পেনস্ট্যান্ডটির আকার চোঙ বা বেলনের মতো। পাশের চিত্রের পেনস্ট্যান্ডটি **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** (Right Circular Cylinder)-এর মতো।

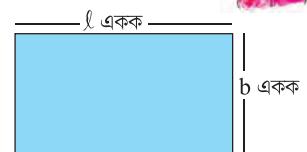
কিন্তু পাশের (i) ও (ii) নং চিত্রের চোঙ (Cylinder) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নয়।

(2) কিন্তু শুধু চোঙ বলা থাকলে কোন চোঙ বুঝব?

শুধু চোঙ বলা থাকলে এখানে **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** বুঝব।

একটি আয়তক্ষেত্রাকার রঙিন কাগজ আছে।

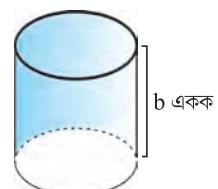
(3) এই পেনস্ট্যান্ডটির বাইরের চারপাশ মুড়তে (উপর ও নীচে বাদ দিয়ে) ন্যূনতম কতটা রঙিন কাগজ লাগবে কীভাবে পাব?

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতল নির্ণয়ের মাধ্যমে জানব।

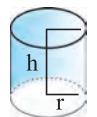
আমরা হাতেকলমে লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

(1) একটি আয়তক্ষেত্রাকার রঙিন কাগজ নিলাম।
ধরি, আয়তক্ষেত্রাকার ওই কাগজের দৈর্ঘ্য ℓ একক এবং প্রস্থ b একক।

(2) ওই আয়তক্ষেত্রাকার কাগজটি পাশের ছবির মতো পেনস্ট্যান্ডের বাইরের চারপাশের গা দিয়ে প্রস্থ বরাবর মুড়ে সেলোটেপ দিয়ে প্রান্তদুটি জুড়ে দিলাম।

দেখছি, আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের দৈর্ঘ্য $= \ell$ একক $=$ লম্ব বৃত্তকার চোঙের ভূমির পরিধি $= 2\pi r$ একক [যেখানে r একক = লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য]

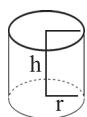
আবার, আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের প্রস্থ = b একক = চোঙের উচ্চতা (ধরি h একক)

$\therefore$ ওই আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $= \ell \times b$ বর্গ একক
$= 2\pi r \times h$ বর্গ একক $= 2\pi rh$ বর্গ একক

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধ মানে ভূমির ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $2\pi rh$ [যেখানে r = লম্ব বৃত্তকার চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য, h = লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা]

বুঝেছি, চাকতির (পেনস্ট্যান্ডের তলা) ব্যাসার্ধ r একক হলে এবং h একক উচ্চতার পেনস্ট্যান্ডটির বাইরের চারপাশ রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে ন্যূনতম $2\pi rh$ বর্গ একক কাগজ লাগবে।

4 কিন্তু লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কী হবে?

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের একটি বক্রতল বা পার্শ্বতল এবং দুটি একই ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার সমতল থাকে।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh$ [যেখানে $r =$ চোঙের বৃত্তাকার তলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং $h =$ চোঙের উচ্চতা]

$= 2\pi r \times h$

$=$ চোঙের বৃত্তাকার তলের পরিধি $\times$ উচ্চতা

$\therefore$ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$=$ পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $+$ দুটি বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$ [যেখানে $r =$ চোঙের বৃত্তাকার তলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং $h =$ চোঙের উচ্চতা]

$= 2\pi r\,(h+r)$

কিন্তু আমরা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আকৃতির যে পেনস্ট্যান্ডটি কাগজ দিয়ে মুড়লাম সেটি একমুখ খোলা।

$\therefore$ ওই পেনস্ট্যান্ডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh + \pi r^2$ [$r =$ চোঙের বৃত্তাকার তলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং $h =$ চোঙের উচ্চতা]

প্রয়োগ : 1. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং উচ্চতা 21 সেমি. হলে , চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল কী হবে, হিসাব করে লিখি।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{12}{2}$ সেমি. $= 6$ সেমি.

$\therefore$ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \pi \times 6 \times 21$ বর্গ সেমি.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 6 \times 21$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 2. যে চোঙের ভূমির পরিধি 44 মিটার এবং উচ্চতা 14 মিটার, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল কী হবে, হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 3. একটি ঢাকনাসমেত চোঙাকৃতি জলের ট্যাঙ্কের ভূমির ক্ষেত্রফল 616 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 21 মিটার। হিসাব করে ওই ট্যাঙ্কের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল লিখি।

ধরি, জলের ট্যাঙ্কের বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r$ মিটার

$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ মিটার

শর্তানুসারে, $\pi r^2 = 616$

বা, $\frac{22}{7} \times r^2 = 616$

বা, $r^2 = 616 \times \frac{7}{22}$ $\quad\therefore r = \square$

$\therefore$ জলের ট্যাঙ্কের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= (2\pi r^2 + 2\pi rh)$ বর্গ মিটার [যেখানে, চোঙের উচ্চতা $= h$ মিটার]

$= 2\times \frac{22}{7} \times r\,(r + h)$ বর্গ মিটার

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14\,(14 + 21)$ বর্গ মিটার

$= \square$ বর্গ মিটার

প্রয়োগ : 4. যদি কোনো ঢাকনাসমেত চোঙাকৃতি পাত্রের ভূমির পরিধি 22 ডেকামিটার এবং উচ্চতা 5 ডেকামিটার হয়, তবে ওই পাত্রের বাইরের সমগ্রতল রং করতে কতটা পরিমাণ জায়গা রং করতে হবে, হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 5. (i) একটি একমুখ খোলা লম্ব বৃত্তাকার পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1474 বর্গ সেমি.। পাত্রটির ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হলে, উচ্চতা কত হবে, হিসাব করে লিখি।

(ii) আবার পাত্রটি যদি দুই মুখ বন্ধ হতো, তবে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হতো হিসাব করে লিখি।

(i) লম্ব বৃত্তাকার পাত্রের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{14}{2}$ সেমি. $= 7$ সেমি.

ধরি,পাত্রটির উচ্চতা h সেমি.

$\therefore$ পাত্রটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= (\frac{22}{7}\times7^2 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times h)$ বর্গ সেমি.

$= (154 + 44h)$ বর্গ সেমি.

শর্তানুসারে, $154 + 44h = 1474$

$\therefore h =$ ☐ **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

$\therefore$ পাত্রটির উচ্চতা 30 সেমি.।

যদি পাত্রটির দুই মুখ বন্ধ হতো তখন ওই পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= পাত্রের উপরিতলের ক্ষেত্রফল + 1474 বর্গ সেমি.

$= (\frac{22}{7} \times 7^2 + 1474)$ বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 6. স্টিলের পাতলা চাদর দিয়ে তৈরি ঢাকনাসমেত একটি ড্রামের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 4.2 ডেসিমি.। যদি ড্রামটি তৈরি করতে 112.20 বর্গ ডেসিমি. চাদর লাগে, তবে ড্রামটির উচ্চতা কত হবে তা হিসাব করে লিখি। আবার 1 বর্গ মি. স্টিলের দাম 25 টাকা হলে, ড্রামটি তৈরি করতে কত খরচ হবে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

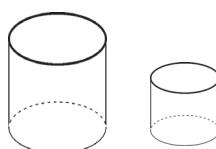
আমার ভাই ও বোন তাদের ব্যবহার করা লম্ব চোঙাকৃতি ঘনবস্তুগুলি ঘরের এক কোণে জড়ো করে রাখছে। তারা তাদের জল খাওয়ার লম্ব চোঙাকার গ্লাসগুলোও এনে রেখেছে।

দেখছি, দুটি গ্লাসের ভূমির ব্যাস ও উচ্চতা আলাদা।

(5) কিন্তু কোন গ্লাসে বেশি জল ধরে কীভাবে বুঝব?

চোঙাকার গ্লাসগুলির আয়তন নির্ণয় করে বুঝব

কিন্তু লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন কীভাবে পাব?

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা $= \pi r^2 \times h$ $= \pi r^2 h$

প্রয়োগ : 7. যদি গ্লাসের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 11.2 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি. হয়, তবে ওই গ্লাসে কত জল ধরবে, হিসাব করি।

বুঝেছি, যদি গ্লাসের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 11.2 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি. হয়, তবে ওই গ্লাসে জল ধরবে

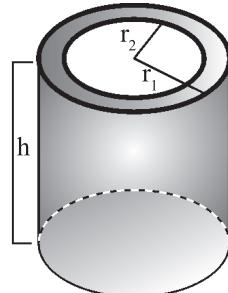
$= \pi \times \left(\frac{11.2}{2}\right)^2 \times 15$ ঘন সেমি.

$= \frac{22}{7} \times \frac{56}{10} \times \frac{56}{10} \times 15$ ঘন সেমি.

$= \square$ ঘন সেমি.

(6) কিন্তু ফাঁপা চোঙাকার ধাতব নলে কতটা পরিমাণ ধাতু আছে কীভাবে পাব?

কোনো ফাঁপা চোঙের বাইরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_1 একক,

ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_2 এবং উচ্চতা h একক হলে,

ফাঁপা চোঙটির আয়তন $= (\pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h)$ ঘন একক

$= \pi (r_1^2 - r_2^2) h$ ঘন একক

প্রয়োগ : 8. দুই মুখ খোলা লোহার তৈরি একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 42 সেমি.। চোঙটি 1 সেমি. পুরু এবং তার বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হলে, চোঙটি কত পরিমাণ লোহা দিয়ে তৈরি তা হিসাব করি।

চোঙটির বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{10}{2}$ সেমি. = 5 সেমি.

চোঙটি 1 সেমি. পুরু। $\therefore$ চোঙটির ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = (5 – 1) সেমি. = 4 সেমি.

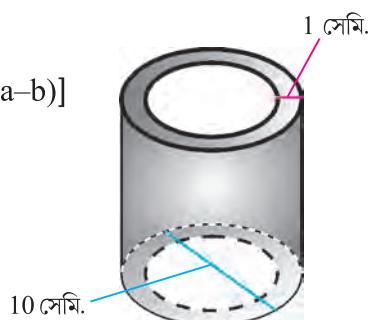
চোঙটিতে লোহা আছে,

$= \frac{22}{7}(5^2 - 4^2) \times 42$ ঘন সেমি.

$= \frac{22}{7} \times (5+4)(5-4) \times 42$ ঘন সেমি. $[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$= \frac{22}{7} \times 9 \times 1 \times 42$ ঘন সেমি.

$= 22 \times 9 \times 6$ ঘন সেমি.

$= \square$ ঘন সেমি.

প্রয়োগ : 9. কিন্তু এই (**প্রয়োগ : 8** এর) দুই মুখ খোলা ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভিতর ও বাহিরে রং করলে কতটা পরিমাণ জায়গায় রং করতে হবে, হিসাব করে লিখি।

এই দুই মুখ খোলা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভিতর ও বাহিরের বক্রতলের মোট ক্ষেত্রফল

$= (2\times\pi\times5\times21 + 2\times\pi\times4\times21)$ বর্গ সেমি.

$= 2\times\pi\times21\,(5+4)$ বর্গ সেমি.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 9$ বর্গ সেমি.

$= \square$ বর্গ সেমি.

ফাঁপা চোঙের বাইরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_1 একক এবং ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_2 একক এবং উচ্চতা h একক হলে, ওই চোঙটির ভিতর ও বাহিরের বক্রতলের মোট ক্ষেত্রফল $= 2\pi(r_1 + r_2)h$ বর্গ একক।

7 কিন্তু এই দুই মুখ খোলা ফাঁপা লম্ববৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কী হবে?

দুই মুখ খোলা ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi (r_1 + r_2)h + 2\pi (r_1^2 - r_2^2)$বর্গ একক
[যেখানে বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_1 একক , ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_2 একক এবং উচ্চতা h একক]

প্রয়োগ : 10. একটি ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি লোহার নলের বহির্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং অন্তর্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 4 সেমি.। নলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1188 বর্গ সেমি. হলে, নলটির দৈর্ঘ্য কত হিসাব করি।

ফাঁপা চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $[2\pi(r_1 + r_2)h + 2\pi(r_1^2 - r_2^2)]$ বর্গসেমি.
যেখানে, বহির্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_1 সেমি., অন্তর্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_2 সেমি. এবং উচ্চতা = h সেমি.

শর্তানুসারে,

$2\pi (r_1 + r_2)h + 2\pi (r_1^2 - r_2^2) = 1188$

বা, $\pi [(5 + 4)h + (5^2 - 4^2)] = 594$

বা, $\frac{22}{7} [9h + 9] = 594$

বা, $9h + 9 = 594 \times \frac{7}{22}$

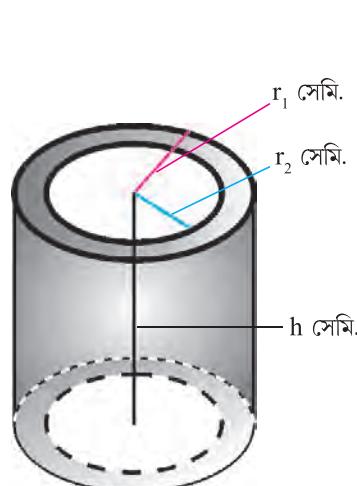
বা, $9h + 9 = 189$

বা, $9h = 189 - 9$

বা, $9h = 180$

বা, $h = \frac{180}{9}$

$\therefore$ $h = 20$

$\therefore$ চোঙটির দৈর্ঘ্য 20 সেমি.।

প্রয়োগ : 11. 6 মিটার লম্বা একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি লোহার ফাঁপা পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3.5 সেমি. এবং 4.2 সেমি. হলে, পাইপটিতে কত লোহা আছে তা হিসাব করে লিখি। এক ঘন ডেসিমি. লোহার ওজন 5 কিগ্রা. হলে, পাইপটির ওজন হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 12. একটি চোঙের ভূমির ক্ষেত্রফল 13.86 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 8 মিটার হলে, চোঙের আয়তন হিসাব করি।

ধরি, চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

শর্তানুসারে, $\pi r^2 = 13.86$

বা, $\frac{22}{7} r^2 = \frac{1386}{100}$

বা, $r^2 = \frac{1386}{100} \times \frac{7}{22} = \square$

$\therefore r = \square$

$\therefore$ চোঙের আয়তন $\frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10} \times 8$ ঘন মিটার = $\square$ ঘন মিটার।

প্রয়োগ : 13. যে চোঙের ভূমির পরিধি 15.4 সেমি. এবং উচ্চতা 10 সেমি. তার আয়তন হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 14. 11 সেমি. বহিঃপরিধিবিশিষ্ট 105 সেমি. লম্বা টিউবলাইটের কাচ যদি 0.2 সেমি. পুরু হয়, তবে 5 টি টিউবলাইট তৈরি করতে কত ঘন সেমি. কাচ লাগবে, হিসাব করে লিখি।

ধরি, টিউবলাইটের বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_1 সেমি., অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_2 সেমি. এবং উচ্চতা h সেমি.

শর্তানুসারে,

বহিঃপরিধি = $2\pi r_1 = 11$ বা, $r_1 = \frac{11\times 7}{2\times 22} = \frac{7}{4}$

$\therefore$ বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{7}{4}$ সেমি. = 1.75 সেমি.

টিউবলাইটের কাচ 0.2 সেমি. পরু।

$\therefore$ টিউবলাইটটির অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_2= (1.75 – 0.2) সেমি. = 1.55 সেমি.

প্রতিটি টিউবলাইটে কাচের আয়তন = $\pi (r_1^2 - r_2^2)$ h

= $\frac{22}{7}\{(1.75)^2 - (1.55)^2\} \times 105$ ঘন সেমি.

= $\frac{22}{7} \times (1.75 + 1.55)(1.75 - 1.55) \times 105$ ঘন সেমি.

= $\frac{22}{7} \times 3.30 \times 0.2 \times 105$ ঘন সেমি.

= ☐ ঘন সেমি.

$\therefore$ 5 টি টিউবলাইট তৈরি করতে কাচ লাগবে 5 × 217.8 ঘন সেমি. = ☐ ঘন সেমি.

প্রয়োগ : 15. একটি ছিদ্র দিয়ে জাহাজের খোলে 110 কিলোলিটার জল ঢুকেছে। ছিদ্রটি বন্ধ করার পর জল নিকাশের জন্য একটি পাম্প লাগানো হয়েছে। পাম্পটির পাইপের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং চালু অবস্থায় জলের গতিবেগ মিনিটে 350 মিটার হলে, সমস্ত জল নিকাশ করতে পাম্পটি কতক্ষণ চালু রাখতে হবে, হিসাব করে লিখি।

এক মিনিটে পাম্পটি জল নিকাশ করতে পারে

$= \frac{22}{7} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} \times \frac{1}{100} \times 3500$ ঘন ডেসিমি.

= 2750 ঘন ডেসিমি. = 2750 লিটার [1 ঘন ডেসিমি. = 1 লিটার]

$\therefore$ 110 কিলোলিটার জল নিকাশ করতে সময় লাগবে = $\frac{110000}{2750}$ মিনিট = ☐ মিনিট

সুতরাং, ☐ মিনিটে পাম্পটি সমস্ত জল নিকাশ করতে পারবে।

প্রয়োগ : 16. 5 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি ট্যাঙ্ক জলপূর্ণ আছে। 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি পাইপ দিয়ে যদি মিনিটে 225 মিটার বেগে জল বের করা হয়, তাহলে 45 মিনিটে ট্যাঙ্কটির সমস্ত জল বেরিয়ে যায়। ট্যাঙ্কটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 17. তামার তৈরি একটি আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 11 সেমি., 9 সেমি. এবং 6 সেমি.। আয়তঘনটিকে গলিয়ে 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের এবং $\frac{1}{4}$ সেমি. পুরু কতগুলি মুদ্রা তৈরি করা যাবে হিসাব করি।

আয়তঘনের আয়তন = $11 \times 9 \times 6$ ঘন সেমি.

যেহেতু মুদ্রাগুলি লম্ব চোঙাকৃতি, সুতরাং চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{3}{2}$ সেমি. এবং উচ্চতা $\frac{1}{4}$ সেমি.।

প্রতিটি মুদ্রার আয়তন = $\frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}$ ঘন সেমি.

সুতরাং মুদ্রার সংখ্যা = $\dfrac{11 \times 9 \times 6}{\frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}}$ টি = $\dfrac{11 \times 9 \times 6 \times 7 \times 2 \times 2 \times 4}{22 \times 3 \times 3}$ টি = 336 টি

কষে দেখি 8

1. পাশের চিত্রের ঘনবস্তুটি দেখি ও নীচের প্রশ্নের উত্তর লিখি।

(i) ছবির ঘনবস্তুটির ☐ টি তল।

(ii) ছবির ঘনবস্তুটির ☐ টি বক্রতল ও ☐ টি সমতল।

2. আমার বাড়ির 5টি ঘনবস্তুর নাম লিখি যাদের আকার লম্ব বৃত্তাকার চোঙ।

3. স্টিলের পাতলা চাদর দিয়ে তৈরি ঢাকনাসমেত একটি ড্রামের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 28 সেমি.। ড্রামটি তৈরি করতে যদি 2816 বর্গ সেমি. চাদর লাগে, তবে ড্রামটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

4. একটি ঘরের বারান্দায় 5.6 ডেসিমি. ব্যাসের এবং 2.5 মিটার লম্বা দুটি লম্ব বৃত্তাকার পিলার ঢালাই করতে কত ঘন ডেসিমি. মশলা লাগবে হিসাব করে লিখি।
প্রতি বর্গ মিটার 125 টাকা হিসাবে পিলার দুটি প্লাস্টার করতে কত খরচ হবে হিসাব করি।

5. 2.8 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের অন্তর্ব্যাসবিশিষ্ট এবং 7.5 ডেসিমি. লম্বা একটি জ্বালানি গ্যাস সিলিন্ডারে 15.015 কিগ্রা. গ্যাস থাকলে, প্রতি ঘন ডেসিমি. গ্যাসের ওজন হিসাব করে লিখি।

6. সমান ব্যাস ও সমান উচ্চতাবিশিষ্ট তিনটি জারের প্রথমটির $\frac{2}{3}$ অংশ, দ্বিতীয়টির $\frac{5}{6}$ অংশ এবং তৃতীয়টির $\frac{7}{9}$ অংশ লঘু সালফিউরিক অ্যাসিডে পূর্ণ ছিল। ওই তিনটি জারের অ্যাসিড যদি 2.1 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি জারে রাখা হয়, তবে জারে অ্যাসিডের উচ্চতা 4.1 ডেসিমি. হয়। প্রথম তিনটি জারের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 1.4 ডেসিমি. হলে, তাদের উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

7. একমুখ খোলা একটি লম্ব বৃত্তাকার পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 2002 বর্গ সেমি.। পাত্রটির ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হলে, পাত্রটিতে কত লিটার জল ধরবে হিসাব করে লিখি।

8. যদি 14 সেমি. ব্যাসের পাইপযুক্ত একটি পাম্পসেট মিনিটে 2500 মিটার জল সেচ করতে পারে, তাহলে ওই পাম্পটি 1 ঘণ্টায় কত কিলো লিটার জলসেচ করবে, হিসাব করে লিখি। [1লিটার = 1ঘন ডেসিমি.]

9. 7 সেমি. ব্যাসের একটি লম্বা গ্যাসজারে কিছু জল আছে। ওই জলে যদি 5.6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের 5 সেমি. লম্বা একটি নিরেট লোহার লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি টুকরো সম্পূর্ণ ডোবানো হয়, তবে জলতল কতটুকু উপরে উঠবে হিসাব করে লিখি।

10. একটি লম্ব চোঙাকৃতি স্তম্ভের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ মিটার এবং আয়তন 924 ঘন মিটার হলে, এই স্তম্ভের ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

11. 9 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি ট্যাঙ্ক জলপূর্ণ আছে। 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি পাইপ দিয়ে মিনিটে 225 মিটার বেগে জল বের হয়, তাহলে 36 মিনিটে ট্যাঙ্কটির সমস্ত জল বেরিয়ে যায়। ট্যাঙ্কটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

12. সমান ঘনত্বের একটি লম্ব বৃত্তাকার কাঠের গুঁড়ির বক্রতলের ক্ষেত্রফল 440 বর্গ ডেসিমি.। এক ঘন ডেসিমি. কাঠের ওজন 1.5 কিগ্রা. এবং গুঁড়িটির ওজন 9.24 কুইন্টাল হলে, গুঁড়িটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

13. দুই মুখ খোলা একটি লম্ব বৃত্তাকার লোহার পাইপের মুখের বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 30 সেমি., অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 26 সেমি. এবং পাইপটির দৈর্ঘ্য 14.7 মিটার। প্রতি বর্গ ডেসিমি. 2.25 টাকা হিসাবে ওই পাইপটির সমগ্রতলে আলকাতরার প্রলেপ দিতে কত খরচ হবে, হিসাব করে লিখি।

14. একটি দুই মুখ খোলা লোহার লম্ব বৃত্তাকার ফাঁপা চোঙের উচ্চতা 2.8 মিটার। চোঙটির অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 4.6 ডেসিমি. এবং চোঙটি 84.48 ঘন ডেসিমি. লোহা দিয়ে তৈরি হলে, চোঙটির বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

15. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা উহার ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। যদি উচ্চতা 6 গুণ হতো তবে চোঙটির আয়তন 539 ঘন ডেসিমি বেশি হতো। চোঙটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

16. ফায়ার ব্রিগেডের কোনো একটি দল একটি জলভরতি লম্ব বৃত্তাকার ট্যাঙ্কারের জল 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের তিনটি হোস পাইপ দিয়ে মিনিটে 420 মিটার বেগে ঢেলে 40 মিনিটে আগুন নেভাল। যদি ট্যাঙ্কারটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 2.8 মিটার এবং দৈর্ঘ্য 6 মিটার হয়, তবে (i) আগুন নেভাতে কত জল খরচ হয়েছে এবং (ii) ট্যাঙ্কারে আর কত জল রয়েছে নির্ণয় করি।

17. 17.5 সেমি. ব্যাসের 4টি লম্ব বৃত্তাকার ঢালাই পিলারের চারিপাশে 3.5 সেমি. পুরু বালি-সিমেন্টের প্লাস্টার করতে হবে।

    (i) প্রতিটি পিলার যদি 3 মিটার লম্বা হয়, তবে কত ঘন ডেসিমি মশলা লাগবে হিসাব করে লিখি।

    (ii) প্লাস্টারের মশলা তেরি করতে যদি 4 : 1 অনুপাতে বালি ও সিমেন্ট মেশাতে হয়, তবে কত ঘন ডেসিমি. সিমেন্টের প্রয়োজন, হিসাব করে লিখি।

18. একটি লম্ব বৃত্তাকার ফাঁপা চোঙের বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 16 সেমি. এবং অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি.। চোঙটির উচ্চতা 36 সেমি.। চোঙটিকে গলিয়ে 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট এবং 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের কতগুলি নিরেট চোঙ তৈরি করা যাবে হিসাব করি।

19. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

    (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

    (i) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2 : 3 এবং উচ্চতার অনুপাত 5 : 3 হলে, তাদের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

    (a) 2 : 5 (b) 8 : 7 (c) 10 : 9 (d) 16 : 9

    (ii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2 : 3 এবং উচ্চতার অনুপাত 5 : 3 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত

    (a) 27 : 20 (b) 20 : 27 (c) 4 : 9 (d) 9 : 4

(iii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙের আয়তন সমান এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত 1:2 হলে, তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত

(a) $1:\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}:1$ (c) 1:2 (d) 2:1

(iv) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অর্ধেক এবং উচ্চতা দ্বিগুণ হলে, চোঙটির আয়তন হবে পূর্বের চোঙের আয়তনের

(a) সমান (b) দ্বিগুণ (c) অর্ধেক (d) 4 গুণ

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ এবং উচ্চতা অর্ধেক করা হলে, বক্রতলের ক্ষেত্রফল পূর্বের চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের

(a) সমান (b) দ্বিগুণ (c) অর্ধেক (d) 4 গুণ

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি লম্ব চোঙাকৃতি ড্রামের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি. এবং উচ্চতা h সেমি.। ড্রামের অর্ধেক জলপূর্ণ থাকলে, জলের আয়তন হবে $\pi r^2 h$ ঘন সেমি.।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2 একক হলে, চোঙটির যে-কোনো উচ্চতার জন্য চোঙটির আয়তন এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের দৈর্ঘ্য ℓ একক এবং প্রস্থ b একক। আয়তক্ষেত্রাকার কাগজটিকে মুড়ে একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো যার পরিধি কাগজটির দৈর্ঘ্যের সমান। চোঙটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল ________ বর্গ একক।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 3 সেমি. এবং উচ্চতা 4 সেমি. হলে, চোঙটির ভিতর সর্বাপেক্ষা লম্বা যে দণ্ড রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য ________ সেমি.।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হলে, চোঙটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য ________ একক।

20. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি স্তম্ভের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ মিটার এবং আয়তন 924 ঘন মিটার হলে, স্তম্ভের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত লিখি।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল c বর্গ একক, ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং আয়তন v ঘন একক হলে, $\frac{cr}{v}$-এর মান কত তা লিখি।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 14 সেমি. এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ সেমি. হলে, চোঙটির আয়তন কত তা লিখি।

(iv) দুটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতার অনুপাত 1:2 এবং ভূমির পরিধির অনুপাত 3:4 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 50% হ্রাস করা হলো এবং উচ্চতা 50% বৃদ্ধি করা হলো। চোঙটির আয়তনের শতকরা কত পরিবর্তন হবে তা লিখি।

9 দ্বিঘাত করণী
QUADRATIC SURD

রেবার দাদু রেবাকে একটি সাদা বোর্ড কিনে দিয়েছেন। আমরা সেই বোর্ডে ছবি আঁকি ও নানান মজার খেলায় বোর্ড ব্যবহার করি। আজ আমরা মতিউরদের বাগানে ওই বোর্ডটি নিয়ে জড়ো হয়েছি, একটি মজার খেলা খেলার জন্য।

আমাদের বন্ধু তপেন ওই বোর্ডে একটি ঘর আঁকল এবং ওই ঘরের মধ্যে কিছু ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা লিখল।

আমরা ঠিক করেছি প্রত্যেকে ওই পূর্ণসংখ্যার ঘর থেকে যে-কোনো দুটি সংখ্যা লিখব ও বিভিন্ন আকারে সাজাব ও তাদের প্রকৃতি জানব।

সীমা লিখল 5 ও 4

5+4, 5–4, 5×4 প্রত্যেকেই **পূর্ণ সংখ্যা**।

আবার, $\frac{5}{4}$ ও $\frac{4}{5}$ প্রত্যেকেই ☐ [পূর্ণসংখ্যা/মূলদ সংখ্যা]

1 আমি 5 ও 4-এর বর্গ করে কী পাই দেখি।

$5^2 =$ ☐ এবং $4^2 =$ ☐

∴ দেখছি 5 ও 4-এর বর্গও ☐ সংখ্যা।

আমরা জানি, কোনো একটি অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা a-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{a}$ বা, $\pm a^{\frac{1}{2}}$

কেননা $(+\sqrt{a})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^1 = a$ এবং $(-\sqrt{a})^2 = a$

2 কিন্তু $\sqrt{0}$ -এর মান কী হবে?

সংজ্ঞা অনুযায়ী, $\sqrt{0} = 0$

3 আমি 4 ও 5-এর বর্গমূল নিয়ে কী পাই দেখি।

4-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{4}$ অর্থাৎ +2 এবং –2 [∵ $(+2)^2 = 4$ এবং $(-2)^2 = 4$]

4-এর ধনাত্মক বর্গমূলটিকে $\sqrt{4}$ লেখা হয়

অর্থাৎ অঙ্কের ভাষায় $\sqrt{4} = 2$, ∴ 4-এর বর্গমূল ☐ (মূলদ/অমূলদ) সংখ্যা **[নিজে লিখি]**

4 কিন্তু $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$ হবে কি?

$\sqrt{a^2} = |a|$ [সংজ্ঞা অনুযায়ী]

$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2$ এবং $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

5-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{5}$ [∵ কোনো পূর্ণসংখ্যা পাব না যার বর্গ 5 হবে]

বুঝেছি, 5 পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়, কিন্তু 4 পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

5 $\pm\sqrt{5}$ আকারের সংখ্যাকে কী বলা হয়?

যদি a এমন একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হয়, যা কোনো মূলদ সংখ্যার বর্গ নয়, তাহলে $\pm\sqrt{a}$ আকারের সংখ্যাকে **শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী** বলা হয়। আবার $a \pm\sqrt{b}$ আকারের সংখ্যা হলো **মিশ্র দ্বিঘাত করণী**, যেখানে a মূলদ সংখ্যা, $\sqrt{b}$ শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

আমরা জানি, $5^2 = 25$ বলে $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 25-এর একটি বর্গমূল]

$5^3 = 125$ বলে $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3\times\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 125-এর একটি ঘনমূল]

$5^4 = 625$ বলে $\sqrt[4]{625} = 625^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5^{4\times\frac{1}{4}} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 625-এর একটি চতুর্থমূল] .

বর্গমূল চিহ্নটির ক্ষেত্রে সাধারণত $\sqrt{\ }$ ব্যবহার করা হয়, $\sqrt[2]{\ }$ ব্যবহার করা হয় না। যে মূলগুলি উপরে উল্লেখ করলাম তারা প্রত্যেকে মূলদ সংখ্যা। কিন্তু সবসময় তা হয় না।

যেমন, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{20}$, $\sqrt[5]{25}$, ইত্যাদিরা মূলদ সংখ্যা নয়। এদের সুনির্দিষ্ট দশমিক মান সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় না। অর্থাৎ এরা অমূলদ সংখ্যা।

$\therefore \pm\sqrt{5}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

6 আমি 4 টি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী ও 4 টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী বুঝে লিখি।

4 টি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ☐ [নিজে লিখি]

4 টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{6}$, $\frac{3}{5}-\sqrt{10}$, ☐ [নিজে লিখি]

কিন্তু সকল দ্বিঘাত করণীই কি অমূলদ সংখ্যা?

দ্বিঘাত করণীর দশমিক মান সম্পূর্ণ রূপে নির্ণয় করা যায় না। তাই এগুলি অমূলদ সংখ্যা। কিন্তু সকল অমূলদ সংখ্যাই করণী নয়। যেমন, $\sqrt{\pi}$ অমূলদ সংখ্যা, কিন্তু এটি দ্বিঘাত করণী নয়।

7 $\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$ কি দ্বিঘাত করণী?

$\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$ আপাতদৃষ্টিতে করণীর আকারে থাকলেও এগুলি করণী নয়।

মূলদ সংখ্যা, $\sqrt{4} = 2$ এবং $\sqrt{25} = 5$

আমি শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে $x^2-2ax+(a^2-b^2)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করে দেখছি বীজদ্বয় $a+\sqrt{b}$ ও ☐ যারা উভয়েই মিশ্র দ্বিঘাত করণী, যেখানে b একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা যা কোনো মূলদ সংখ্যার বর্গ নয়। **[নিজে করি]**

এই স্তরে আমাদের আলোচনা দ্বিঘাত করণীতেই সীমাবদ্ধ থাকবে এবং সাধারণভাবে করণী বললে আমরা দ্বিঘাত করণীই বুঝব।

মণিদীপা বোর্ডে লিখল 8 ও 12

8 8 ও 12 সংখ্যাদুটির যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল, ভাগফল, বর্গ নিয়ে যা পেলাম তা কেমন ধরনের সংখ্যা নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

যেহেতু $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ সুতরাং সূচকের নিয়ম অনুসারে পাই,

$\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, যেখানে a, b অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, যেখানে a অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং b ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

9 আমি 8 ও 32-এর বর্গমূল নিই ও কী পাই বুঝে লিখি।

$\sqrt{8}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী কারণ 8 একটি পূর্ণবর্গ মূলদসংখ্যা নয়, আবার $\sqrt{32}$ -ও একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী কারণ 32 একটি পূর্ণবর্গ মূলদ সংখ্যা নয়।

$\sqrt{8}$ -কে লিখতে পারি, $\sqrt{8} = \sqrt{4\times2} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

এবং $\sqrt{32}$ -কে লিখতে পারি, $\sqrt{32} = \sqrt{16\times2} = \sqrt{16}.\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

10 দেখছি, দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{32}$ একই করণী $\sqrt{2}$ -এর মূলদ গুণিতক। এইরকম শুদ্ধ করণীকে কী বলা হয়?

দুই বা ততোধিক শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী যদি একই করণীর মূলদ গুণিতক হয় তবে ওই সকল শুদ্ধ করণীকে **সদৃশ করণী** বলা হয়।

বুঝেছি, $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{32}$ শুদ্ধ করণী দুটি সদৃশ করণী।

প্রয়োগ : 1. $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{\frac{25}{2}}$ কি সদৃশ করণী? হিসাব করে দেখি?

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{\frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25\times2}{4}} = \frac{\sqrt{25\times2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{25}\times\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ $\therefore \sqrt{8}$ ও $\sqrt{\frac{25}{2}}$ সদৃশ করণী।

প্রয়োগ : 2. $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ সদৃশ করণী কিনা হিসাব করি।

$\sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = 2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{28} = \sqrt{4\times7} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ শুদ্ধ করণীদ্বয় একই করণীর মূলদ গুণিতক নয়।

এই রকম শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীকে কী বলা হয়?

যে সকল শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী সদৃশ করণী নয় তারা **অসদৃশ করণী**।

বুঝেছি, $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ **অসদৃশ করণী**।

অর্থাৎ যদি m এবং n দুটি এমন পরস্পর মৌলিক সংখ্যা [অর্থাৎ m ও n-এর গ.সা.গু 1] হয় যারা পূর্ণবর্গ নয়, তাহলে $\sqrt{m}$ এবং $\sqrt{n}$ অসদৃশ করণী হবে।

যেমন, 15 এবং 22 দুটি পরস্পর মৌলিক সংখ্যা, কারণ 15 এবং 22-এর গ.সা.গু. 1 এবং 15 এবং 22 কেউই পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়। সুতরাং $\sqrt{15}$ ও $\sqrt{22}$ অসদৃশ করণী।

11 দুটি অসদৃশ করণী $\sqrt{5}$ ও $\sqrt{7}$ -এর মধ্যে কোনটি বড়ো কীভাবে পাব দেখি।

যেহেতু, $7 > 5$ $\therefore \sqrt{7} > \sqrt{5}$ ($\because$ a, b ধনাত্মক সংখ্যা এবং $a^2 > b^2$ হলে $a > b$ হয়)

প্রয়োগ : 3. নীচের দ্বিঘাত করণীগুলির মধ্যে সদৃশ করণীগুলি একটি ঘরে লিখি

$\sqrt{45}, \sqrt{80}, \sqrt{147}, \sqrt{180}$ ও $\sqrt{500}$

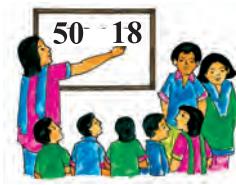
$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = 3\sqrt{5}$ $\quad$ $\sqrt{147} = \sqrt{7\times7\times3} = 7\sqrt{3}$

$\sqrt{80} = \sqrt{16\times5} = 4\sqrt{5}$ $\quad$ $\sqrt{180} = \sqrt{6\times6\times5} = 6\sqrt{5}$

$\sqrt{500} = \square$ [নিজে করি]

$\therefore$ সদৃশ করণীগুলি $\sqrt{45}, \sqrt{80}, \sqrt{180}$ ও $\sqrt{500}$

প্রয়োগ : 4. $\sqrt{48}, \sqrt{27}, \sqrt{20}$ ও $\sqrt{75}$ দ্বিঘাত করণীগুলির মধ্যে সদৃশ করণীগুলি লিখি। [নিজে করি]

রেবা বোর্ডে লিখেছে 50 ও 18
$\sqrt{50}$ ও $\sqrt{18}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 5. $(\sqrt{50}+\sqrt{18})$ ও $(\sqrt{50}-\sqrt{18})$ এদের শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীতে পরিণত করা যাবে কিনা দেখি।

$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\therefore$ দেখছি $\sqrt{50}$ ও $\sqrt{18}$ সদৃশ করণী।

যেহেতু, 5x+3x = 8x এবং 5x–3x = ☐

$\therefore \quad \sqrt{50}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

$\sqrt{50}-\sqrt{18}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ দেখছি, $(\sqrt{50}+\sqrt{18})$ এবং $(\sqrt{50}-\sqrt{18})$-এদের শুদ্ধ করণীতে পরিণত করা যাচ্ছে।

প্রয়োগ : 6. আমি $(\sqrt{2}+\sqrt{8})$ এবং $(\sqrt{2}-\sqrt{8})$ -এর মান হিসাব করে লিখি এবং দেখি তাদের শুদ্ধ করণীতে পরিণত করা যায় কিনা। **[নিজে করি]**

মৃণাল বোর্ডে লিখল 12 ও 45

প্রয়োগ : 7. আমি $(\sqrt{12}+\sqrt{45})$ এবং $(\sqrt{12}-\sqrt{45})$ এদের মান হিসাব করে লিখি।

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\therefore \sqrt{12}$ ও $\sqrt{45}$ অসদৃশ করণী।

যেহেতু, 2x ও 3y -এর যোগফল = 2x+3y

$\therefore \quad \sqrt{12}+\sqrt{45}=2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

একইভাবে, $\sqrt{12}-\sqrt{45}=2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

$\therefore$ আবার দেখছি, $(\sqrt{12}+\sqrt{45})$ এবং $(\sqrt{12}-\sqrt{45})$ অমূলদ সংখ্যা, কিন্তু তাদের শুদ্ধ করণীর আকারে লেখা যাচ্ছে না।

বুঝেছি, যেহেতু a ও b-এর যোগফল = a+b, $\therefore \sqrt{5}+\sqrt{7}=$ ☐ **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 8. আমি $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ ও $4\sqrt{3}$ -এর যোগফল নির্ণয় করি।

$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

প্রয়োগ : 9. $\sqrt{12}$, $-4\sqrt{3}$ ও $6\sqrt{3}$ -এর সমষ্টি হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 10. আমি দুটি মিশ্র দ্বিঘাত করণী $(2+\sqrt{3})$ ও $(2-2\sqrt{3})$-এর সমষ্টি নির্ণয় করি।

30 ও 2x-এর যোগফল = 30+2x এবং (30+2x)+(30–4x) = ☐ হয়।

$\therefore (2+\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})=2+2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$

$\therefore (2+\sqrt{3})$ ও $(2-2\sqrt{3})$-এর সমষ্টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী পেলাম।

প্রয়োগ : 11. $(9-2\sqrt{5})+(12+7\sqrt{5})=$ ☐ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 12. আমি $(2+\sqrt{3})$ ও $(2-\sqrt{3})$ -এর সমষ্টি নির্ণয় করি।

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3}) = 2+2+\sqrt{3}-\sqrt{3} = 4$$

$\therefore$ দেখছি, দুটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি মূলদ সংখ্যা পেলাম।

প্রয়োগ : 13. আমি অন্য যে-কোনো দুটি দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের সমষ্টি মূলদ সংখ্যা। **[নিজে করি]**

কষে দেখি 9.1

1. মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার গুণফল আকারে লিখি—
   (i) $\sqrt{175}$ (ii) $2\sqrt{112}$ (iii) $\sqrt{108}$ (iv) $\sqrt{125}$ (v) $5\sqrt{119}$
2. প্রমাণ করি যে, $\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{3}$
3. দেখাই যে, $\sqrt{98}+\sqrt{8}-2\sqrt{32}=\sqrt{2}$
4. দেখাই যে, $3\sqrt{48}-4\sqrt{75}+\sqrt{192}=0$
5. সরলতম মান নির্ণয় করি :
   $\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{27}-\sqrt{32}$
6. (a) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ -এর সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফল $2\sqrt{5}$ হবে, হিসাব করে লিখি।
   (b) $7-\sqrt{3}$ -এর থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফল $3+\sqrt{3}$ হবে, নির্ণয় করি।
   (c) $2+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ এবং $2+\sqrt{7}$ -এর যোগফল লিখি।
   (d) $(10-\sqrt{11})$ থেকে $(-5+3\sqrt{11})$ বিয়োগ করি ও বিয়োগফল লিখি।
   (e) $(-5+\sqrt{7})$ এবং $(\sqrt{7}+\sqrt{2})$-এর যোগফল থেকে $(5+\sqrt{2}+\sqrt{7})$ বিয়োগ করে বিয়োগফল নির্ণয় করি।
   (f) দুটি দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের সমষ্টি মূলদ সংখ্যা।

12 এবার আমাদের বন্ধু অমিয় বোর্ডে লিখল 7 ও 11

দেখছি, বোর্ডে লেখা সংখ্যাদুটি মৌলিক সংখ্যা।

$\sqrt{7}$ ও $\sqrt{11}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও বিয়োগফল নিজে লিখি।

13 কিন্তু $\sqrt{7}$ ও $\sqrt{11}$ -এর গুণফল ও ভাগফল হিসাব করে লিখি।

যেহেতু $a^m \times b^m = (ab)^m$ [$a\neq0, b\neq0$, m একটি মূলদ সংখ্যা]

$$\therefore \sqrt{7}\times\sqrt{11} = 7^{\frac{1}{2}}\times 11^{\frac{1}{2}}$$
$$= (7\times11)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 77^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{77}$$

এখানে $\sqrt{77}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 14. আমি নীচের দ্বিঘাত করণীগুলির গুণফল নির্ণয় করি :

(i) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{2}$ (ii) $7\sqrt{3}\times2\sqrt{3}$ (iii) $(2+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$ (iv) $(5-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

(i) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{2}=2\times3\times\sqrt{5\times2}=6\sqrt{10}$

(ii) $7\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=7\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$=14\sqrt{3^2}=14(3^2)^{\frac{1}{2}}=14\times3^{(2\times\frac{1}{2})}$

$=14\times3=42$ [$\because (a^m)^n=a^{mn}$, $a\neq0$ এবং m, n মূলদ সংখ্যা]

(iii) $(2+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=8+6\sqrt{3}+3=11+6\sqrt{3}$ [$\because (x+y)(a+b)=ax+ay+bx+by$]

(iv) $(5-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=5\times2-2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=10-2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3=13-7\sqrt{3}$

প্রয়োগ : 15. আমি $(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})$-এর গুণফল নির্ণয় করি।

$$(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})=2\times(3-\sqrt{5})+\sqrt{3}\times(3-\sqrt{5})+\sqrt{5}\times(3-\sqrt{5})$$
$$=6-2\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}+3\sqrt{5}-5$$
$$=6-5+\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}$$
$$=1+\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}$$

প্রয়োগ : 16. $(3+\sqrt{7}-\sqrt{5})\times(2\sqrt{2}-1)$-এর গুণফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

নাথুরা বোর্ডে লিখল 13 ও 5

$\sqrt{13}$ ও $\sqrt{5}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 17. আমি $\sqrt{13}\div\sqrt{5}$ -এর ভাগফল কী হবে হিসাব করে দেখি।

$\sqrt{13}\div\sqrt{5}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$

দেখছি হরে করণী আছে। কিন্তু কীভাবে $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর হরকে করণীমুক্ত করব?

$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর লব ও হরকে $\sqrt{5}$ দিয়ে গুণ করি ও কী পাই দেখি।

> $\frac{a}{b}$ কে বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ বললে a কে লব ও b কে হর বলি। সেই অর্থে এর লব $\sqrt{13}$ এবং হর $\sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{65}}{5}$ অর্থাৎ $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর হরকে করণী মুক্ত করে $\frac{\sqrt{65}}{5}$ পেলাম।

> কিন্তু এইভাবে গুণ করে কোনো করণীকে করণীমুক্ত করার প্রক্রিয়াকে কী বলা হয়?
> কোনো করণীর সঙ্গে অথবা একাধিক করণীর যোগ ও বিয়োগ দ্বারা গঠিত অমূলদ সংখ্যার সঙ্গে কোনো উৎপাদক গুণ করে গুণফলটি করণীমুক্ত করা অর্থাৎ একটি মূলদ সংখ্যা পাওয়ার প্রক্রিয়াকে **করণী নিরসন (Rationalisation)** বলে এবং ওই উৎপাদকটিকে ওই করণীর **অথবা ওই অমূলদ সংখ্যার** **করণী নিরসক উৎপাদক (Rationalising Factor)** বলা হয়।

$\sqrt{5}$ -এর একটি করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{5}$; এছাড়াও $k\sqrt{5}$ যেখানে k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা।

$\therefore \sqrt{a}$-এর একটি করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{a}$; এছাড়াও $k\sqrt{a}$,যেখানে k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা।

প্রয়োগ : 18. $\sqrt{7}$ -এর 2টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 19 . আমি $(5+\sqrt{7})$-এর করণী নিরসক উৎপাদক কী পাব দেখি।

$(5+\sqrt{7})\times(5-\sqrt{7}) = (5)^2 - (\sqrt{7})^2 = 25-7 = \square$ $[(a+b)(a-b) = a^2-b^2]$

আবার, $(5+\sqrt{7})\times(-5+\sqrt{7}) = (\sqrt{7}+5)\times(\sqrt{7}-5) = (\sqrt{7})^2-(5)^2 = \square$

$\therefore$ দেখছি, $5+\sqrt{7}$ -এর করণী নিরসক উৎপাদক পেলাম $(5-\sqrt{7})$ এবং $(-5+\sqrt{7})$

বুঝেছি, $a+\sqrt{b}$-এর করণী নিরসক উৎপাদক $a-\sqrt{b}$ অথবা $-a+\sqrt{b}$ অথবা এদের কোনো মূলদ গুণিতক।

প্রয়োগ : 20. $7-\sqrt{3}$-এর 2 টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 21. $(\sqrt{11}-\sqrt{6})$-অমূলদ সংখ্যাটির করণী নিরসক উৎপাদক কী কী পাব দেখি।

$(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6}) = (\sqrt{11})^2-(\sqrt{6})^2 = 11-6 = 5$

আবার, $(\sqrt{11}-\sqrt{6})(-\sqrt{11}-\sqrt{6}) = -[(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6})]$

$= \square$ **[নিজে করি]**

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$-অমূলদ সংখ্যাটির করণী নিরসক উৎপাদক $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ অথবা $(-\sqrt{a}-\sqrt{b})$ অথবা এদের কোনো মূলদ গুণিতক।

প্রয়োগ : 22. $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$-এর 2 টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 23. আমি $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর একটি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি যা $(7+\sqrt{2})$-এর সঙ্গে যোগ করলে মূলদ সংখ্যা পাব।

$(7+\sqrt{2})\times(7-\sqrt{2}) = 7^2-(\sqrt{2})^2 = \square$

আবার, $(7+\sqrt{2})+(7-\sqrt{2}) = 7+7 = 14$

$\therefore$ দেখছি, $7-\sqrt{2}$ উৎপাকটির সঙ্গে $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও গুণফল মূলদ সংখ্যা।

কিন্তু কোনো মিশ্র দ্বিঘাত করণীর এরকম করণী নিরসক উৎপাদককে ওই মিশ্র দ্বিঘাত করণীর কী বলা হয়?

কোনো মিশ্র দ্বিঘাত করণীর করণী নিরসক উৎপাদকের সঙ্গে ওই করণীর যোগফল ও গুণফল উভয়ই যদি মূলদ সংখ্যা হয় তবে তাকে ওই মিশ্র দ্বিঘাত করণীর **অনুবন্ধী বা পূরক করণী (Conjugate surd)** বলা হয়।

বুঝেছি, $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর অনুবন্ধী করণী $7-\sqrt{2}$, কিন্তু $(-7+\sqrt{2})$ উৎপাদকটি অনুবন্ধী করণী নয়। যদিও এটি প্রদত্ত করণীর একটি করণী নিরসক উৎপাদক।

কারণ, $7+\sqrt{2}+7-\sqrt{2} = 14$ (মূলদ সংখ্যা)

আবার, $(7+\sqrt{2})(7-\sqrt{2}) = (7)^2-(\sqrt{2})^2 = 49-2=47$ (মূলদ সংখ্যা)।

কিন্তু $(7+\sqrt{2})+(-7+\sqrt{2}) = 7+\sqrt{2}-7+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (অমূলদ সংখ্যা)

প্রয়োগ : 24. আমি $(\sqrt{5}-1)$, $\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}-2)$-এদের অনুবন্ধী করণীগুলি লিখি।

$(\sqrt{5}-1)$-এর অনুবন্ধী করণী $-\sqrt{5}-1$

$\sqrt{3}$-এর অনুবন্ধী করণী $-\sqrt{3}$

$(\sqrt{3}-2)$-এর অনুবন্ধী করণী $(-\sqrt{3}-2)$

$\therefore$ পেলাম, $a+\sqrt{b}$ আকারের করণীর অনুবন্ধী করণীটি $a-\sqrt{b}$

$a-\sqrt{b}$ আকারের করণীর অনুবন্ধী করণীটি $a+\sqrt{b}$

প্রয়োগ : 25. নীচের মিশ্র এবং শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীগুলির অনুবন্ধী করণী লিখি—

(i) $2+\sqrt{3}$ (ii) $5-\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{5}-7$ (iv) $\sqrt{11}+6$ (v) $\sqrt{5}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 26. আমি $(2\sqrt{2}\div\sqrt{5})$-এর হরের করণী নিরসন করি।

$$2\sqrt{2}\div\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ ——— (i)}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$\therefore$ পেলাম, $2\sqrt{2}\div\sqrt{5}=2\sqrt{10}\div5$

প্রয়োগ : 27. আমি হরের করণী নিরসন করি : (i) $6\div\sqrt{7}$ (ii) $5\sqrt{2}\div6\sqrt{3}$

$$\text{(i) } 6\div\sqrt{7}=\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{6\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{6\sqrt{7}}{7}=6\sqrt{7}\div7$$

$$\text{(ii) } 5\sqrt{2}\div6\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{6\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{6\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{6}}{6\times3}=\frac{5\sqrt{6}}{18}=5\sqrt{6}\div18$$

প্রয়োগ : 28. হরের করণী নিরসন করি : (i) $\frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 29. আমি হরের করণী নিরসন করি ।

(i) $4\div(3-\sqrt{2})$ (ii) $(\sqrt{5}+2)\div(\sqrt{3}-1)$ (iii) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\div(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$$\text{(i) } 4\div\left(3-\sqrt{2}\right)=\frac{4}{3-\sqrt{2}}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}=\frac{\left(12+4\sqrt{2}\right)}{7}$$

$$\text{(ii) } \left(\sqrt{5}+2\right)\div\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}{2}$$

(iii) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\div\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$=\dfrac{2+3+2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2-3}$

$=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{-1}$

প্রয়োগ : 30. হরের করণী নিরসন করি :

(i) $(4+2\sqrt{3})\div(2-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\div(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ [নিজে করি]

কষে দেখি 9.2

1. (a) $3^{\frac{1}{2}}$ ও $\sqrt{3}$ -এর গুণফল নির্ণয় করি।

   (b) $2\sqrt{2}$ -কে কত দিয়ে গুণ করলে 4 পাব লিখি।

   (c) $3\sqrt{5}$ এবং $5\sqrt{3}$ -এর গুণফল নির্ণয় করি।

   (d) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}=x\sqrt{10}$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (e) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=25-x^2$ একটি সমীকরণ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

2. **গুণফল নির্ণয় করি :**

   (a) $\sqrt{7}\times\sqrt{14}$ (b) $\sqrt{12}\times2\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{5}\times\sqrt{15}\times\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}(3+\sqrt{5})$

   (e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ (f) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(4\sqrt{2}+\sqrt{5})$

   (g) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$

3. (a) $\sqrt{5}$ -এর করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{x}$ হলে, x-এর ক্ষুদ্রতম মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি। [যেখানে x একটি পূর্ণসংখ্যা]

   (b) $3\sqrt{2}\div3$ -এর মান নির্ণয় করি।

   (c) $7\div\sqrt{48}$ -এর হরের করণী নিরসন করতে হরকে ন্যূনতম কত দিয়ে গুণ করতে হবে তা লিখি।

   (d) $(\sqrt{5}+2)$-এর করণী নিরসক উৎপাদক নির্ণয় করি যা করণীটির অনুবন্ধী করণী।

   (e) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})\div\sqrt{7}=\frac{1}{7}(\sqrt{35}+a)$ হলে, a-এর মান নির্ণয় করি।

   (f) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-2}$ -এর হরের একটি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি যা অনুবন্ধী করণী নয়।

4. $(9-4\sqrt{5})$ ও $(-2-\sqrt{7})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীদ্বয়ের অনুবন্ধী করণীদ্বয় লিখি।

5. নীচের মিশ্র দ্বিঘাত করণীর 2 টি করে করণী নিরসক উৎপাদক লিখি:

   (i) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (ii) $13+\sqrt{6}$ (iii) $\sqrt{8}-3$ (iv) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$

6. হরের করণী নিরসন করি :

(i) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

(iv) $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ (v) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}-1}$ (vi) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

7. প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দিয়ে ভাগ করে ভাজককে মূলদ সংখ্যায় পরিণত করি।

(i) $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+1$ (ii) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (iii) $3+\sqrt{6}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

8. মান নির্ণয় করি : (i) $\frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}-\frac{4\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$ (ii) $\frac{8+3\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}-\frac{8-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$

প্রয়োগ : 31. সরল করি : $\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$

$$\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}=\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{4.3}+\sqrt{4.5}}{3\sqrt{9.2}-2\sqrt{9.3}+\sqrt{9.5}}=\frac{3.2\sqrt{2}-2.2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3.3\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{2}{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $=\frac{2}{3}$

প্রয়োগ : 32. সরল করি : $\frac{3\sqrt{20}+2\sqrt{28}+\sqrt{12}}{5\sqrt{45}+2\sqrt{175}+\sqrt{75}}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 33. সরল করি : $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

প্রদত্ত $=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ ———— (i)

প্রথম অংশ $=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{3-2}=\sqrt{15}-\sqrt{10}$

দ্বিতীয় অংশ $=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{3\sqrt{15}-3\sqrt{6}}{5-2}=\frac{3\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)}{3}$

$=\sqrt{15}-\sqrt{6}$

তৃতীয় অংশ $= \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{2\sqrt{10}-2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{5-3}$

$= \dfrac{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{2}$

$= \sqrt{10}-\sqrt{6}$

$\therefore$ (i) থেকে পাই,

প্রদত্ত $= (\sqrt{15}-\sqrt{10})-(\sqrt{15}-\sqrt{6})+(\sqrt{10}-\sqrt{6})$

$= \sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{6} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল = 0.

প্রয়োগ : 34. সরল করি : $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 35. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে, (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং (iii) $x^3-\frac{1}{x^3}$ -এর সরলতম মানগুলি নির্ণয় করি।

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(i) $x-\frac{1}{x} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2} = (x-\frac{1}{x})^2+2\times x\times\frac{1}{x} = (2\sqrt{2})^2+2.1 = 8+2 = 10$

(iii) $x^3-\frac{1}{x^3} = (x-\frac{1}{x})^3+3\times x\times\frac{1}{x}(x-\frac{1}{x}) = (2\sqrt{2})^3+3\times1\times2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}+6\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$

প্রয়োগ : 36. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে, $(x-\frac{1}{x})$, $(x^3+\frac{1}{x^3})$ এবং $(x^2-\frac{1}{x^2})$ -এর সরলতম মানগুলি নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 37. যদি $x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হয়, তবে

(a) দেখাই যে, $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{12}$ (b) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি।

(c) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি। (d) x^3-y^3 -এর সরলতম মান নির্ণয় করি।

প্রথমে, $x+y$, $x-y$ ও xy -এর মান নির্ণয় করি।

$x+y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \dfrac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2} = \dfrac{8}{3-1}$

$= \dfrac{8}{2} = 4$

অথবা, $x+y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2\left[(\sqrt{3})^2+(1)^2\right]}{(\sqrt{3})^2-(1)^2} \quad \left[\because (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)\right]$$

$$=\frac{2(3+1)}{3-1}=\frac{2\times4}{2}=4$$

$$x-y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{(3+1+2\sqrt{3})-(3+1-2\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}$$

$$=\frac{3+1+2\sqrt{3}-3-1+2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

অথবা, $x-y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4\times\sqrt{3}\times1}{(\sqrt{3})^2-(1)^2} \quad \left[\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab\right]$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$$x\times y=\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)}\times\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}=1$$

(a) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)^2-2xy}{(x+y)(x-y)}=\frac{(4)^2-2\times1}{4\times2\sqrt{3}}=\frac{14}{4\times2\sqrt{3}}=\frac{7\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{12}$

(b) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x+y)^2-3xy}{(x+y)^2-xy}=\frac{4^2-3\times1}{4^2-1}=\frac{13}{15}$

অথবা, $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x-y)^2+xy}{(x-y)^2+3xy}=\frac{(2\sqrt{3})^2+1}{(2\sqrt{3})^2+3}=\frac{12+1}{12+3}=\frac{13}{15}$

বুঝেছি, (x+y) অথবা (x–y)-এর যে-কোনো একটির মান জানতে হবে।

(c) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}=\frac{4^3-3\times4}{1}=64-12=52$

(d) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=(2\sqrt{3})^3+3\times1\times2\sqrt{3}=24\sqrt{3}+6\sqrt{3}=30\sqrt{3}$

প্রয়োগ : 38. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ এবং $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$-এর মধ্যে কোনটি বড়ো লিখি।

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{15}+3=8+2\sqrt{15}$

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{6})^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=6+2\sqrt{12}+2=8+2\sqrt{12}$

যেহেতু, $\sqrt{15}>\sqrt{12}$, সুতরাং $8+2\sqrt{15}>8+2\sqrt{12}$ $\quad\therefore (\sqrt{5}+\sqrt{3})$ সংখ্যাটি বড়ো।

কষে দেখি 9.3

1. (a) $m+\frac{1}{m}=\sqrt{3}$ হলে, (i) $m^2+\frac{1}{m^2}$ এবং (ii) $m^3+\frac{1}{m^3}$ -এদের সরলতম মান নির্ণয় করি।

   (b) দেখাই যে, $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=2\sqrt{15}$

2. সরল করি : (a) $\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}-\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$ (b) $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

   (c) $\frac{4\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}}-\frac{30}{4\sqrt{3}-\sqrt{18}}-\frac{\sqrt{18}}{3-\sqrt{12}}$ (d) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

3. যদি $x=2$, $y=3$ এবং $z=6$ হয় তবে,

   $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}-\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

4. $x=\sqrt{7}+\sqrt{6}$ হলে (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $x+\frac{1}{x}$ (iii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং (iv) $x^3+\frac{1}{x^3}$ -এদের সরলতম মান নির্ণয় করি।

5. সরল করি : $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

   সরলফল 14 হলে, x-এর মান কী কী হবে হিসাব করে লিখি।

6. যদি $a=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ ও $b=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ হয়, তবে নীচের মানগুলি নির্ণয় করি।

   (i) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ (ii) $\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3}$ (iii) $\frac{3a^2+5ab+3b^2}{3a^2-5ab+3b^2}$ (iv) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$

7. যদি $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ হয়, তবে নিম্নলিখিতগুলির সরলতম মান নির্ণয় করি।

   (a) (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $y^2+\frac{1}{y^2}$ (iii) $x^3-\frac{1}{x^3}$ (iv) $xy+\frac{1}{xy}$

   (b) $3x^2-5xy+3y^2$

8. $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ এবং $xy=1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{12}{11}$

9. $(\sqrt{7}+1)$ এবং $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$-এর মধ্যে কোনটি বড়ো লিখি।

10. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) $x=2+\sqrt{3}$ হলে, $x+\frac{1}{x}$ -এর মান (a) 2 (b) $2\sqrt{3}$ (c) 4 (d) $2-\sqrt{3}$

(ii) যদি $p+q=\sqrt{13}$ এবং $p-q=\sqrt{5}$ হয়, তাহলে pq-এর মান (a) 2 (b) 18 (c) 9 (d) 8

(iii) যদি $a+b=\sqrt{5}$ এবং $a-b=\sqrt{3}$ হয়, তাহলে (a^2+b^2)-এর মান
(a) 8 (b) 4 (c) 2 (d) 1

(iv) $\sqrt{125}$ থেকে $\sqrt{5}$ বিয়োগ করলে বিয়োগফল হবে
(a) $\sqrt{80}$ (b) $\sqrt{120}$ (c) $\sqrt{100}$ (d) কোনটিই নয়

(v) $(5-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)(5+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$-এর গুণফল (a) 22 (b) 44 (c) 2 (d) 11

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $\sqrt{75}$ এবং $\sqrt{147}$ সদৃশ করণী।

(ii) $\sqrt{\pi}$ একটি দ্বিঘাত করণী।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $5\sqrt{11}$ একটি ________ সংখ্যা। (মূলদ/অমূলদ)

(ii) $(\sqrt{3}-5)$ -এর অনুবন্ধী করণী ________।

(iii) দুটি দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা হলে করণীদ্বয় ________ করণী।

11. **সংক্ষিপ্তধর্মী উত্তরপ্রশ্ন (S.A.)**

(i) $x=3+2\sqrt{2}$ হলে, $x+\frac{1}{x}$ -এর মান লিখি।

(ii) $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$ এবং $(\sqrt{10}+\sqrt{8})$ -এর মধ্যে কোনটি বড়ো লিখি।

(iii) দুটি মিশ্র দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা।

(iv) $\sqrt{72}$ থেকে কত বিয়োগ করলে $\sqrt{32}$ হবে তা লিখি।

(v) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\right)$ -এর সরলতম মান লিখি।

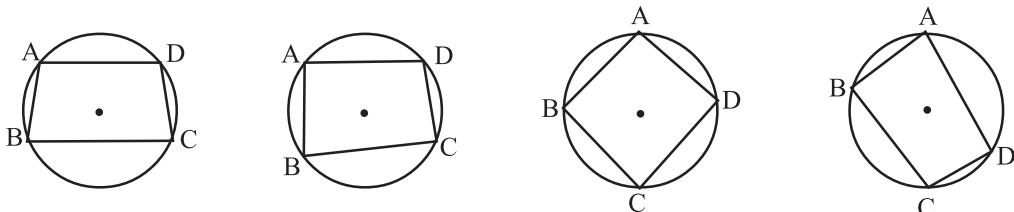
10 বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য

THEOREMS RELATED TO CYCLIC QUADRILATERAL

আমরা নানারকম জ্যামিতিক বিষয়ের মডেল তৈরি করব। তাই অনেকগুলি ছোটো বড়ো কাঠি নিয়ে আমরা বন্ধুরা আজ শনিবার স্কুলের গণিতের ল্যাবরেটরিতে একত্রিত হয়েছি। কাঠিগুলি জুড়ে আমরা অনেকগুলি নানান মাপের ছোটো বড়ো ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ তৈরি করব ও সেগুলি দিয়ে নতুন কিছু তৈরির চেষ্টা করব।

গণিতের ল্যাবরেটরিতে অনেকগুলি বৃত্তাকার রিং রাখা আছে। সাহানা এক মজার কাজ করল। সে একটি বড়ো বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে কাঠির তৈরি চতুর্ভুজগুলি আটকে নতুন মডেল তৈরির চেষ্টা করছে।

দেখছি, সকল ধরনের ও মাপের চতুর্ভুজ বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে আটকানো যাচ্ছে না।

(1) যে সকল চতুর্ভুজগুলি বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে আটকানো গেল, তাদের আলাদা করে রাখি ও তাদের মধ্যে মিল খোঁজার চেষ্টা করি।

কাঠির A ও C বিন্দুতে জোড় খুলে পাশের ছবির মতো বসিয়ে

দেখছি, $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ দুটি পরস্পর ☐ [পূরক / সম্পূরক]

একইভাবে, $\angle BAD$ ও $\angle BCD$ দুটিও পরস্পর ☐ [নিজে লিখি]

আমি খাতায় বৃত্ত ও বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ আঁকি ও হাতেকলমে যাচাই করে কী পাই দেখি।

হাতেকলমে

(i) আর্ট পেপারে বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম।

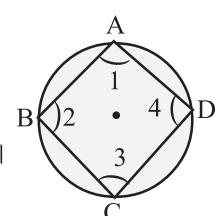
(ii) এবার ওই বৃত্তের উপরে যে-কোনো চারটি বিন্দু A, B, C ও D নিয়ে A, B; B, C; C, D ও D, A যোগ করে ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ পেলাম।

(iii) কোণগুলির 1, 2, 3 ও 4 নাম দিয়ে কেটে নিলাম।

(iv) এবার কোণ 4টির মধ্যে বিপরীত দুটি কোণ পাশাপাশি বসিয়ে দেখছি,

$\angle 1 + \angle 3 =$ ☐ এবং $\angle 2 + \angle 4 =$ ☐

[নিজে এঁকে ও কেটে হাতেকলমে যাচাই করে লিখি]

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

রাহুল একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ PQRS এঁকেছে।
আমি চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি,
$\angle P + \angle R = 180^\circ$ এবং $\angle Q + \angle S = 180^\circ$
[নিজে এঁকে মেপে যাচাই করি]

উপপাদ্য : 38. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ

এবং $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ

অঙ্কন : A, O এবং C, O যোগ করলাম।

প্রমাণ : ADC বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle ABC$

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ$\angle AOC = 2\angle ABC$

$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ$\angle AOC$ ....(i)

আবার ABC বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle ADC$

$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC$

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC$ ....(ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে পাই, $\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ$\angle AOC + \frac{1}{2}\angle AOC$

$= \frac{1}{2}$ (প্রবৃদ্ধ$\angle AOC + \angle AOC$)

$= \frac{1}{2} \times 4$ সমকোণ $= 2$ সমকোণ

অনুরূপে B, O এবং D, O যোগ করে প্রমাণ করতে পারি যে, $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ [প্রমাণিত]

বিকল্প প্রমাণ

প্রদত্ত : ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ

এবং $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ

অঙ্কন : AC ও BD দুটি কর্ণ টানলাম।

প্রমাণ : $\angle ADB = \angle ACB$ [একই বৃত্তাংশস্থ কোণ]

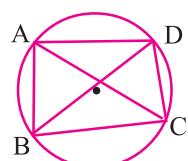
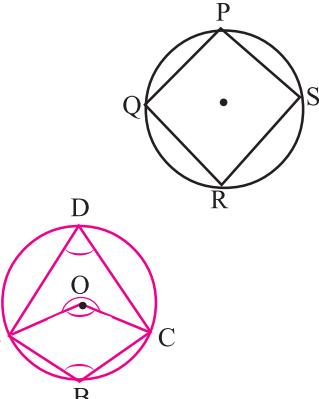
আবার $\angle BAC = \angle BDC$ [একই বৃত্তাংশস্থ কোণ]

আবার $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$

$= \angle ACB + \angle BAC$

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC$

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 2$ সমকোণ [$\because$ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]

অনুরূপে প্রমাণ করতে পারি যে, $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ [প্রমাণিত]

দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ প্রমাণ করার পর 'চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি 4 সমকোণের সমান'— এই ধর্ম থেকে অপর দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ সহজেই প্রমাণ করা যায়।

আমি যে-কোনো একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ PQRS অঙ্কন করি এবং যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, $\angle PQR + \angle PSR = 2$ সমকোণ এবং $\angle QPS + \angle QRS = 2$ সমকোণ **[নিজে করি]**

এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য কি সম্ভব?
অর্থাৎ কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি কি সমবৃত্তস্থ হবে?

হাতেকলমে

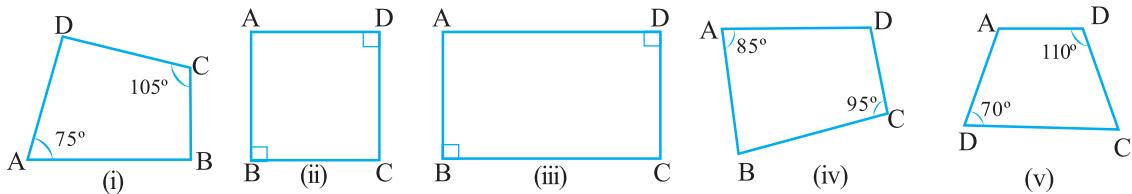
জয়িতা অনেকগুলি চতুর্ভুজ এঁকেছে যাদের বিপরীত কোণগুলির সমষ্টি 2 সমকোণ।

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(I) আমি (i) নং চতুর্ভুজটি নিয়ে AB ও BC বাহুর দুটি লম্বসমদ্বিখণ্ডক আঁকলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

(II) O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত এঁকে দেখছি বৃত্তটি A, B, C ও ☐ বিন্দুগামী হচ্ছে।

∴ পেলাম A, B ও C তিনটি অসমরেখ বিন্দুগামী নির্দিষ্ট বৃত্ত D বিন্দুগামী হচ্ছে।

∴ হাতেকলমে পেলাম, চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ হবে।

আমি (ii), (iii), (iv) ও (v) নং চতুর্ভুজের মতো যে-কোনো চতুর্ভুজ আঁকি যাদের বিপরীত কোণগুলির সমষ্টি 180° এবং একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করি যে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

উপপাদ্য : 39. *কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে, চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ হবে।* ***[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]***

প্রদত্ত : *ধরি, PQRS একটি চতুর্ভুজ যার $\angle PQR$ এবং $\angle PSR$ পরস্পর সম্পূরক, অর্থাৎ*

$\angle PQR + \angle PSR = 2$ *সমকোণ*

প্রমাণ করতে হবে যে : *চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি অর্থাৎ P, Q, R, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।*

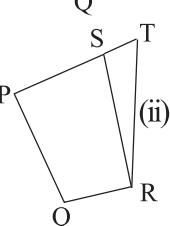
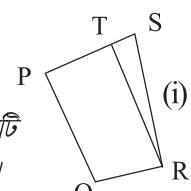
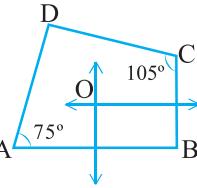
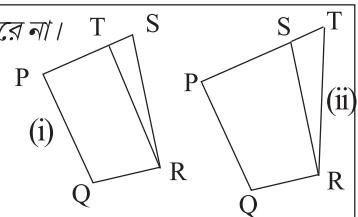
অঙ্কন : *P, Q, R তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। ধরি, অঙ্কিত বৃত্তটি S বিন্দুগামী নয়। বৃত্তটি PS বা PS-এর বর্ধিতাংশকে T বিন্দুতে ছেদ করে। T ও R যুক্ত করলাম।*

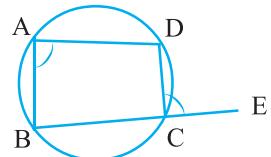
প্রমাণ : *অঙ্কন অনুসারে, PQRT একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ*

∴ $\angle PQR + \angle PTR = 2$ *সমকোণ* .... (1)

কিন্তু $\angle PQR + \angle PSR = 2$ *সমকোণ [প্রদত্ত]* .... (2)

(1) নং ও (2) নং থেকে পাই, $\angle PQR + \angle PTR = \angle PQR + \angle PSR$

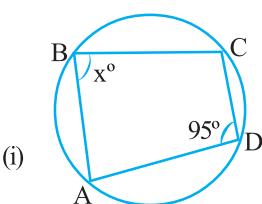
∴ $\angle PTR = \angle PSR$

একটি ত্রিভুজের বহিঃস্থকোণ ত্রিভুজের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান হতে পারে না।
$\therefore \angle PTR = \angle PSR$ হবে যখন S ও T বিন্দুদ্বয় সমাপতিত হবে।
$\therefore$ P, Q, R বিন্দুগামী বৃত্তটি অবশ্যই S বিন্দু দিয়ে যাবে।
$\therefore$ P, Q, R, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

অনুসিদ্ধান্ত : 'একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোনো বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণটি উৎপন্ন হয় তা অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হবে' — যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

প্রদত্ত : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের BC বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায় $\angle DCE$ বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle DCE =$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle BAD$

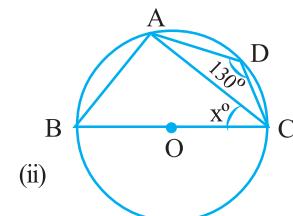
প্রমাণ : $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ [$\because$ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ]

আবার, $\angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$ [$\because$ BE সরলরেখাংশের উপর DC দণ্ডায়মান]

সুতরাং, $\angle BAD + \angle BCD = \angle BCD + \angle DCE$ $\quad \therefore \angle DCE = \angle BAD$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 1. নীচের দুটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবি দেখি এবং প্রতিক্ষেত্রে x-এর মান হিসাব করে লিখি।

(i) ABCD [ ] চতুর্ভুজ, $\quad \therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$\therefore x^\circ = \angle ABC = 180^\circ -$ [ ] $=$ [ ]

x= [ ] [নিজে লিখি]

(ii) ABCD [ ] চতুর্ভুজ, $\quad \therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$\therefore \angle ABC =$ [ ]

আবার $\angle BAC =$ [ ] সমকোণ, $\therefore \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore x^\circ + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$

$\therefore x^\circ + 50^\circ + 90^\circ = 180^\circ; \quad \therefore x =$ [ ] [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 2. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং O ওই বৃত্তের কেন্দ্র। যদি $\angle COD = 120^\circ$ এবং $\angle BAC = 30^\circ$ হয়, তবে $\angle BOC$ ও $\angle BCD$-এর মান কত হবে, হিসাব করে লিখি।

BC উপচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$।

$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC =$ [ ] [নিজে লিখি]

CD উপচাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle COD$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle CAD$,

$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

$\therefore \angle BAD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

$\therefore$ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$

$\therefore \angle BCD =$ [ ] [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 3 পাশের বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD-এর AD ও AB বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। $\angle CBF = 120^\circ$ হলে, $\angle CDE$ -এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 4 ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও DC বাহুকে বর্ধিত করায় P বিন্দুতে এবং AD ও BC বাহুকে বর্ধিত করায় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। $\angle ADC = 85^\circ$ এবং $\angle BPC = 40^\circ$ হলে, $\angle BAD$ ও $\angle CQD$-এর মান হিসাব করে লিখি।

ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বহিঃস্থ $\angle PBC = \angle ADC = 85^\circ$

$\therefore \Delta BPC$-এর $\angle BCP = 180^\circ - (85^\circ + 40^\circ) = \square$

আবার, $\angle BAD =$ বহিঃস্থ $\angle BCP = 55^\circ$

ΔCQD-এর, $\angle CQD + \angle DCQ = 85^\circ$

$\therefore \angle CQD = 85^\circ - \angle DCQ = 85^\circ - \angle BCP = \square$

$\therefore \angle BAD = 55^\circ$ এবং $\angle CQD = 30^\circ$

প্রয়োগ : 5. প্রমাণ করি যে, বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক।

প্রমাণ করতে হবে যে : ABCD সামান্তরিক আয়তাকার চিত্র।

প্রমাণ : ABCD একটি সামান্তরিক

$\therefore \angle ABC = \angle ADC$

আবার, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = \square$

সুতরাং, $2\angle ABC = 180^\circ$ $\therefore \angle ABC = 90^\circ$

যেহেতু, এই সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, সুতরাং, ABCD সামান্তরিকটি একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রয়োগ : 6. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\angle DAB$ ও $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, XY ওই বৃত্তের ব্যাস।

প্রদত্ত : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle DAB$ ও $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে : XY বৃত্তের একটি ব্যাস।

অঙ্কন : A, Y বিন্দুদ্বয় যোগ করি।

প্রমাণ : $\angle YAB$ ও $\angle YCB$ বৃত্তের উপচাপ YB-এর দ্বারা গঠিত একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle YAB = \angle YCB = \frac{1}{2}\angle BCD$ ....(I) [$\because$ CY, $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

আবার, $\angle XAY = \angle XAB + \angle YAB$

$= \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle BCD$ [(I) হইতে পেলাম] [$\because$ AX, $\angle DAB$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

$= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BCD) = \frac{1}{2} \times 180^\circ$ [$\because$ ABCD বৃত্তঃস্থ চতুর্ভুজ]

$= 90^\circ$

$\therefore \angle XAY$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore$ XY বৃত্তের ব্যাস।

প্রয়োগ : 7. প্রমাণ করি যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম এবং কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।

প্রদত্ত : ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম যার $AD \parallel BC$

প্রমাণ করতে হবে যে : $AB = DC$ এবং $AC = BD$

প্রমাণ : $\angle ADC + \angle DCB = 180^\circ$ [$\because$ $AD \parallel BC$ এবং DC ভেদক]

আবার, $\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$ [$\because$ ABCD বৃত্তঃস্থ চতুর্ভুজ]

$\therefore \angle ADC + \angle DCB = \angle BAD + \angle DCB$ $\quad \therefore \angle ADC = \angle BAD$ .... (I)

ΔBAD ও ΔADC-এর মধ্যে, $\angle BAD = \angle ADC$ [(I) থেকে পেলাম]

$\angle ABD = \angle DCA$ [একই বৃত্তাংশস্থ কোণ]

AD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta BAD \cong \Delta ADC$ [সর্বসমতার A–A–S শর্তানুসারে]

$\therefore AB = DC$ এবং $AC = BD$ ($\because$ সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ) [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 8. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AP, AQ দুটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S; প্রমাণ করি যে, O, R, A, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AP ও AQ দুটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S

প্রমাণ করতে হবে যে : O, R, A, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন : O, R বিন্দুদ্বয় এবং O, S বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি।

প্রমাণ : OR, AP জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। $\therefore OR \perp AP$

অর্থাৎ, $\angle ARO = 90^\circ$

OS, AQ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। $\therefore OS \perp AQ$

অর্থাৎ, $\angle ASO = 90^\circ$

$\therefore \angle ARO + \angle ASO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

যেহেতু AROS চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক, সুতরাং, O, R, A, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

প্রয়োগ : 9. প্রমাণ করি যে চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর মিলিত হয়ে যে চতুর্ভুজ গঠন করে সেটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রদত্ত : ABCD একটি চতুর্ভুজের AR, BP, CP ও DR যথাক্রমে $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$-এর সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর মিলিত হয়ে PQRS চতুর্ভুজ উৎপন্ন করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে : PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ : ΔARD-এর, $\angle ARD + \angle RDA + \angle DAR = 180^\circ$

$\therefore \angle ARD + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D = 180^\circ$ .... (I)

আবার, ΔBPC-এর, $\angle BPC + \angle PCB + \angle CBP = 180^\circ$

$\therefore \angle BPC + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 180^\circ$ .... (II)

(I) ও (II) হইতে পাই, $\angle ARD + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D + \angle BPC + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 180^\circ + 180^\circ$

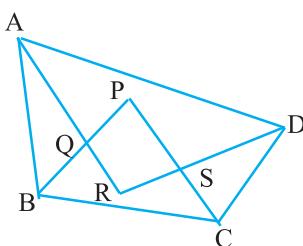
বা, $\angle ARD + \angle BPC + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360^\circ$

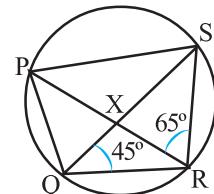
বা, $\angle ARD + \angle BPC + \frac{1}{2} \times 360^\circ = 360^\circ$

বা, $\angle ARD + \angle BPC = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle QRS + \angle QPS = 180^\circ$

PQRS চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

$\therefore$ PQRS চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

কষে দেখি 10

1. পাশের ছবির PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে X বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে $\angle PRS = 65^\circ$ এবং $\angle RQS = 45^\circ$; $\angle SQP$ ও $\angle RSP$-এর মান হিসাব করে লিখি।
2. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB বাহুকে X বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম এবং মেপে দেখছি $\angle XBC = 82^\circ$ এবং $\angle ADB = 47^\circ$; $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।
3. PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের PQ, SR বাহু দুটি বর্ধিত করায় T বিন্দুতে মিলিত হলো। বৃত্তের কেন্দ্র O; $\angle POQ = 110^\circ$, $\angle QOR = 60^\circ$, $\angle ROS = 80^\circ$ হলে $\angle RQS$ ও $\angle QTR$-এর মান হিসাব করে লিখি।
4. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। P ও Q বিন্দুগামী দুটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে যথাক্রমে A ও C এবং অপর বৃত্তকে যথাক্রমে B ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, AC || BD।
5. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ অঙ্কন করেছি এবং এর BC বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। প্রমাণ করি যে, $\angle BAD$ ও $\angle DCE$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তের উপর মিলিত হবে।
6. মোহিত একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু X দিয়ে দুটি সরলরেখা অঙ্কন করেছে যারা বৃত্তটিকে যথাক্রমে A, B বিন্দু ও C, D বিন্দুতে ছেদ করেছে। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, ΔXAC ও ΔXBD-এর দুটি করে কোণ সমান।
7. দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। এবার G বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করলাম যেটি বৃত্ত দুটিকে P ও Q বিন্দুতে এবং H বিন্দুগামী PQ-এর সমান্তরাল অপর একটি সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা বৃত্তদুটিকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে PQ = RS।
8. ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি যার AB = AC এবং বর্ধিত BC-এর উপর E যে-কোনো একটি বিন্দু। ΔABC-এর পরিবৃত্ত AE-কে D বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করি যে, $\angle ACD = \angle AEC$।
9. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। DE জ্যা $\angle BDC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করি যে, AE (বা বর্ধিত AE) $\angle BAC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক।
10. ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর উপর BE ও CF যথাক্রমে লম্ব। প্রমাণ করি যে, B, C, E, F বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ। এর থেকে প্রমাণ করি যে, ΔAEF ও ΔABC এর দুটি করে কোণ সমান।
11. ABCD একটি সামান্তরিক। A ও B বিন্দুগামী একটি বৃত্ত AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, E, F, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।
12. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। AB ও DC বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করলে P বিন্দুতে এবং AD ও BC বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করলে R বিন্দুতে মিলিত হয়। ΔBCP এবং ΔCDR-এর পরিবৃত্তদ্বয় T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, P, T, R সমরেখ।

13. ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O; প্রমাণ করি যে O বিন্দুটি পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

14. ABCD এমন একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এঁকেছি যে AC, ∠BAD-কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। এবার AD-কে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যেন DE = AB হয়। প্রমাণ করি যে, CE = CA

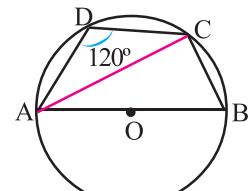
15. দুটি বৃত্তের একটি অপরটির কেন্দ্র O বিন্দুগামী এবং বৃত্ত দুটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা O বিন্দুগামী বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করেছে। P, B ও R, B যুক্ত করে ,প্রমাণ করি যে PR = PB

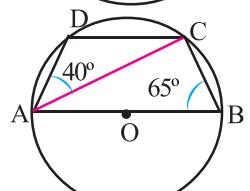
16. প্রমাণ করি যে একটি সুষম পঞ্চভুজের যে-কোনো চারটি শীর্ষবিন্দু সমবৃত্তস্থ।

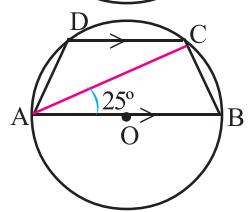
17. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V. S. A.)**

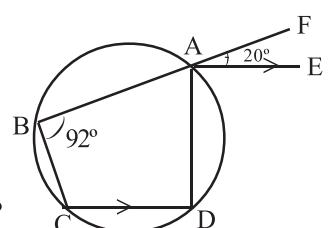
(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.) :

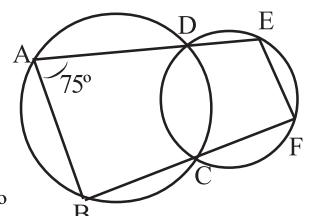
(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ∠ADC = 120° হলে, ∠BAC-এর মান

(a) 50° (b) 60° (c) 30° (d) 40°

(ii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ∠ABC = 65°, ∠DAC = 40° হলে, ∠BCD-এর মান

(a) 75° (b) 105° (c) 115° (d) 80°

(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB বৃত্তের ব্যাস। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ যার AB || DC এবং ∠BAC = 25° হলে ∠DAC-এর মান

(a) 50° (b) 25° (c) 130° (d) 40°

(iv) পাশের চিত্রে ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। BA -কে F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো। AE || CD, ∠ABC = 92° এবং ∠FAE = 20° হলে, ∠BCD-এর মান

(a) 20° (b) 88° (c) 108° (d) 72°

(v) পাশের চিত্রে দুটি বৃত্ত পরস্পরকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। D ও C বিন্দুগামী দুটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। ∠DAB = 75° হলে, ∠DEF-এর মান

(a) 75° (b) 70° (c) 60° (d) 105°

(B) সত্য / মিথ্যা লিখি :

(i) একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর পূরক।

(ii) একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান হয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি ____________।

(ii) একটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি ____________ চিত্র।

(iii) একটি বর্গাকার চিত্রের শীর্ষবিন্দুগুলি ____________।

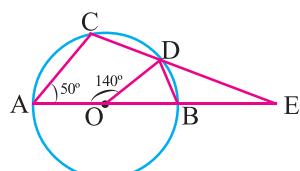
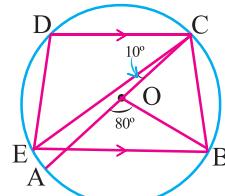
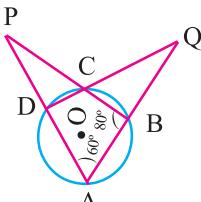
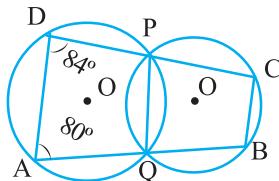
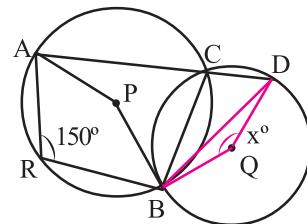
18. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S. A.) :**

(i) পাশের চিত্রে P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদুটি B ও C বিন্দুতে ছেদ করেছে।
ACD একটি সরলরেখাংশ। $\angle ARB = 150^\circ$, $\angle BQD = x^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) পাশের চিত্রে দুটি বৃত্ত পরস্পর P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle QAD = 80^\circ$ এবং $\angle PDA = 84^\circ$ হলে, $\angle QBC$ ও $\angle BCP$-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) পাশের চিত্রে $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$ হলে, $\angle DPC$ এবং $\angle BQC$-এর মান নির্ণয় করি।

(iv) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AC ব্যাস। $\angle AOB = 80^\circ$ এবং $\angle ACE = 10^\circ$ হলে, $\angle BED$-এর মান নির্ণয় করি।

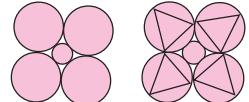
(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB বৃত্তের ব্যাস। $\angle AOD = 140^\circ$ এবং $\angle CAB = 50^\circ$ হলে, $\angle BED$-এর মান নির্ণয় করি।

11 সম্পাদ্য : ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন

CONSTRUCTION OF CIRCUMCIRCLE AND INCIRCLE OF A TRIANGLE

এবছরে আমাদের স্কুলে ঠিক হয়েছে হাতের কাজের জন্য প্রত্যেকে নিজের পছন্দ অনুযায়ী জিনিস তৈরি করবে। আমি ঠিক করেছি আমাদের টেবিলের একটি নতুন কাপড়ের ঢাকনার উপর সুতোর কাজ করব।

তাই আমি পেনসিল দিয়ে টেবিলের ঢাকনার উপর পাশের চিত্রের মতো একটি নকশা আঁকলাম।

আমার ভাই এক মজার কাজ করল। সে আমার আঁকা নকশায় কতকগুলি বৃত্তের মধ্যে পাশের চিত্রের মতো কতকগুলি জ্যা আঁকল।

দেখছি, নকশায় বৃত্তের জ্যাগুলি বৃত্তের মধ্যে ত্রিভুজ তৈরি করেছে।

(1) এভাবে আঁকা একটি বৃত্ত ও বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজ (যার শীর্ষবিন্দুগুলি বৃত্তে আছে) কী সম্পর্কে আছে?

বৃত্তটি বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজকে পরিবৃত্ত করে আছে। তাই বৃত্তটি ত্রিভুজটির **পরিবৃত্ত**।

যে-কোনো বৃত্তের উপর যে-কোনো তিনটি বিন্দু যোগ করে যে ত্রিভুজ পাব, বৃত্তটি ওই ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত**।

কিন্তু যদি একটি যে-কোনো ত্রিভুজ দেওয়া থাকে তবে ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত কীভাবে আঁকব?

একটি যে-কোনো ত্রিভুজ আঁকি ও ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কনের চেষ্টা করি।

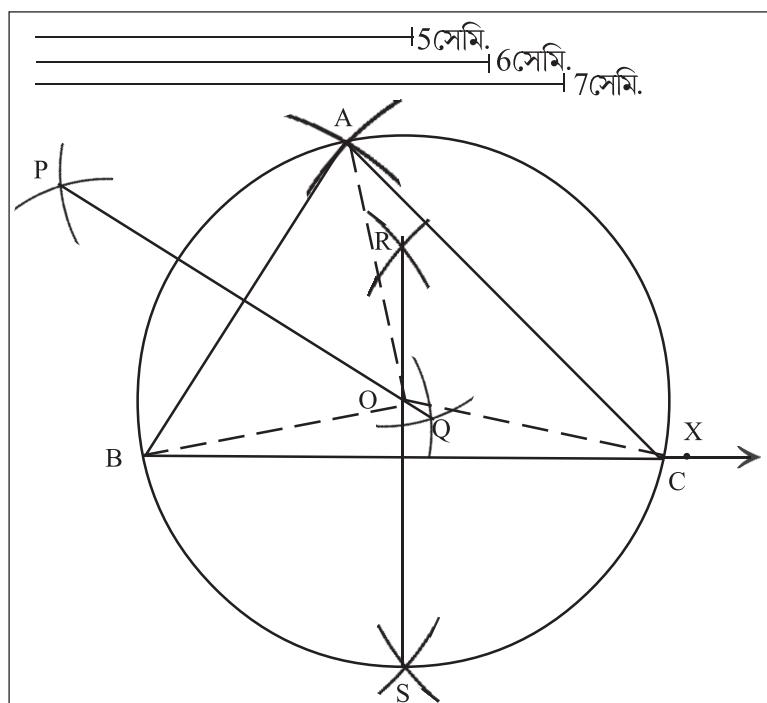
সম্পাদ্য : কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন।

5সেমি., 6সেমি., 7সেমি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করে ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) প্রথমে 5সেমি., 6সেমি. ও 7সেমি. বাহুবিশিষ্ট ΔABC অঙ্কন করি।

(ii) [ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কনের জন্য প্রথমেই পরিবৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করব। তাই ΔABC-এর যে-কোনো দুটি বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করব।]

ΔABC-এর AB ও BC বাহুর দুটি লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ ও RS অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

(iii) O বিন্দুটি AB ও BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু।

∴ O বিন্দুটি A, B ও C থেকে সমদূরবর্তী।

O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA অথবা OB অথবা OC দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যা Δ ABC-এর পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : O, A; O, B; O, C যোগ করলাম।

O, AB-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর একটি বিন্দু।

∴ O থেকে A ও B বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী অর্থাৎ OA = OB

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, OB = OC

∴ OA = OB = OC.

O-কে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করব সেই বৃত্ত B ও C বিন্দুগামী হবে অর্থাৎ বৃত্তটি Δ ABC-এর তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C দিয়ে যাবে।

∴ ওই বৃত্তটিই Δ ABC-এর পরিবৃত্ত।

4সেমি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমাবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে তার পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। **[নিজে করি]**

(2) ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে কী বলা হয়?

ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (Circumcentre) এবং ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (Circumradius) বলা হয়।

নিজে করি 11

1. কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সাপেক্ষে ত্রিভুজের বাহুগুলি বৃত্তের ☐ [ব্যাসার্ধ / জ্যা]
2. কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই বৃত্তের ☐
3. ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকগুলি যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দু থেকে শীর্ষবিন্দুগুলির দূরত্ব ☐
4. ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকগুলির ছেদবিন্দু থেকে যে-কোনো শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্বই ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ☐ [ব্যাস / ব্যাসার্ধ]-এর দৈর্ঘ্য।

আমার বন্ধু জাহির ঠিক করেছে আমার মতো একটি রুমালে সুতোর কাজ করবে। তাই সে তার খাতায় নানান ধরনের ত্রিভুজ এঁকে পরিবৃত্ত আঁকার চেষ্টা করছে। জাহির তার খাতায়

(i) ABC ত্রিভুজ এঁকেছে যার BC = 4সেমি. ∠ABC = 60º, ∠ACB = 70º

(ii) PQR ত্রিভুজ এঁকেছে যার QR = 3.5সেমি., ∠PQR = 90º এবং PR = 4.5সেমি.

(iii) XYZ ত্রিভুজ এঁকেছে যার ∠XYZ = 120º, ∠YZX = 30º এবং YZ = 3সেমি.।

দেখছি (i) নং ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

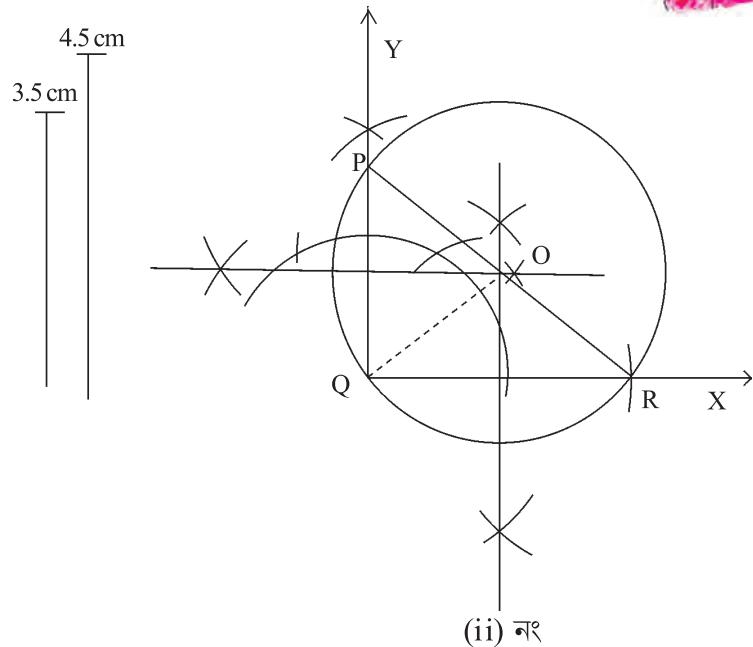
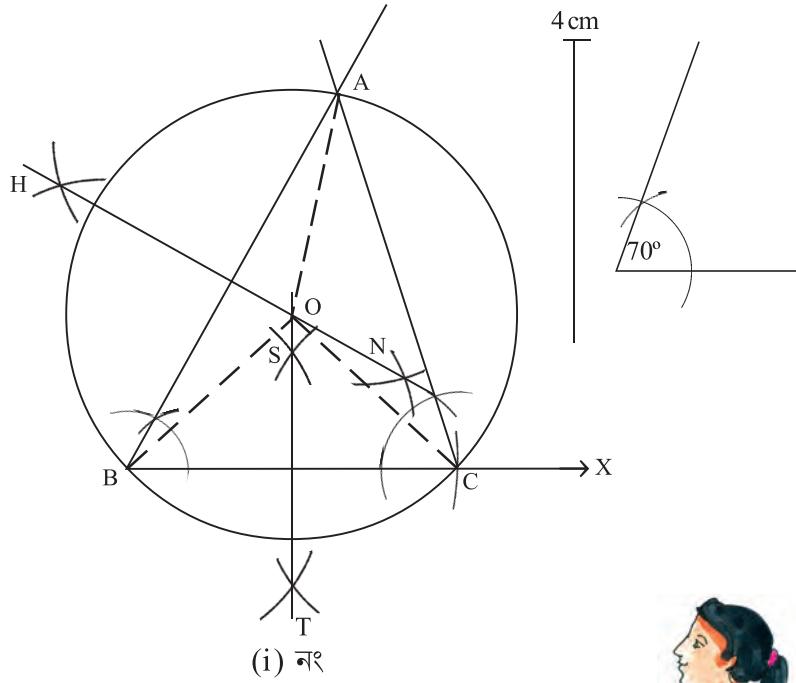
(i) নং ত্রিভুজ অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ABC-এর পরিবৃত্ত আঁকলাম।

দেখছি, ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ☐ [ভিতরে / বাহিরে] আছে।

অন্য যে-কোনো সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এঁকে দেখছি পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ভিতরে আছে।
[নিজে করি]

জাহিরের আঁকা (ii) নং ত্রিভুজটি ☐ কোণী ত্রিভুজ।

আমি (ii) নং ত্রিভুজ অর্থাৎ PQR সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকলাম।

দেখছি, PQR সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O অতিভুজের উপরে আছে এবং অতিভুজের ☐ বিন্দুতে আছে কারণ PO = OR [যেখানে O, ΔPQR-এর পরিকেন্দ্র]

তাহলে কি সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বের করার জন্য দুটো বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক আঁকতে হবে।
যেহেতু সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু তাই অতিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করলেই পরিকেন্দ্র পাব। যেমন PQR সমকোণী ত্রিভুজটির PR বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক আঁকলে পরিকেন্দ্র O পাব।
অন্য যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এঁকে দেখছি পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু। **[নিজে করি]**

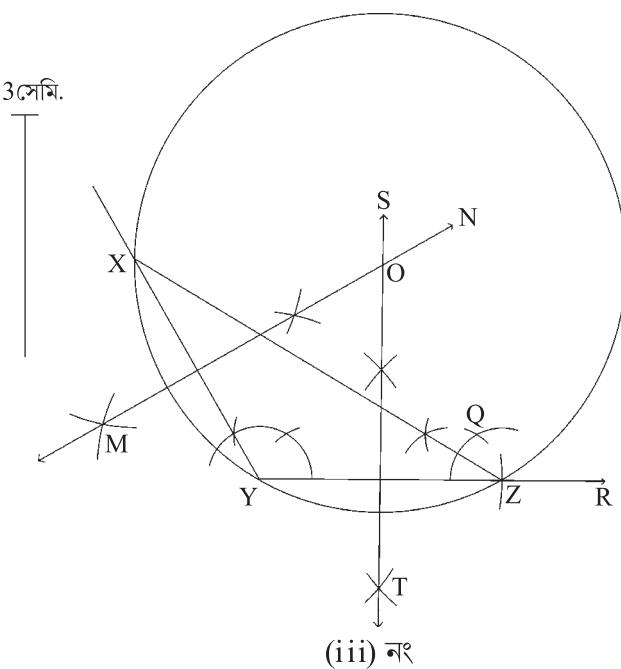
জাহিরের আঁকা (iii) নং ত্রিভুজটি ☐ কোণী ত্রিভুজ।

আমি (iii) নং ত্রিভুজ অর্থাৎ XYZ স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকলাম।

দেখছি, XYZ স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ☐ [ভিতরে / বাহিরে] আছে।

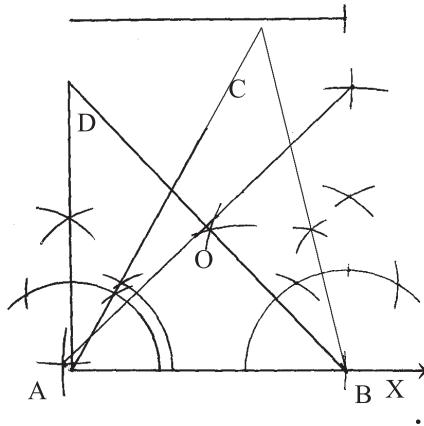
(iii) নং

অন্য যে-কোনো স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এঁকে দেখছি পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির বাহিরে আছে। **[নিজে করি]**

∴ পেলাম, (i) কোনো ত্রিভুজ সূক্ষ্মকোণী, সমকোণী বা স্থূলকোণী হলে পরিকেন্দ্র যথাক্রমে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ☐, অতিভুজের উপরে বা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ☐ অবস্থিত হবে।

(ii) সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজের মধ্যবিন্দুই পরিকেন্দ্র।

আমি একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করেছি যার AB = 3.5 সেমি., $\angle BAC = 60^\circ$ এবং $\angle ABC = 75^\circ$

আমার বন্ধু সাহানা আমার আঁকা ABC ত্রিভুজে ΔABD অঙ্কন করল যার $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ABD = 45^\circ$ এবং AB বাহুর যে পার্শ্বে C বিন্দু আছে D বিন্দুও সেই পার্শ্বেই আছে।

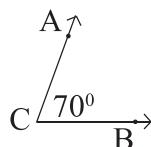
আমি সমকোণী ত্রিভুজ ABD-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করে দেখি C বিন্দু দিয়ে যায় কিনা। **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : DB অতিভুজের মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি ও O-কে কেন্দ্র করে DO রেখাংশের দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন করে ΔABD-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি।

দেখছি, ΔABD-এর পরিবৃত্ত ΔABC-এর C বিন্দুগামী।

কিন্তু কেন ΔABD ও ΔABC-এর পরিবৃত্ত একই বৃত্ত পেলাম ত্রিভুজের কোণ মেপে যুক্তি দিয়ে লিখি। **[নিজে লিখি]**

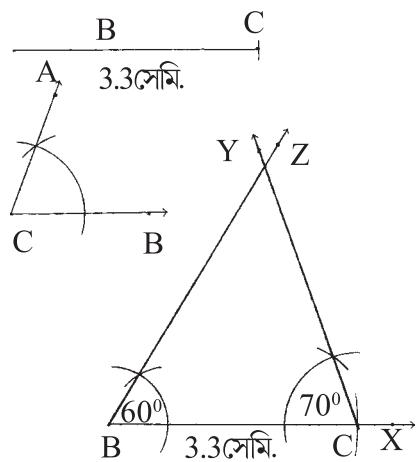
প্রয়োগ : 1. ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার BC = 6.5সেমি., $\angle ABC = 60^\circ$ এবং $\angle ACB = 70^\circ$

ত্রিভুজটি অঙ্কন করার সময় আমরা স্কেলের সাহায্যে 6.5সেমি. সরলরেখাংশ ও চাঁদার সাহায্যে 70° কোণ আগে এঁকে নিই কেন ? আবার পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে ত্রিভুজটির 60° কোণ আঁকি কেন?

সম্পাদ্য করার সময় আমাদের কাছে চাঁদা বা নির্দিষ্ট দাগ চিহ্নিত স্কেল থাকে না। অর্থাৎ কোণ এবং সরলরেখাংশ আঁকার জন্য আমাদের কাছে কেবলমাত্র পেনসিল কম্পাস ও দাগ ছাড়া স্কেল এবং পেনসিল থাকে।

আর প্রশ্নপত্রে B 3.3সেমি. C এবং A, C, 70^0, B এঁকে দেওয়া থাকে।

যে কোণগুলি পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে আঁকা যায় সেগুলি আঁকা থাকে না।

সুতরাং প্রশ্নপত্রে আঁকা BC রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমান করে BX রশ্মি থেকে 3.3সেমি. কেটে নেওয়া হয় এবং প্রশ্নপত্রে আঁকা $\angle ACB$-এর সমান করে BC রেখাংশের C বিন্দুতে $\angle YCB = 70^o$ আঁকা হয়। তারপর পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে B বিন্দুতে 60^o কোণ $\angle ZBC$ আঁকা হয়। CY ও BZ পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। এভাবে নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করা হয়।

যেহেতু প্রশ্নপত্রে 3.3সেমি. দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশ ও 70^o পরিমাপের কোণ প্রশ্নপত্রে আঁকা থাকে না তাই আমাদের ওই দুটি যথাক্রমে স্কেল ও চাঁদার সাহায্যে এঁকে নিতে হলো।

কষে দেখি 11.1

1. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি অঙ্কন করি। প্রতিটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করে প্রতিক্ষেত্রে পরিকেন্দ্রের অবস্থান লিখি ও পরিব্যাসার্ধের [অর্থাৎ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য] দৈর্ঘ্য মেপে লিখি। [প্রতিক্ষেত্রে কেবলমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিই]

   (i) একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

   (ii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার ভূমির দৈর্ঘ্য 5.2 সেমি. এবং সমান বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 7 সেমি.।

   (iii) একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার সমকোণ সংলগ্ন বাহুদুটির দৈর্ঘ্য 4সেমি. ও 8সেমি.।

   (iv) একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 12সেমি. এবং অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5সেমি.।

   (v) একটি ত্রিভুজ আঁকি যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6.7সেমি. এবং বাহুসংলগ্ন কোণ দুটির পরিমাণ 75^o ও 55^o.

   (vi) ABC একটি ত্রিভুজ যার ভূমি BC = 5সেমি., $\angle ABC = 100^o$ এবং AB = 4সেমি.

2. PQ = 7.5 সেমি. $\angle QPR = 45^o$, $\angle PQR = 75^o$;

   PQ = 7.5 সেমি. $\angle QPS = 60^o$, $\angle PQS = 60^o$;

   ΔPQR ও ΔPQS এমনভাবে অঙ্কন করি যে R ও S বিন্দু যেন PQ-এর একই দিকে অবস্থিত হয়। ΔPQR-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি এবং এই পরিবৃত্তের সাপেক্ষে S বিন্দুর অবস্থান তার ভিতরে, উপরে, না বাহিরে তা লক্ষ করে লিখি ও তারা ব্যাখ্যা খুঁজি।

3. AB = 5 সেমি. $\angle BAC = 30^o$, $\angle ABC = 60^o$;

   AB = 5 সেমি. $\angle BAD = 45^o$, $\angle ABD = 45^o$;

ΔABC ও ΔABD এমনভাবে অঙ্কন করি যে, C ও D বিন্দু যেন AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয়। ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি এবং ওই পরিবৃত্তের সাপেক্ষে D বিন্দুর অবস্থান লিখি। এছাড়াও অন্য কী কী বৈশিষ্ট্য লক্ষ করছি বুঝে লিখি।

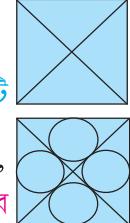
4. ABCD একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন করি যার AB = 4সেমি., BC = 7সেমি., CD = 4সেমি., $\angle$ABC = 60°, $\angle$BCD = 60°; ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি এবং এর কী কী বৈশিষ্ট্য লক্ষ করছি বুঝে লিখি।

5. একটি আয়তক্ষেত্র PQRS অঙ্কন করি যার PQ = 4 সেমি. এবং QR = 6 সেমি.। আয়তক্ষেত্রের কর্ণদুটি অঙ্কন করি এবং অঙ্কন না করে ΔPQR-এর পরিকেন্দ্র কোথায় হবে এবং পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।
ΔPQR-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করে যাচাই করি।

6. যে-কোনো বৃত্তাকার চিত্র প্রদত্ত হলে তার কেন্দ্র কীরূপে নির্ণয় করব? পাশের বৃত্তাকার চিত্রের কেন্দ্র নির্ণয় করি।

আমি জাহিরের বুমালে পেনসিল দিয়ে পাশের চিত্রটি এঁকে দিলাম।

উমা আমার আঁকা চিত্রের ত্রিভুজের মধ্যে পাশের মতো কতকগুলি বৃত্ত এঁকে একটি নকশা তৈরি করল।

উমা আঁকল,

(3) দেখছি, উমার আঁকা নকশায় ত্রিভুজের মধ্যের বৃত্তগুলি ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে স্পর্শ করে আছে। এইরকম বৃত্তকে কী বলা হয়?

ত্রিভুজের ভেতরে অবস্থিত বৃত্তটি যা ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে স্পর্শ করে আছে, সেটি ওই ত্রিভুজের **অন্তর্বৃত্ত**।

সম্পাদ্য : আমি একটি ত্রিভুজ আঁকি যার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4.5সেমি., 5.5সেমি. এবং 6সেমি.। ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি।

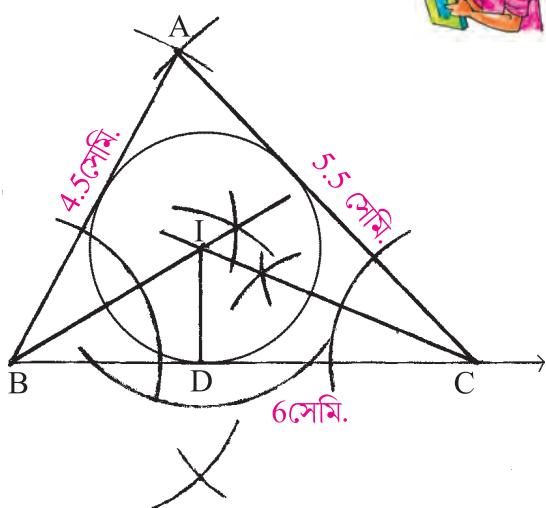
ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন

ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি, যার BC = 6সেমি., CA = 5.5সেমি. এবং AB = 4.5সেমি.। ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) $\angle$ABC ও $\angle$ACB-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BI ও CI অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে I বিন্দুতে ছেদ করল।

(ii) I বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

(iii) I বিন্দুকে কেন্দ্র করে ID দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম। ওই বৃত্তই হলো ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত।

4 ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে কী বলে?

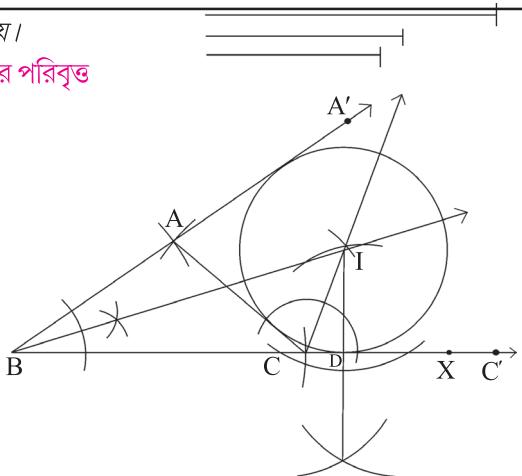
কোনো ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্রকে অন্তঃকেন্দ্র (Incentre) এবং ব্যাসার্ধকে অন্তঃব্যাসার্ধ (Inradius) বলা হয়।

কোনো সমবাহু ত্রিভুজের যে-কোনো কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক তার বিপরীত বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক হয়। সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র কোথায় অবস্থিত হবে অঙ্কন করে যাচাই করি। [নিজে করি]

সমবাহু ত্রিভুজে পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র অঙ্কন করে দেখছি, সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র ☐ [একই / আলাদা] বিন্দু।

এই অংশটি (ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কন) মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়।

আমার বন্ধু সজল তার খাতায় নানান ধরনের ত্রিভুজ এঁকে তাদের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করছে।

সজল এক মজার কাণ্ড করল। সে একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করল যার BC = 4.5সেমি., CA = 2.7সেমি., AB = 3সেমি. BA ও BC বাহুকে যথাক্রমে A′ ও C′ পর্যন্ত বাড়িয়ে দিল। $\angle ABC$ ও $\angle ACC'$ এর সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করল যারা পরস্পরকে I বিন্দুতে ছেদ করে। I বিন্দু থেকে বর্ধিত BC বাহুর উপর ID লম্ব অঙ্কন করল যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। I বিন্দুকে কেন্দ্র করে ID দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করল যা বর্ধিত BC, CA ও বর্ধিত BA বাহুকে স্পর্শ করে।

এই ধরনের বৃত্তকে কী বলা হয়?

কোনো ত্রিভুজের বাহিরে অবস্থিত এই ধরনের বৃত্ত যা ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুটি বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে আছে, তাকে ওই ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত** (excircle) বলা হয়। I বিন্দুকে বহিঃকেন্দ্র (excentre) এবং ব্যাসার্ধকে বহিঃব্যাসার্ধ (exradius) বলে।

আমি যে-কোনো একটি ত্রিভুজ আঁকি ও ওই ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কনের চেষ্টা করি।

(i) একটি ত্রিভুজের কয়টি বহির্বৃত্ত ও কয়টি অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করা যায় তা নিজে লিখি।

(ii) একটি ত্রিভুজের কয়টি বিন্দু ত্রিভুজের বাহুগুলি থেকে সমদূরবর্তী তা নিজে লিখি।

কষে দেখি 11.2

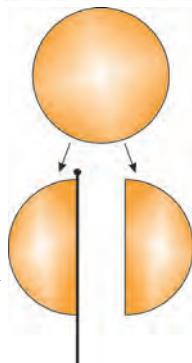
1. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি অঙ্কন করি এবং প্রতিটি ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য মেপে লিখি :
   - (i) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 7 সেমি., 6 সেমি. ও 5.5 সেমি.।
   - (ii) দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 7.6 সেমি., 6 সেমি. ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাপ 75°
   - (iii) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6.2 সেমি. এবং ওই বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির পরিমাপ 50° ও 75°
   - (iv) একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 7 সেমি. ও 9 সেমি.
   - (v) একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 9 সেমি. এবং অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5.5 সেমি.
   - (vi) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 7.8 সেমি. এবং সমান বাহু দুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 6.5 সেমি.
   - (vii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং সমান কোণের একটির পরিমাপ 45°
   - (viii) 7 সেমি বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করি। ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে স্কেলের সাহায্যে পরিব্যাসার্ধের ও অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি এবং তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কিনা লিখি।

12 গোলক
SPHERE

প্রতি বছর আমরা মেলা থেকে তালপাতার হাতপাখা কিনে আনি। বাড়িতে ওই হাতপাখাগুলি ব্যবহার করি। কিন্তু স্কুলে যাওয়ার পথে ছোটো হাতপাখা থাকলে সুবিধা হয়। তাই আমরা ঠিক করেছি বাড়ির পড়ে থাকা পিচবোর্ডের সাহায্যে হাতপাখা তৈরি করব।

আমার ভাই-এর বন্ধু সুজিত অনেকগুলি ছোটো বড়ো গোলাকার পিচবোর্ডের চাকতি নিয়ে এসেছে।

আমার ভাই একটি পিচবোর্ডের গোলাকার চাকতি সমান দু-ভাঁজ করে দুটি অর্ধবৃত্তাকার চাকতি কেটে নিয়ে একটি চাকতির ব্যাস বরাবর একটি কাঠি আঠা ও কাগজ দিয়ে আটকে দিল ও পাশের ছবির মতো হাতপাখা তৈরি করল।

(1) কিন্তু ওই কাঠিটিকে কেন্দ্র করে যখন ভাই অর্ধবৃত্তাকার চাকতিটি ঘোরাচ্ছে তখন অনেকটা বলের মতো ঘনবস্তু তৈরি হচ্ছে দেখছি। একে কী বলা হয়?

এইভাবে অর্ধবৃত্তাকার চাকতির ব্যাসকে অক্ষ করে চাকতিটি ঘোরালে বলের মতো দেখতে যে ঘনবস্তু দেখতে পাই সেটি **গোলক (Sphere)**।

বুঝেছি, গোলকের তল বলের তলের মতো।

∴ গোলকের ☐ টি তল এবং এটি একটি ☐ [বক্রতল/সমতল]

আমরা সুজিতের আনা গোলাকার চাকতির সাহায্যে খুব সহজেই অনেকগুলি হাতপাখা তৈরি করলাম এবং প্রত্যেকে 1টি করে হাতপাখা নিয়ে নিলাম।

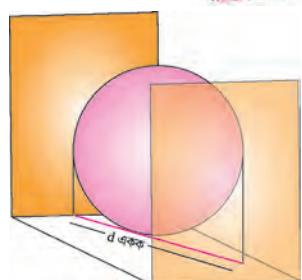
এবার আমরা ঠিক করেছি বাড়িতে ব্যবহৃত গোলক আকারের ঘনবস্তুগুলি খুঁজি। আমার বোন একটি বড়ো গোলকাকার চামড়ার বল এনে দিল।

কিন্তু এই গোলকাকার চামড়ার বল তৈরি করতে কতটা পরিমাণ চামড়া লেগেছে কীভাবে পাব? অর্থাৎ একটি গোলকের বক্রতলের বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কীভাবে পাব? হাতেকলমে চেষ্টা করি।

হাতেকলমে গোলকের সমগ্রতলের বা বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

(1) একটি গোলকাকার বল নিলাম এবং দুটি উল্লম্ব পিচবোর্ডের মধ্যে পাশের ছবির মতো বলটি রেখে বলটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য (r একক) [যেখানে ব্যাসের দৈর্ঘ্য (d একক)] নির্ণয় করলাম।

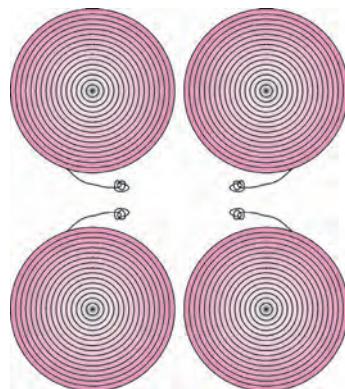
(2) বলটির উপরে একটি পিন আটকে দিলাম।

(3) এবার পিনটিতে দড়ি আটকে পাশের ছবির মতো এমনভাবে জড়িয়ে দিলাম যাতে কোনো অংশ ফাঁকা না থাকে এবং দড়ির কোনো অংশ জড়ানো দড়ির উপর না থাকে।

(4) এবার দড়ির শুরু ও শেষ বিন্দু দুটি চিহ্নিত করলাম এবং দড়িটি খুলে এই বিন্দুদুটির মর্ধ্যবর্তী দূরত্ব (ℓ) মাপলাম।

(5) মোটা সাদা আর্টপেপারে r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের 4টি বৃত্ত অঙ্কন করলাম।

(6) এবার প্রতিটি বৃত্ত ওই একই রকম দড়ি দিয়ে পাশের ছবির মতো ভরাট করলাম।

মেপে দেখছি, প্রতিটি বৃত্ত ভরাট করতে a দৈর্ঘ্যের দড়ি লেগেছে।

আবার দেখছি, $\ell = 4a$

∴ গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ (r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্তের ক্ষেত্রফল)
$= 4 \times \pi r^2$ বর্গ একক $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

∴ হাতেকলমে পেলাম

গোলকের বক্রতলের বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Curved Surface or Whole Surface Area) $= 4\pi r^2$

বুঝেছি, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের চামড়ার বল তৈরি করতে $4\pi r^2$ বর্গ একক চামড়া লাগবে।

প্রয়োগ : 1. যদি বলটির ব্যাস 42 সেমি. হয়, তবে বলটিতে কতটা চামড়া আছে হিসাব করি।

বলটির ব্যাস = 42 সেমি. ∴ বলটির ব্যাসার্ধ $= \frac{42}{2}$ সেমি. = 21 সেমি.

∴ বলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi \times (21)^2$ বর্গ সেমি.

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ বর্গ সেমি.

$= \square$ বর্গ সেমি.

∴ বলটিতে 5544 বর্গ সেমি. চামড়া আছে।

প্রয়োগ : 2. লোহার পাতে তৈরি একটি গোলকের ব্যাস 14 সেমি.। গোলকটিকে রং করতে প্রতি বর্গ সেমি. 2.50 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

(2) ওই গোলকাকার বলটি যদি নিরেট পাথরের বল হতো তবে ওই বলে কতটা পরিমাণ পাথর থাকবে কীভাবে পাবো?

গোলকের আয়তন নির্ণয়ের মাধ্যমে পাবো।

গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক (যেখানে গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক)

বুঝেছি, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের নিরেট পাথরের বলে পাথর আছে $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

প্রয়োগ : 3. 14 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট গোলকাকার নিরেট পাথরের বলে কতটা পরিমাণ পাথর আছে হিসাব করে লিখি।

গোলকাকার নিরেট পাথরের বলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{14}{2}$ সেমি. = 7 সেমি.

∴ গোলকাকার নিরেট পাথরের বলে পাথর আছে $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^3$ ঘন সেমি.

$= \square$ ঘন সেমি.

প্রয়োগ : 4. 0.7 ডেসিমি দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কোনো পাথরের গোলকাকার বল চৌবাচ্চার জলে ডোবালে কতটা পরিমাণ জল অপসারিত হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 5. যদি কোনো গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 2464 বর্গ মিটার হয়, তবে ওই গোলকের আয়তন কত হবে হিসাব করি।

ধরি, গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

শর্তানুসারে, $4\pi r^2 = 2464$

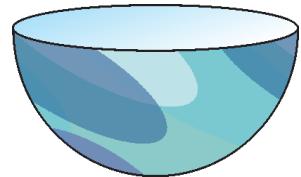
বা, $4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 2464$

বা, $r^2 = 2464 \times \frac{7}{22 \times 4} = 28 \times 7 = 7^2 \times 2^2$

$\therefore r = 14$

$\therefore$ ওই গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14$ ঘন মিটার

$= 11498.67$ ঘন মিটার

3 আমার পড়ার ঘরের টেবিলে একটি Paperweight ছিল। আমার বোন Paperweight নিয়ে এসে স্কেল দিয়ে তার ব্যাসার্ধ মাপছে।

দেখছি ওই Paperweight টি একটি নিরেট অর্ধেক গোলকাকার ঘনবস্তু যার ☐ টি সমতল ও ☐ টি বক্রতল।

এই অর্ধগোলকাকার ঘনবস্তুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$ বর্গ একক

$= 2\pi r^2$ বর্গ একক

[যেখানে অর্ধগোলকাকারের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক]

এবং এই নিরেট অর্ধগোলকাকার ঘনবস্তুর সমতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

বুঝেছি, এই নিরেট অর্ধগোলকাকার ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হলে তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= (2\pi r^2 + \pi r^2)$ বর্গ একক

$= 3\pi r^2$ বর্গ একক

$\therefore$ নিরেট অর্ধগোলকের (Solid Hemisphere) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 3\pi r^2$ বর্গ একক

প্রয়োগ : 6. যদি একটি অর্ধগোলকাকার নিরেট ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হয়,তবে তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 3 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$ বর্গ সেমি.

$=$ ☐ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 7. অর্ধগোলাকৃতি একটি বাটি তৈরি করতে যদি 173.25 বর্গ সেমি. পাত লাগে, তবে ওই বাটিটির মুখের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

[**উত্তর সংকেত :** বাটিটি যেহেতু নিরেট নয় তাই শুধুমাত্র বক্রতলে পাত লাগবে]

4 এবার একটি নিরেট অর্ধগোলকাকার পাথরের Paperweight-এ কতটা পরিমাণ পাথর আছে হিসাব করি।

ধরি, অর্ধগোলকাকার পাথরের Paperweight-এর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক

$\therefore$ নিরেট অর্ধগোলকের আয়তন $= \frac{1}{2} \times$ গোলকের আয়তন

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$ ঘন একক $= \frac{2}{3}\pi r^3$ ঘন একক

$\therefore$ অর্ধগোলকের আয়তন $= \frac{2}{3} \pi r^3$ ঘন একক

প্রয়োগ : 8. যদি একটি পাথরের অর্ধগোলকাকার নিরেট ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হয়, তবে তাতে কতটা পরিমাণ পাথর আছে হিসাব করি।

নিরেট অর্ধগোলকাকার Paperweight-এ পাথর আছে $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14$ ঘন সেমি.= ☐ ঘনসেমি.

প্রয়োগ : 9. দুটি গোলকাকার ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 1:4 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, দুটি গোলকাকার ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে r_1 একক ও r_2 একক

শর্তানুসারে, $\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{1}{4}$ বা, $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{\text{প্রথম গোলকের আয়তন}}{\text{দ্বিতীয় গোলকের আয়তন}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$\therefore$ গোলকাকার ঘনবস্তুদুটির আয়তনের অনুপাত 1:8

প্রয়োগ : 10. যদি দুটি গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 1:2 হয়, তবে তাদের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

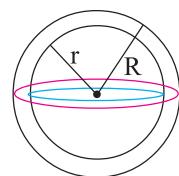
প্রয়োগ : 11. যদি একটি গোলকের আয়তন ও পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হয়, তবে গোলকটির ব্যাসার্ধের সাংখ্যমান হিসাব করে লিখি।

ধরি, গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।

$\therefore$ গোলকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক এবং আয়তন $= \frac{4}{3} \pi r^3$ ঘন একক

প্রশ্নানুসারে, $\frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^2$ (যেহেতু সাংখ্যমান সমান) $\therefore r = 3$ [$\because r \neq 0$]

$\therefore$ গোলকটির ব্যাসার্ধের সাংখ্যমান 3.

5 কোনো ফাঁপা গোলকের বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য R একক এবং অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হলে, ওই ফাঁপা গোলকে কী পরিমাণ পদার্থ আছে অর্থাৎ ওই ফাঁপা গোলক তৈরি করতে কত পরিমাণ পদার্থ লেগেছে তার আয়তন কীভাবে পাব?

ওই ফাঁপা গোলক তৈরি করতে যে পরিমাণ পদার্থ লেগেছে তার আয়তন $= \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ ঘন একক।

প্রয়োগ : 12. 1 সেমি. ও 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 1 সেমি পুরু ফাঁপা গোলকে পরিণত করা হলে, নতুন গোলকটির বাইরের বক্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, নতুন গোলকের বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

$\therefore$ ওই গোলকের অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = (r–1) সেমি.

প্রশ্নানুসারে, $\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r-1)^3 = \frac{4}{3}\pi (1)^3 + \frac{4}{3}\pi (6)^3$

বা, $\frac{4}{3}\pi\{r^3 - (r-1)^3\} = \frac{4}{3}\pi (1+216)$

বা, $r^3 - r^3 + 3r^2 - 3r + 1 = 217$

বা, $3r^2 - 3r - 216 = 0$

বা, $r^2 - r - 72 = 0$

বা, $r^2 - 9r + 8r - 72 = 0$

বা, $r(r-9) + 8(r-9) = 0$

বা, $(r-9)(r+8) = 0$

হয়, $r - 9 = 0 \quad \therefore r = 9$

নতুবা, $r + 8 = 0 \quad \therefore r = -8$

যেহেতু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই $r \neq -8$; সুতরাং $r = 9$

$\therefore$ নতুন গোলকটির বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = 9 সেমি.

$\therefore$ বাইরের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4 \times \frac{22}{7} \times 9 \times 9$ বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি. **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

কষে দেখি 12

1. একটি গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10.5 সেমি. হলে, তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
2. একটি চামড়ার বল তৈরি করতে প্রতি বর্গ সেমি. 17.50 টাকা হিসাবে 431.20 টাকা লেগেছে। বলটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
3. স্কুলে সটপাট খেলার জন্য যে বলটি ব্যবহার করা হয় তার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 7 সেমি. হলে, বলটিতে কত ঘন সেমি. লোহা আছে হিসাব করে লিখি।
4. 28 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট গোলক জলে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত করলে যে পরিমাণ জল অপসারিত করবে তা নির্ণয় করি।
5. কোনো গোলকাকার গ্যাস বেলুন ফোলাবার সময়ে তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 7সেমি. থেকে 21 সেমি. হলে বেলুনটির পূর্বের ও পরের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করি।
6. অর্ধগোলাকৃতি একটি বাটি তৈরি করতে $127\frac{2}{7}$ বর্গ সেমি. পাত লেগেছে। বাটিটির মুখের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
7. একটি নিরেট লোহার গোলার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2.1 সেমি.। ওই গোলাটিতে কত ঘন সেমি. লোহা আছে তা হিসাব করে লিখি এবং ওই লোহার গোলার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

8. একটি নিরেট সিসার গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি.। এই গোলকটি গলিয়ে 3.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কতগুলি নিরেট গোলক তৈরি করা যাবে হিসাব করে লিখি।

9. 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি নিরেট তামার গোলক গলিয়ে একটি নিরেট বড়ো গোলক তৈরি করা হলো। বড়ো গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

10. একটি অর্ধগোলাকৃতি গম্বুজের ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 42 ডেসিমি.। গম্বুজটির উপরিতল রং করতে প্রতি বর্গ মিটার 35 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে তা হিসাব করে লিখি।

11. একই ধাতুর পাত থেকে তৈরি দুটি ফাঁপা গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 21 সেমি. এবং 17.5 সেমি.। গোলকদুটি তৈরি করতে যে পরিমাণ ধাতুর পাত লেগেছে তার অনুপাত নির্ণয় করি।

12. একটি ধাতব গোলকের উপরিতল এমনভাবে কেটে নেওয়া হলো যে নতুন গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল আগের গোলকের ঠিক অর্ধেক হয়। কেটে নেওয়া অংশের আয়তনের সঙ্গে অবশিষ্ট গোলকের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করি।

13. 14 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ভূগোলকের অক্ষটির বক্রতলে 0.7 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্তাকার ছিদ্র করা হয়েছে। ভূগোলকটির গোলাকার অংশের ধাতব পাতের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

14. 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট লোহার গোলককে গলিয়ে 1 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কয়টি নিরেট গুলি তৈরি করা যাবে হিসাব করে লিখি।

15. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) 2r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট নিরেট গোলকের আয়তন

(a) $\frac{32\pi r^3}{3}$ ঘনএকক (b) $\frac{16\pi r^3}{3}$ ঘনএকক (c) $\frac{8\pi r^3}{3}$ ঘনএকক (d) $\frac{64\pi r^3}{3}$ ঘনএকক

(ii) দুটি নিরেট গোলকের আয়তনের অনুপাত 1:8 হলে, তাদের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 1:2 (b) 1:4 (c) 1:8 (d) 1:16

(iii) 7সেমি দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

(a) 588 π বর্গ সেমি. (b) 392 π বর্গ সেমি. (c) 147π বর্গ সেমি. (d) 98π বর্গ সেমি.

(iv) দুটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 16:9 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত

(a) 64:27 (b) 4:3 (c) 27:64 (d) 3:4

(v) একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও 3 গুণ আয়তনের সাংখ্যমান সমান হলে, গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

(a) 1 একক (b) 2 একক (c) 3 একক (d) 4 একক

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করলে গোলকটির আয়তন দ্বিগুণ হবে।

(ii) দুটি অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 4:9 হলে, তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত হবে 2:3.

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি তলবিশিষ্ট ঘনবস্তুর নাম ___________।

(ii) একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমতলের সংখ্যা ___________।

(iii) একটি নিরেট অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2r একক হলে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ___________ πr^2 বর্গ একক।

16. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি নিরেট অর্ধগোলকের আয়তন এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান। অর্ধগোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল একটি নিরেট লম্ববৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান। চোঙটির উচ্চতা এবং ব্যাসের দৈর্ঘ্য উভয়েই 12 সেমি.। গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iii) একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল সমান। অর্ধগোলক এবং গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি।

(iv) একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = S এবং আয়তন = V হলে, $\frac{S^3}{V^2}$-এর মান কত তা লিখি। (π -এর মান না বসিয়ে)

(v) একটি গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 50% বৃদ্ধি করলে বক্রতলের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পায় তা লিখি।

13 ভেদ
VARIATION

আমি ও রাহুল ঠিক করেছি আমাদের গ্রামের কোথায় স্কুল, বাজার, হাসপাতাল, ডাক্তারখানা, নদী, সমবায় সমিতি, বড়ো পুকুর, চাষের জমি ইত্যাদি আছে নির্দেশ করে একটি রাস্তার মানচিত্র তৈরি করব ও আমাদের ক্লাবঘরের সামনের একটি বড়ো বোর্ডে আটকে রাখব।

তাই আজ গ্রীষ্মের দুপুরে আমরা দুজনে ছোটো বড়ো নানান মাপের আর্টপেপার, পেন, পেনসিল, কাঁচি, আঠা ইত্যাদি নিয়ে কাজ শুরু করেছি।

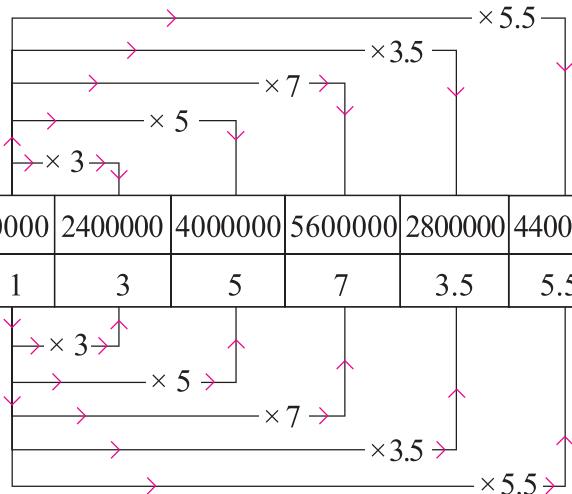
1 কিন্তু মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্যের মাপ কীভাবে নেব?

গ্রামের 8 কিমি. রাস্তার দৈর্ঘ্যের মানকে মানচিত্রে 1 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমতুল্য দেখালাম।

তাহলে, গ্রামের 24 কিমি. দৈর্ঘ্যের রাস্তা মানচিত্রে 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমতুল্য হবে।

2 আমি নীচের ছকে গ্রামের রাস্তার দৈর্ঘ্য = x সেমি. এবং মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্য = y সেমি. ধরে কী পাই লিখি।

গ্রামের রাস্তার দৈর্ঘ্য (x) [সেমি.]	800000	2400000	4000000	5600000	2800000	4400000
মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্য (y) [সেমি.]	1	3	5	7	3.5	5.5

দেখছি, মানচিত্রের স্কেল অনুসারে গ্রামের রাস্তার দৈর্ঘ্য প্রথমের যতগুণ হচ্ছে মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্যও প্রথমের ততগুণ হচ্ছে।

অর্থাৎ $\frac{800000}{1} = \frac{2400000}{3} = \frac{4000000}{5} = \cdots\cdots\cdots = \frac{x}{y}$

অর্থাৎ $\frac{x}{y}$ -এর মানের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না।

ধরি, $\frac{x}{y} = k$, $[k \neq 0]$ $\therefore x = ky$, [এখানে k অশূন্য ধ্রুবক]

3 যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে, $\frac{x}{y} = k$ (অশূন্য ধ্রুবক) হয় তখন ওই দুটি চলরাশি কী সম্পর্কে আছে বলা হবে?

যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে, $\frac{x}{y} = k$ (অশূন্য ধ্রুবক) হয় তখন বলা হয় যে x ও y **সরল ভেদে (Direct variation)** আছে এবং লেখা হয় $x \propto y$ এবং অশূন্য ধ্রুবকটিকে বলা হয় **ভেদধ্রুবক (Variation Constant)**।

যখন $\frac{x}{y} = k$ (অশূন্য ধ্রুবক), এবং $k > 0$, তখন একটির মান বৃদ্ধি পেলে অপরটির অনুরূপ মানও বৃদ্ধি পায় এবং একটির মান হ্রাস পেলে অপরটির অনুরূপ মানও হ্রাস পায়।

যদি $\frac{x}{y} = k$ (অশূন্য ধ্রুবক) এবং $k < 0$ হয় তখন x ও y চলরাশি দুটির পরিবর্তন কীরকম হবে নিজে লিখি।

রাস্তার দৈর্ঘ্য এবং মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x ও y চলরাশি দুটি সরল ভেদে আছে অর্থাৎ $x \propto y$.

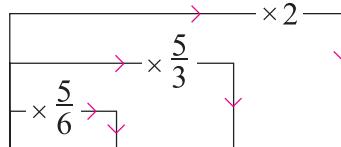
আমরা 60 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারে রাস্তার মানচিত্রটি আঁকার চেষ্টা করছি।

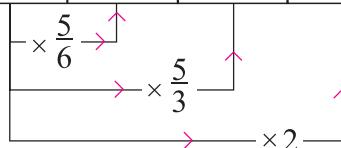
4 এই 60 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের চারধার রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে মোট কতটা দৈর্ঘ্যের রঙিন কাগজ লাগবে হিসাব করে লিখি।

রঙিন কাগজ লাগবে = 4×60 সেমি. দৈর্ঘ্যের = 240 সেমি. দৈর্ঘ্যের।

যদি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারে একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 50 সেমি. হতো, তবে ওই আর্টপেপারের চারধার রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে রঙিন কাগজ লাগবে ☐ সেমি. দৈর্ঘ্যের। [নিজে লিখি]

আমি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = x সেমি. ও ওই আর্টপেপারের পরিসীমা = y সেমি. ধরে, ছকটি পূরণ করি এবং x ও y কী সম্পর্কে আছে দেখি।

($\times\frac{5}{6}$, $\times\frac{5}{3}$, $\times 2$)

বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য (x) [সেমি.]	60	50	100	120
আর্টপেপারের পরিসীমা (y) [সেমি.]	240	200	400	নিজে লিখি

($\times\frac{5}{6}$, $\times\frac{5}{3}$, $\times 2$)

এক্ষেত্রেও দেখছি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের বাহুর দৈর্ঘ্য x এবং পরিসীমা y দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি এমন হয় যে,সর্বদা $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$ (অশূন্য ধ্রুবক)

অর্থাৎ x ও y সরলভেদে আছে।

$\therefore x\propto y$ এবং এখানে ভেদ ধ্রুবকের মান $\frac{1}{4}$

5 একইরকম পেনের সংখ্যা (x) এবং পেনের মোট দাম (y) সরলভেদে আছে কিনা বুঝে লিখি।[নিজে করি]

6 আমি এইরকম দুই চলরাশি সংক্রান্ত 4 টি উদাহরণ লিখি যেখানে চলরাশিগুলি পরস্পর সরলভেদে আছে। [নিজে করি]

দুটি চল A ও B সম্পর্কিত মানগুলি পেয়েছি:

A	90	30	12	15	156
B	60	20	8	10	104

প্রয়োগ : 1. A ও B-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি ও ভেদ ধ্রুবকের মান লিখি।

দেখছি A-এর মান বাড়লে বা কমলে B-এর মান বাড়ছে বা কমছে,

আবার, $\frac{A}{B}=\frac{90}{60}=\frac{30}{20}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}=\frac{156}{104}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore A=\frac{3}{2}B$

$\therefore A\propto B$ এবং এখানে ভেদ ধ্রুবকের মান $\frac{3}{2}$

যেহেতু ভেদধ্রুবকের মান ধনাত্মক তাই A-চলের মান বাড়লে বা কমলে B-চলের অনুরূপ মান বাড়বে বা কমবে।

দুটি চলরাশি P ও Q সম্পর্কিত মানগুলি পেয়েছি,

P	35	49	56	14
Q	15	21	24	6

7 P ও Q-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 2. দোলকের [Pendulum-এর] দোলনকাল উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত সরলভেদে থাকে। যদি 1 মিটার দৈর্ঘ্যের কোনো দোলকের 1 সেকেন্ডে একবার পূর্ণ দোলন হয়, তবে যে দোলকের 2.5 সেকেন্ডে একবার পূর্ণ দোলন হয়, তার দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে দেখি।

ধরি, t = একবার পূর্ণ দোলনের সময় এবং ℓ = দোলকের দৈর্ঘ্য।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $t \propto \sqrt{\ell}$

$\therefore t = k\sqrt{\ell}$ [k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

$\therefore t = 1$ সেকেন্ড হলে $\ell = 1$ মিটার

সুতরাং, $1 = k\sqrt{1}$ $\therefore k = 1$ $\therefore$ ভেদধ্রুবকের মান 1

সুতরাং, পেলাম $t = \sqrt{\ell}$

$\therefore t = 2.5$ সেকেন্ড হলে, $\sqrt{\ell} = 2.5$

$\ell = 6.25$

$\therefore$ যে দোলকের 2.5 সেকেন্ডে একবার পূর্ণদোলন হয় তার দৈর্ঘ্য 6.25 মিটার।

প্রয়োগ : 3. y, x -এর বর্গের সঙ্গে সরলভেদে আছে এবং $y = 9$ যখন $x = 9$; y-কে x দ্বারা প্রকাশ করি এবং $y = 4$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

y, x -এর বর্গের সঙ্গে সরলভেদে আছে,

সুতরাং, $y \propto x^2$ $\therefore y = kx^2$ [যেখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

আবার, $y = 9$ যখন $x = 9$

সুতরাং, $9 = k(9)^2$ $\therefore k = \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9}$

সুতরাং, পেলাম $y = \frac{1}{9}x^2$ ———— (I)

(I)-এ $y = 4$ বসিয়ে পাই, $4 = \frac{1}{9}x^2$

বা, $x^2 = 36$ $\therefore x = \pm 6$

$\therefore y = 4$ হলে $x = \pm 6$

প্রয়োগ : 4. y, x-এর বর্গমূলের সঙ্গে সরলভেদে আছে এবং $y=9$ যখন $x=4$; ভেদ ধ্রুবকের মান লিখি এবং y-কে x দ্বারা প্রকাশ করি। $y=8$ হলে, x-এর মান কত হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

আমি ও রাহুল যখন গ্রামের রাস্তার মানচিত্র তৈরি করতে ব্যস্ত, আমার দিদিমা একটি স্টিলের টিফিন বাক্সে অনেকগুলি নারকেলের নাড়ু আমাদের জন্যে পাঠিয়ে দিলেন।

(8) গুনে দেখছি টিফিন বাক্সে 24 টি নারকেলের নাড়ু আছে। দুজনে না ভেঙে সমান ভাগে ভাগ করে নেব। প্রত্যেকে কতগুলি পাব দেখি।

আমরা প্রত্যেকে $24 \div 2$ টি = 12 টি নাড়ু পাব।

কিন্তু শিবানীও আমাদের সঙ্গে এই কাজে যোগ দিল। তাই আমরা এখন 3 জনে 24 টি নাড়ু সমান ভাগে ভাগ করে নেব। এখন প্রত্যেকে পাব ☐ টি নাড়ু।

কিন্তু আরও 3 জন বন্ধুর ক্লাবঘরে আসার কথা ছিল। ওরা যদি আসে আমরা মোট 6 জন হব। তাই 6 জনে 24 টি নাড়ু সমান ভাগে ভাগ করে নিলে প্রত্যেকে পাব ☐ টি নাড়ু।

9 আমাদের দিদিমার পাঠানো 24 টি নারকেলের নাড়ু বিভিন্ন সংখ্যক বন্ধুদের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে খেলে প্রত্যেকে কতগুলি পাব নীচের ছকে লিখি।

বন্ধুদের সংখ্যা (x)	2	3	6	4
প্রত্যেকের পাওয়া নারকেলের নাড়ুর সংখ্যা (y)	12	8	4	☐

∴ দেখছি মোট নারকেল নাড়ুর সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকলে বন্ধুদের সংখ্যা বাড়লে বা কমলে প্রত্যেকের পাওয়া নারকেল নাড়ুর সংখ্যা যথাক্রমে কমবে বা বাড়বে। দেখছি $2\times12 = 3\times8 = 6\times4 = 4\times6 = x\times y$.

অর্থাৎ $x\times y$-এর মানের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না। ধরি, $x\times y = k$ [যেখানে k অশূন্য ধ্রুবক]।

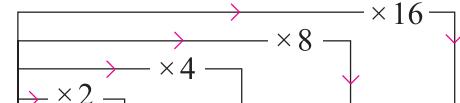
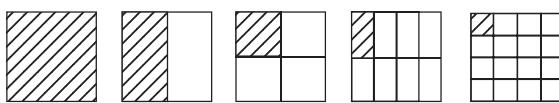
10 যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে , $xy = k$ (অশূন্য ধ্রুবক) হয়, তখন ওই দুটি চলরাশি কী সম্পর্কে আছে বলা হবে?

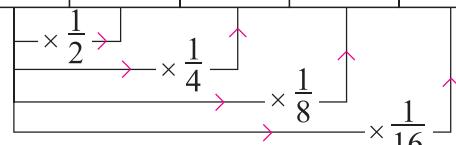
যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে সর্বদা , $xy= k$ (অশূন্য ধ্রুবক) হয়, তখন বলা হয় যে x ও y **ব্যস্ত ভেদে (Inverse variation)** আছে এবং লেখা হয় $x \propto \frac{1}{y}$ এবং অশূন্য ধ্রুবকটিকে বলা হয় **ভেদধ্রুবক (Variation Constant)**।

যখন $xy = k$ (অশূন্য ধ্রুবক), এবং $k > 0$, তখন একটির মান বৃদ্ধি পেলে অপরটির অনুরূপ মান হ্রাস পায় এবং একটির মান হ্রাস পেলে অপরটির অনুরূপ মান বৃদ্ধি পায়।

যদি $xy = k$ (অশূন্য ধ্রুবক), এবং $k < 0$, হয় তখন x ও y চলরাশি দুটির পরিবর্তন কীরকম হবে নিজে লিখি।

নাড়ুর সংখ্যা ও বন্ধুদের সংখ্যা যথাক্রমে x ও y চলরাশি দুটি **ব্যস্ত** ভেদে আছে, অর্থাৎ $x \propto \frac{1}{y}$

11 আমার বন্ধু শাবিনা 50 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকার অনেকগুলি আর্টপেপার ভাঁজ করে কতকগুলি সমান ভাগে ভাগ করল। বাকি বন্ধুরা ওই আর্টপেপারের বিভিন্ন অংশে আঁকবে এবং ক্লাবঘরের বোর্ডে আটকে রাখবে। আমি শাবিনার ভাঁজ করা আর্টপেপারগুলি দেখি এবং বিভিন্ন অংশের ক্ষেত্রফল নীচের ছকে লেখার চেষ্টা করি।

বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের অংশ (x)	1	2	4	8	16
প্রতিটি ভাঁজ করা অংশের ক্ষেত্রফল (y) [বর্গ সেমি.]	2500	1250	625	312.5	নিজে লিখি

দেখছি একই মাপের বর্গক্ষেত্রাকার কাগজের সমান অংশ সংখ্যা (x) বৃদ্ধির সঙ্গে প্রতিটি অংশের ক্ষেত্রফল (y) হ্রাস পাচ্ছে।

$\therefore \quad 1\times2500 = 2\times1250$

$= 4\times625 = 8\times312.5 = 16\times156.25 = x\times y$

অর্থাৎ $x\times y$ এর মানের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না।

$\therefore x \propto \frac{1}{y}$ এবং এখানে ভেদ ধ্রুবকের মান 2500.

প্রয়োগ : 5. আমি 36 টি বোতাম আয়তাকারে সাজাই এবং প্রতিক্ষেত্রে দৈর্ঘ্যে ও প্রস্থে থাকা বোতামের সংখ্যা ব্যস্ত ভেদে আছে কিনা বুঝে লিখি। [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 6. দুই চলরাশি সংক্রান্ত 2 টি উদাহরণ লিখি যেখানে চলরাশিগুলি পরস্পর ব্যস্তভেদে আছে। [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 7. x ও y দুটি চলের সম্পর্কিত মানগুলি পেয়েছি :

x	5	25	10	4	8
y	10	2	5	12.5	6.25

x ও y-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি ও ভেদ ধ্রুবকের মান নির্ণয় করি।

দেখছি, $xy = 5\times10 = 25\times2 = 10\times5 = 4\times12.5 = 8\times6.25$

$\therefore xy =$ ধ্রুবক

$\therefore x \propto \frac{1}{y}$ এবং ভেদ ধ্রুবকের মান 50.

প্রয়োগ : 8. দুটি চল x ও y সম্পর্কিত মানগুলি হলো :

x	3	2	6
y	18	27	9

x ও y-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 9. আমাদের কারখানায় 63 দিনে নির্দিষ্ট পরিমাণ লোহার যন্ত্রপাতি তৈরির জন্য 42টি মেশিন দরকার। কিন্তু ওই একই পরিমাণ লোহার যন্ত্রপাতি 54 দিনে তৈরির জন্য কতগুলি মেশিন দরকার ভেদ সম্পর্ক গঠন করে হিসাব করি।

ধরি, দিন সংখ্যা = D এবং মেশিনের সংখ্যা = M

যেহেতু কাজের পরিমাণ নিদিষ্ট রেখে, মেশিনের সংখ্যা বৃদ্ধি (হ্রাস) পেলে দিন সংখ্যা একই অনুপাতে হ্রাস (বৃদ্ধি) পায়। সুতরাং D ও M ব্যস্তভেদে আছে।

সুতরাং, $D \propto \frac{1}{M}$ $\therefore D = \frac{k}{M}$ [k = অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

D = 63 হলে, M = 42

সুতরাং, $63 = \frac{k}{42}$

বা, $k = 63\times42$

$\therefore D = \frac{63\times42}{M}$ ——— (I)

$\therefore$ (I) নং সমীকরণে D = 54 বসিয়ে পাই

$$54 = \frac{63\times42}{M}$$

বা, $M = \frac{63\times42}{54}$ $\therefore M = 49$

$\therefore$ একই পরিমাণ লোহার যন্ত্রপাতি 54 দিনে তৈরি করতে 49 টি মেশিন দরকার।

প্রয়োগ : 10. সমীরবাবু বাড়ি থেকে 60 কিমি./ঘণ্টা বেগে গাড়ি চালিয়ে 2 ঘণ্টায় স্টেশনে পৌঁছান। তিনি যদি 80 কিমি./ঘণ্টা বেগে গাড়ি চালাতেন, তবে বাড়ি থেকে কত সময়ে স্টেশনে পৌঁছাতেন। ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি। [নিজে করি]

[**উত্তর সংকেত :** নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করতে গতিবেগ ও প্রয়োজনীয় সময় ব্যস্ত ভেদে আছে।]

প্রয়োগ : 11. যদি $x \propto y$ হয়, তবে কি $y \propto x$ হবে? যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

প্রমাণ : $x \propto y$ $\quad \therefore x = ky$ [k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

সুতরাং, $y = \frac{1}{k}x = mx$, যেখানে $m = \frac{1}{k}$ একটি অশূন্য ভেদ ধ্রুবক। যেহেতু k অশূন্য ধ্রুবক। $\quad \therefore y \propto x$

$\therefore$ পেলাম $x \propto y$ হলে, $y \propto x$ হবে।

প্রয়োগ : 12. যদি $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $x \propto z$ হবে।

প্রমাণ : $x \propto y$ $\quad \therefore x = ky$ এবং $y \propto z$ সুতরাং, $y = k'z$

এখানে k ও k′ দুটি অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

আবার, $x = ky = k(k'z) = kk'z = mz$ [যেখানে, $m = kk'$ = অশূন্য ধ্রুবক] $\quad \therefore x \propto z$

প্রয়োগ : 13. $x \propto y$ হলে, প্রমাণ করি যে $x+y \propto x-y$ হবে।

প্রমাণ : $x \propto y$ সুতরাং, $x = ky$, যেখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

$$\therefore \frac{x+y}{x-y} = \frac{ky+y}{ky-y} = \frac{y(k+1)}{y(k-1)} = \frac{k+1}{k-1} = n$$ [যেখানে, n = অশূন্য ধ্রুবক]

$\therefore x+y = n(x-y) \quad \therefore x+y \propto x-y$

প্রয়োগ : 14. $x \propto y$ হলে, প্রমাণ করি যে $x^n \propto y^n$ হবে।

প্রমাণ : $x \propto y$ সুতরাং, $x = ky$, যেখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

$x^n = k^n y^n = k_1 y^n$ [$k_1 = k^n$ = অশূন্য ধ্রুবক] $\quad \therefore x^n \propto y^n$

প্রয়োগ : 15. $x+y \propto x-y$ হলে, প্রমাণ করি যে $x \propto y$ হবে।

প্রমাণ : $x+y \propto x-y$

$\therefore x+y = k(x-y)$ [যেখানে, k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{k}{1}$$

বা, $\frac{2x}{2y} = \frac{k+1}{k-1}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে]

বা, $\frac{x}{y} = k_1$ [যেখানে, $k_1 = \frac{k+1}{k-1}$ = অশূন্য ধ্রুবক]

বা, $x = k_1 y \quad \therefore x \propto y$

প্রয়োগ : 16. $A^2+B^2 \propto A^2-B^2$ হলে, প্রমাণ করি যে, $A \propto B$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 17. $x \propto y$ এবং $u \propto z$ হলে, প্রমাণ করি যে $xu \propto yz$ এবং $\frac{x}{u} \propto \frac{y}{z}$

প্রমাণ : $x \propto y$ সুতরাং, $x = k_1 y$

$u \propto z$ সুতরাং, $u = k_2 z$ [যেখানে, k_1 এবং k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

$\therefore xu = k_1 y \cdot k_2 z = k_1 k_2 yz = myz$ [যেখানে $m = k_1 k_2$ = অশূন্য ধ্রুবক]

$\therefore xu \propto yz$

$$\frac{x}{u} = \frac{k_1 y}{k_2 z} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{y}{z} = n\frac{y}{z}$$ [যেখানে $n = \frac{k_1}{k_2}$ = অশূন্য ধ্রুবক]

$$\therefore \frac{x}{u} \propto \frac{y}{z}$$

আমাদের বন্ধু অর্ক কিছু ত্রিভুজাকারক্ষেত্র কাগজ কেটে তৈরি করল।

এই ত্রিভুজাকারক্ষেত্রগুলির ভূমি ও উচ্চতার দৈর্ঘ্য মাপি ও তাদের ক্ষেত্রফল হিসাব করে নীচের ছকে লিখি।

ত্রিভুজের ভূমি (x) [সেমি.]	8	14	13	22
ত্রিভুজের উচ্চতা (y) [সেমি.]	10	7	15	12
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (A) [বর্গ সেমি.]	$\frac{1}{2}\times8\times10$	$\frac{1}{2}\times14\times7$	$\frac{1}{2}\times13\times15$	$\frac{1}{2}\times22\times12$

পেলাম, $\frac{A}{x\times y}=\frac{\frac{1}{2}\times8\times10}{8\times10}=\frac{\frac{1}{2}\times14\times7}{14\times7}=\frac{\frac{1}{2}\times13\times15}{13\times15}=\frac{\frac{1}{2}\times22\times12}{22\times12}=\frac{1}{2}$

$\therefore A\propto x\times y$

(12) এখানে দেখছি, একটি চলরাশি A দুটি চলরাশি x ও y-এর গুণফলের সঙ্গে সরলভেদে আছে। এই রকম ভেদকে কী বলা হবে?

যদি একটি চলরাশি অন্য একাধিক চলরাশির গুণফলের সঙ্গে সরলভেদে থাকে, তবে প্রথম চলরাশি অপর চলরাশিগুলির সঙ্গে **যৌগিক ভেদে (Joint Variation)** আছে বলা হয়।

(13) **যৌগিক ভেদের উপপাদ্য** (কেবল বিবৃতি)

x, y, z তিনটি চল এরূপ যে $x\propto y$ যখন z ধ্রুবক এবং $x\propto z$ যখন y ধ্রুবক, তাহলে $x\propto yz$ হবে, যখন y এবং z উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

বুঝেছি, এখানে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (A), ত্রিভুজের ভূমি (x) ও উচ্চতা (y)-এর সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে।

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে বয়েল ও চার্লসের সূত্রের সমন্বয় থেকে পেয়েছি,

$PV=RT$, R একটি অশূন্য ধ্রুবক।

$\therefore V=R\frac{T}{P}$

(14) এখানে V কি T ও $\frac{1}{P}$-এর সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে?

$V=R\cdot\frac{T}{P}$ [R ধ্রুবক]-এই সম্পর্ক থেকে বলতে পারি V, T এবং $\frac{1}{P}$-এর সঙ্গে **যৌগিক ভেদে** আছে।

কোনো একটি কাজের ক্ষেত্রে মোট উপার্জন, কাজে নিযুক্ত লোকসংখ্যা ও তাদের কাজের দিনের সংখ্যার সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে কিনা নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 18. যদি 5 জন কৃষক 12 দিনে 10 বিঘা জমির পাট কাটতে পারেন, তবে কতজন কৃষক 18 বিঘা জমির পাট 9 দিনে কাটতে পারবেন তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

ধরি, কৃষকের সংখ্যা = A

দিনের সংখ্যা = B

এবং জমির পরিমাণ = C

যেহেতু কৃষকের সংখ্যা জমির পরিমাণের সঙ্গে সরলভেদে থাকে যখন দিনের সংখ্যা স্থির থাকে।

$\therefore A\propto C$, যখন B ধ্রুবক

আবার, যেহেতু জমির পরিমাণ স্থির থাকলে কৃষকের সংখ্যা দিনের সংখ্যার সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে থাকে।

$\therefore A\propto\frac{1}{B}$, যখন C ধ্রুবক।

$\therefore$ যৌগিক ভেদের উপপাদ্য অনুসারে, $A \propto \frac{C}{B}$, যখন B ও C উভয়েই পরিবর্তনশীল

অর্থাৎ, $A = K\frac{C}{B}$ [যেখানে, K অশূন্য ভেদ ধ্রুবক] ———— (I)

প্রদত্ত, A = 5, B = 12 এবং C = 10

(I) নং থেকে পাই, $5 = K\frac{10}{12}$

বা, $K = \frac{5\times12}{10}$ $\therefore K = 6$

এবার (I) নং-এ K-এর মান বসিয়ে পাই, $A = 6\frac{C}{B}$ ———— (II)

B=9 ও C=18 হলে, (II) নং থেকে পাই, $A = \frac{6\times18}{9} = 12$

$\therefore$ নির্ণেয় কৃষকের সংখ্যা 12 জন।

প্রয়োগ : 19. যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 বিঘা জমি চাষ করতে পারেন, তবে 30 বিঘা জমি চাষ করতে 25 জন লোকের কতদিন সময় লাগবে ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 20. x, y-এর সঙ্গে সরলভেদে (যখন z ধ্রুবক) এবং z-এর সঙ্গে ব্যস্তভেদে (যখন y ধ্রুবক) এমনভাবে আছে যে y=4, z=5 হলে x=3 হয়। যখন y=16, z=25 তখন x-এর মান নির্ণয় করি।

$x \propto y$, যখন z ধ্রুবক

$x \propto \frac{1}{z}$, যখন y ধ্রুবক

$\therefore x \propto \frac{y}{z}$,যখন y এবং z উভয়েই পরিবর্তনশীল।

সুতরাং, $x = k\cdot\frac{y}{z}$ [যেখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক] ———— (I)

প্রদত্ত, x=3, y=4 এবং z=5

সুতরাং, (I) নং থেকে পাই, $3 = k\frac{4}{5}$ $\therefore k = \frac{15}{4}$

এবার (I) নং-এ k-এর মান বসিয়ে পাই, $x = \frac{15y}{4z}$ ———— (II)

যখন y=16, z=25 তখন (II) নং থেকে পাবো,

$x = \frac{15\times16}{4\times25}$ $\therefore x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

প্রয়োগ : 21. যদি $\frac{x}{y} \propto x+y$ এবং $\frac{y}{x} \propto x-y$ হয়, তবে দেখাই যে $x^2-y^2 =$ ধ্রুবক।

$\frac{x}{y} \propto x+y$ $\therefore \frac{x}{y} = k_1(x+y)$ [যেখানে k_1 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

আবার, $\frac{y}{x} \propto x-y$ $\therefore \frac{y}{x} = k_2(x-y)$ [যেখানে k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

সুতরাং, $\frac{x}{y}\times\frac{y}{x} = k_1(x+y)\times k_2(x-y)$

বা, $1 = k_1k_2(x^2-y^2)$

বা, $(x^2-y^2) = \frac{1}{k_1k_2}$

$\therefore x^2-y^2 =$ ধ্রুবক ($\because k_1$ এবং k_2 ধ্রুবক, $\therefore \frac{1}{k_1k_2}$ ধ্রুবক) [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 22. $x^2 \propto yz$, $y^2 \propto zx$ এবং $z^2 \propto xy$ হলে, দেখাই যে ভেদ ধ্রুবক তিনটির গুণফল = 1

$x^2 \propto yz \quad \therefore x^2 = k_1yz$

আবার, $y^2 \propto zx \quad \therefore y^2 = k_2zx$

আবার, $z^2 \propto xy \quad \therefore z^2 = k_3xy$

যেখানে k_1, k_2 ও k_3 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

সুতরাং, $x^2 \times y^2 \times z^2 = k_1yz \times k_2zx \times k_3xy$

বা, $x^2y^2z^2 = k_1k_2k_3 \cdot x^2y^2z^2$

$\therefore k_1k_2k_3 = 1$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 23. $a \propto b$ এবং $b \propto c$ হলে, প্রমাণ করি যে $a^3+b^3+c^3 \propto 3abc$

$a \propto b \quad \therefore a = k_1b$ [যেখানে k_1 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

আবার, $b \propto c \quad \therefore b = k_2c$ [যেখানে k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

সুতরাং, $a = k_1b = k_1k_2c$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc} = \frac{(k_1k_2c)^3+(k_2c)^3+c^3}{3(k_1k_2c)\times(k_2c)\times c} = \frac{c^3(k_1^3k_2^3+k_2^3+1)}{3k_1k_2^2c^3} = \frac{k_1^3k_2^3+k_2^3+1}{3k_1k_2^2} = \text{অশূন্য ধ্রুবক}$$

[$\because k_1$ এবং k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

$\therefore a^3+b^3+c^3 \propto 3abc$

প্রয়োগ : 24. $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হলে, প্রমাণ করি যে $x^2+y^2+z^2 \propto xy+yz+zx$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 25. কোনো গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের ঘনের সঙ্গে সরলভেদে আছে। যদি 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি নিরেট গোলককে গলিয়ে একটি নতুন নিরেট গোলক তৈরি করা হয় এবং গলানোর ফলে যদি আয়তনের কোনো পরিবর্তন না হয়, তবে নতুন গোলকটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

মনে করি, r সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোনো গোলকের আয়তন v ঘন সেমি.

সুতরাং, $v \propto r^3$

$\therefore v = kr^3$ [এখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রবক]

$\therefore$ 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন $= k\times3^3$ ঘন সেমি.= 27k ঘন সেমি.

4 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন $= k\times4^3$ ঘন সেমি.= 64k ঘন সেমি.

5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন $= k\times5^3$ ঘন সেমি.= 125k ঘন সেমি.

প্রশ্নানুসারে, নতুন গোলকের আয়তন $(27k+64k+125k)$ঘন সেমি.=216k ঘন সেমি.

যদি নতুন গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য R সেমি. হয়, তবে $kR^3 = 216k$

বা, $R^3 = 216$

বা, $R^3 = 6^3 \quad \therefore R = 6$

$\therefore$ নতুন গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.

$\therefore$ নতুন গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 6×2 সেমি. = 12 সেমি.

প্রয়োগ : 26. একটি হস্টেলের ব্যয় আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক ওই হস্টেলবাসী লোকসংখ্যার সঙ্গে সরলভেদে আছে। লোকসংখ্যা 120 হলে ব্যয় 2000 টাকা হয় এবং লোকসংখ্যা 100 হলে ব্যয় 1700 টাকা হয়। ব্যয় 1880 টাকা হলে লোকসংখ্যা কত হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, ব্যয় ও লোকসংখ্যা যথাক্রমে x টাকা এবং y জন।

ধরি, $x=k_1+B$, যেখানে হস্টেলের ব্যয়ের ধ্রুবক অংশ k_1 এবং অপর অংশ $B \propto y$

$\therefore B=k_2y$, যেখানে k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

শর্তানুসারে, $x = k_1+k_2y$

$y=120$ হলে $x=2000$ (প্রদত্ত) $\quad \therefore 2000 = k_1+120k_2$ ——— (I)

আবার, $y=100$ হলে $x=1700$ (প্রদত্ত) $\quad \therefore 1700 = k_1+100k_2$ ——— (II)

(বিয়োগ করে পাই) $\quad 300 = 20k_2$

বা, $k_2 = \frac{300}{20} \quad \therefore k_2 = 15$

সুতরাং, (II) থেকে পাই, $1700 = k_1+100\times15$

বা, $k_1 = 1700-1500$

$\therefore k_1 = 200$

সুতরাং, $x = 200+15y$ ——— (III)

$\therefore$ যখন $x = 1880$ তখন (III) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$1880 = 200+15y$

বা, $15y = 1880-200$

বা, $15y = 1680$

বা, $y = \frac{1680}{15} \quad \therefore y = 112$

$\therefore$ হস্টেলের ব্যয় 1880 টাকা হলে লোকসংখ্যা হবে 112

প্রয়োগ : 27. গোলকের আয়তন গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের ত্রিঘাতের সঙ্গে সরলভেদে আছে। একটি নিরেট সিসার গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি.। এই গোলকটি গলিয়ে 3.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কতগুলি গোলক তৈরি করা যাবে তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি। (ধরি গলানোর আগে ও পরে আয়তন একই থাকে) [নিজে করি]

কষে দেখি 13

1. দুটি A ও B-এর সম্পর্কিত মানগুলি

A	25	30	45	250
B	10	12	18	100

A ও B-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে তা নির্ণয় করি ও ভেদ ধ্রুবকের মান লিখি।

2. x ও y দুটি চল এবং তাদের সম্পর্কিত মানগুলি

x	18	8	12	6
y	3	$\frac{27}{4}$	$\frac{9}{2}$	9

x ও y-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক আছে কিনা বুঝে লিখি।

3. (i) বিপিনকাকুর ট্যাক্সি 25 মিনিটে 14 কিমি. পথ অতিক্রম করে। একই গতিবেগে ট্যাক্সি চালিয়ে 5 ঘণ্টায় তিনি কতটা পথ যাবেন তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি।

(ii) আমাদের স্কুলের প্রথম শ্রেণির 24 জন শিশুর মধ্যে একবাক্স সন্দেশ সমান ভাগে ভাগ করে দিলাম এবং প্রত্যেকে 5 টি করে গোটা সন্দেশ পেল। যদি শিশুর সংখ্যা 4 জন কম হত, তবে প্রত্যেকে কতগুলি গোটা সন্দেশ পেত তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি।

(iii) একটি পুকুর কাটতে 50 জন গ্রামবাসীর 18 দিন সময় লেগেছে। পুকুরটি 15 দিনে কাটতে হলে অতিরিক্ত কতজন লোককে কাজ করতে হবে তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি।

4. (i) y, x-এর বর্গমূলের সঙ্গে সরলভেদে আছে এবং $y=9$ যখন $x=9$; x-এর মান নির্ণয় করি যখন $y=6$.

(ii) x, y-এর সঙ্গে সরলভেদে এবং z-এর সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে আছে। $y=4$, $z=5$ হলে $x=3$ হয়। আবার $y=16$, $z=30$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

(iii) x, y-এর সঙ্গে সরলভেদে এবং z-এর সঙ্গে ব্যস্তভেদে আছে। $y=5$ ও $z=9$ হলে $x=\frac{1}{6}$ হয়। x, y ও z-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি এবং $y=6$ ও $z=\frac{1}{5}$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

5. (i) $x \propto y$ হলে, দেখাই যে, $x+y \propto x-y$

(ii) $A \propto \frac{1}{C}$, $C \propto \frac{1}{B}$ হলে, দেখাই যে, $A \propto B$

(iii) যদি $a \propto b$, $b \propto \frac{1}{c}$ এবং $c \propto d$ হয়, তবে a ও d-এর মধ্যে ভেদ সম্পর্ক লিখি।

(iv) $x \propto y$, $y \propto z$ এবং $z \propto x$ হলে, ভেদ ধ্রুবক তিনটির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

6. $x+y \propto x-y$ হলে, দেখাই যে,

(i) $x^2+y^2 \propto xy$

(ii) $x^3+y^3 \propto x^3-y^3$

(iii) $ax+by \propto px+qy$ [যেখানে a, b, p, q অশূন্য ধ্রুবক]

7. (i) $a^2+b^2 \propto ab$ হলে, প্রমাণ করি যে, $a+b \propto a-b$

(ii) $x^3+y^3 \propto x^3-y^3$ হলে, প্রমাণ করি যে, $x+y \propto x-y$

8. 15 জন কৃষক 5 দিনে 18 বিঘা জমি চাষ করতে পারেন। ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে 10 জন কৃষক 12 বিঘা জমি কতদিনে চাষ করতে পারবেন তা নির্ণয় করি।

9. গোলকের আয়তন গোলকের ব্যাসার্ধের ত্রিঘাতের সঙ্গে সরলভেদে আছে। $1\frac{1}{2}$,2 এবং $2\frac{1}{2}$ মিটার দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট তিনটি নিরেট গোলককে গলিয়ে একটি নিরেট গোলক বানানো হলো। নতুন গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি। (ধরি, গলানোর আগে ও পরে আয়তন একই থাকে)

10. y দুটি চলের সমষ্টির সমান, যার একটি x চলের সঙ্গে সরলভেদে এবং অন্যটি x চলের সঙ্গে ব্যস্তভেদে আছে। $x=1$ হলে $y=-1$ এবং $x=3$ হলে $y=5$; x ও y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

11. $a \propto b$, $b \propto c$ হলে দেখাই যে, $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \propto abc(a^3+b^3+c^3)$

12. x ডেসিমিটার গভীর একটি কূপ খনন করার জন্য মোট ব্যয়ের এক অংশ x-এর সঙ্গে সরলভেদে এবং অপর অংশ x^2-এর সঙ্গে সরলভেদে পরিবর্তিত হয়। যদি 100 ডেসিমিটার এবং 200 ডেসিমিটার কূপ খনন করার জন্য যথাক্রমে 5000 টাকা এবং 12000 টাকা ব্যয় হয়, তবে 250 ডেসিমিটার গভীর কূপ খননের জন্য কত ব্যয় হবে হিসাব করে লিখি।

13. চোঙের আয়তন, ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বর্গের এবং উচ্চতার সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে। দুটি চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2:3 এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত 5:4 হলে, ওদের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করি।

14. পাঁচলা গ্রামের কৃষি সমবায় সমিতি একটি ট্রাক্টর ক্রয় করেছে। আগে সমিতির 2400 বিঘা জমি 25 টি লাঙল দিয়ে চাষ করতে 36 দিন সময় লাগত। এখন অর্ধেক জমি কেবল ট্রাক্টরটি দিয়ে 30 দিনে চাষ করা যায়। একটি ট্রাক্টর কয়টি লাঙলের সমান চাষ করে তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

15. গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের ত্রিঘাতের সঙ্গে সরলভেদে পরিবর্তিত হয় এবং গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বর্গের সঙ্গে সরলভেদে পরিবর্তিত হয়।
প্রমাণ করি যে, গোলকের আয়তনের বর্গ তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের ঘনের সঙ্গে সরলভেদে থাকবে।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) $x \propto \frac{1}{y}$ হলে, (a) $x = \frac{1}{y}$ (b) $y = \frac{1}{x}$ (c) $xy = 1$ (d) $xy =$ অশূন্য ধ্রুবক

(ii) যদি $x \propto y$ হয়, তখন (a) $x^2 \propto y^3$ (b) $x^3 \propto y^2$ (c) $x \propto y^3$ (d) $x^2 \propto y^2$

(iii) $x \propto y$ এবং $y=8$ যখন $x=2$; $y=16$ হলে, x-এর মান (a) 2 (b) 4 (b) 6 (d) 8

(iv) $x \propto y^2$ এবং $y=4$ যখন $x=8$; $x=32$ হলে, y-এর ধনাত্মক মান (a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

(v) যদি $y-z \propto \frac{1}{x}$, $z-x \propto \frac{1}{y}$ এবং $x-y \propto \frac{1}{z}$ হয়, তাহলে তিনটি ভেদ ধ্রুবকের সমষ্টি
(a) 0 (b) 1 (c) –1 (d) 2

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $y \propto \frac{1}{x}$ হলে, $\frac{y}{x} =$ অশূন্য ধ্রুবক

(ii) $x \propto z$ এবং $y \propto z$ হলে, $xy \propto z$

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $x \propto \frac{1}{y}$ এবং $y \propto \frac{1}{z}$ হলে, $x \propto$ ______

(ii) $x \propto y$ হলে, $x^n \propto$ ______

(iii) $x \propto y$ এবং $x \propto z$ হলে, $(y+z) \propto$ ______

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) $x \propto y^2$ এবং $y=2a$ যখন $x=a$; x ও y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

(ii) $x \propto y$, $y \propto z$ এবং $z \propto x$ হলে, অশূন্য ভেদ ধ্রুবক তিনটির গুণফল নির্ণয় করি।

(iii) $x \propto \frac{1}{y}$ এবং $y \propto \frac{1}{z}$ হলে, x, z-এর সঙ্গে সরলভেদে না ব্যস্তভেদে আছে তা নির্ণয় করি।

(iv) $x \propto yz$ এবং $y \propto zx$ হলে, দেখাই যে, z একটি অশূন্য ধ্রুবক।

(v) যদি $b \propto a^3$ হয় এবং a-এর বৃদ্ধি হয় 2:3 অনুপাতে, তাহলে b-এর বৃদ্ধি কী অনুপাতে হয় তা নির্ণয় করি।

14 অংশীদারি কারবার

PARTNERSHIP BUSINESS

আমার দিদি আমাদের বাড়ির একতলার একটি ঘরে খাতা তৈরি করে বিক্রি করার ব্যাবসা করতে চায়। দিদির আরও দুই বন্ধু তীর্থ ও তনবির দিদির সঙ্গে এই ব্যবসায় যোগ দিতে চায়। তাই আমার দিদি, তীর্থ ও তনবির যথাক্রমে 10000 টাকা, 12000 টাকা ও 11000 টাকা দিয়ে এই খাতা বিক্রির ব্যবসা শুরু করল।

(1) এইভাবে একসঙ্গে একাধিক জন টাকা দিয়ে ব্যাবসা করাকে কী বলা হয়?

দুই বা ততোধিক ব্যক্তি একত্রে মিলিত হয়ে যেসব সংগঠন গড়ে তুলে ব্যাবসা-বাণিজ্য করেন 'অংশীদারি কারবার' (Partnership business) তাদের মধ্যে অন্যতম। অংশীদারি কারবারে অংশীদারদের প্রত্যেকের দেয় অর্থই হচ্ছে অংশীদারগণের নিজস্ব মূলধন (Capital)।

একবছর শেষে দিদিদের ব্যবসায় 9900 টাকা লাভ হলো। কিন্তু এই লভ্যাংশ কীভাবে তারা ভাগ করে নেবে?

(2) অংশীদারি কারবার সাধারণত কয়েকটি নীতির উপর গড়ে ওঠে এবং অংশীদারগণ নিজেদের মধ্যে আলোচনার ভিত্তিতে সেগুলি নির্ধারণ করেন। সেগুলি হলো —

(i) **মূলধন (Capital) :** মূলধনের মোট পরিমাণ অংশীদারগণ সমানভাবে ভাগ করে সংগ্রহ করেন অথবা সর্বসম্মত আনুপাতিক হারে মূলধন সংগ্রহ করেন।

(ii) **লভ্যাংশ বন্টন (Distribution of profit) :** অংশীদারদের সর্বসম্মত সিদ্ধান্তের ভিত্তিতে লাভ

(a) সমান ভাগে ভাগ করে নিতে পারেন।

(b) মূলধনের পরিমাণের অনুপাতে ভাগ করে নিতে পারেন।

(c) সর্বসম্মত অন্য কোনো চুক্তি অনুযায়ী ভাগ করে নিতে পারেন।

যদি অংশীদারি চুক্তিতে লাভ বন্টনের কোনো সুনির্দিষ্ট নীতি বলা না থাকে, তবে ধরে নিতে হবে যে, লাভ অংশীদারদের মূলধনের অনুপাতে বণ্টিত হবে।

(iii) **ব্যাবসা পরিচালনার সাম্মানিক ভাতা :** ব্যাবসা পরিচালনার ক্ষেত্রে অংশীদারদের প্রত্যেকে বা কেউ কেউ যদি সময় ও শ্রম দিয়ে থাকেন তবে তার জন্য তাদের কী হারে সাম্মানিক ভাতা দেওয়া হবে তা চুক্তির সময়েই নির্ধারিত থাকে। এই ভাতা প্রদানের পর লভ্যাংশ বণ্টন করা হয়।

প্রয়োগ :1. আমার দিদি ও তার দুই বন্ধু মিলে যে অংশীদারি কারবার শুরু করেছে এবং বছরের শেষে লাভের টাকা কে কত পাবে তার জন্য প্রথমে অংশীদারদের মূলধনের অনুপাত নির্ণয় করতে হবে।

∴ লভ্যাংশ বণ্টনের অনুপাত হবে,

দিদির টাকা : তীর্থর টাকা : তনবিরের টাকা = 10000 : 11000 : 12000 = 10 : 11 : 12

∴ লাভের 9900 টাকার মধ্যে দিদি পাবে = $\frac{10}{10+11+12} \times 9900$ টাকা = ☐ টাকা

লাভের 9900 টাকার মধ্যে তীর্থ পাবে = $\frac{11}{33} \times 9900 = 3300$ টাকা

লাভের 9900 টাকার মধ্যে তনবীর পাবে = $\frac{12}{33} \times 9900$ টাকা= 3600 টাকা

প্রয়োগ : 2. সুলেখা, জয়নাল ও শিবু যথাক্রমে 5000 টাকা, 4500 টাকা ও 7000 টাকা দিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করল। যদি বৎসরান্তে 11550 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তবে লাভের টাকা কে কত পাবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 3. আমাদের গ্রামের মিতাদিদি, সাহানাবিবি ও অমলকাকু যথাক্রমে 15000 টাকা, 10000 টাকা এবং 17500 টাকা মূলধন নিয়ে 'জ্যাম-জেলির' ব্যাবসা শুরু করেন। কিন্তু বছরের শেষে 4250 টাকা লোকসান হলো। কাকে কত টাকা লোকসানের পরিমাণ দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

অংশীদারি কারবারে মিতাদিদি, সাহানাবিবি ও অমলকাকুর মূলধনের অনুপাত = 15000 : 10000 : 17500
= 6 : 4 : 7

প্রত্যেক অংশীদার তাদের মূলধনের অনুপাতে লোকসানের অংশ দেবেন।

∴ 4250 টাকা লোকসানের মধ্যে মিতাদিদি দেবেন = $\left(\frac{6}{6+4+7} \times 4250\right)$ টাকা = □ টাকা

4250 টাকা লোকসানের মধ্যে সাহানাবিবি দেবেন = $\left(\frac{4}{17} \times 4250\right)$ টাকা = □ টাকা

4250 টাকা লোকসানের মধ্যে অমলকাকু দেবেন = □ টাকা **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

প্রয়োগ : 4. মারিয়া ও সায়ন যথাক্রমে 25000 টাকা ও 35000 টাকা মূলধন নিয়ে অংশীদারি কারবার নিম্নলিখিত শর্তে শুরু করে।

(i) মোট লাভের $\frac{1}{3}$ অংশ প্রথমে সমান ভাগে ভাগ করে নেবে।

(ii) পরে বাকি লাভ মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবে।

বছরের শেষে মোট 36000 টাকা লাভ হলে, কে কত টাকা লভ্যাংশ পাবে নির্ণয় করি।

(i) মোট লাভের $\frac{1}{3}$ অংশ প্রথমে সমান ভাগে ভাগ করে নেবে।

অর্থাৎ $(36000 \times \frac{1}{3})$ টাকা = □ টাকা মরিয়া ও সায়ন দুজনে সমান দু-ভাগে ভাগ করে নেবে।

(ii) অবশিষ্ট (36000 – 12000) টাকা = 24000 টাকা তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবে।

মরিয়া ও সায়নের মূলধনের অনুপাত = 25000 : 35000 = 5 : 7

∴ লাভের 24000 টাকার মধ্যে মারিয়া পাবে = $(\frac{5}{5+7} \times 24000)$ টাকা = □ টাকা

লাভের 24000 টাকার মধ্যে সায়ন পাবে = $(\frac{7}{5+7} \times 24000)$ টাকা = □ টাকা

∴ মারিয়া মোট পাবে = (12000 ÷ 2 + 10000) টাকা = □ টাকা

সায়ন মোট পাবে = (12000 ÷ 2 + 14000) টাকা = □ টাকা

∴ চুক্তি অনুযায়ী 36000 টাকা লাভের মারিয়া পাবে 16000 টাকা এবং সায়ন পাবে 20000 টাকা।

প্রয়োগ : 5. তিনজন অবসরপ্রাপ্ত ব্যক্তি 19500 টাকা, 27300 টাকা ও 15600 টাকা মূলধন নিয়ে একটি লেদ কারখানা স্থাপন করার এক বছর পর দেখলেন 43200 টাকা লাভ হয়েছে। ওই লাভের $\frac{2}{3}$ অংশ তারা সমানভাগে এবং বাকি অংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নিলে কে কত টাকা পাবেন নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 6. অভ্র, তনবির, অমৃতা ও তথাগত চার বন্ধু মিলে যথাক্রমে 15000 টাকা, 21000 টাকা, 30000 টাকা ও 45000 টাকা মূলধন নিয়োগ করে নিম্নলিখিত শর্তে একটি অংশীদারি কারবার শুরু করেন।

(i) অভ্র ও তনবির প্রত্যেকে ছয়মাস করে ব্যাবসা পরিচালনা করবেন এবং তার জন্য মোট লাভের 0.25 অংশ দুজনে সমান ভাগে ভাগ করে পাবেন।

(ii) বাকি লাভ চারজনে মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবেন।

বছরের শেষে 27232 টাকা লাভ হলে তা থেকে কে কত টাকা পাবেন হিসাব করে লিখি।

(i) 27232 টাকার 0.25 অংশ = ☐ টাকা অভ্র ও তনবির সমান দুই ভাগে ভাগ করে নেবেন।

(ii) (27232 – 6808) টাকা = ☐ টাকা মূলধনের অনুপাতে চার বন্ধু ভাগ করে নেবে।

অভ্র, তনবির, অমৃতা ও তথাগত-র মূলধনের অনুপাত = 15000 : 21000 : 30000 : 45000
= 5 : 7 : 10 : 15

∴ লাভের বাকি 20424 টাকা তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবেন।

অভ্র পাবেন = $\frac{5}{5+7+10+15} \times 20424$ টাকা = ☐ টাকা

একইভাবে 20424 টাকার মধ্যে তনবির, অমৃতা ও তথাগত কত টাকা করে পাবেন নিজে হিসাব করে লিখি।

∴ অভ্র মোট পাবেন = $(6808 \div 2 + \frac{5}{37} \times 20424)$ টাকা = ☐ টাকা

তনবীর মোট পাবেন = $(6808 \div 2 + \frac{7}{37} \times 20424)$ টাকা = ☐ টাকা

অমৃতা পাবেন 5520 টাকা ও তথাগত পাবেন 8280 টাকা।

প্রয়োগ : 7. জয়াকাকিমা 10000 টাকা মূলধন দিয়ে একটি ছোটো হাতে তৈরি জিনিস বিক্রির ব্যাবসা শুরু করলেন। 6 মাস পরে সুলেখাদিদি 14000 টাকা মূলধন দিয়ে জয়া কাকিমার ব্যবসায় যোগ দিলেন। এক বছরে 5100 টাকা লাভ হলো। হিসাব করে দেখি কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন?

কিন্তু এক্ষেত্রে দেখছি দুজনের মূলধন সমান সময়ের জন্য ব্যবসায় নিয়োজিত হয়নি। সুতরাং এক্ষেত্রে তাদের মূলধনের অনুপাত কীভাবে নির্ণয় করব?

(3) এই ধরনের অংশীদারি কারবারকে মিশ্র অংশীদারি কারবার বলা হয়।

অংশীদারি কারবার দুই প্রকার — (1) সরল, (2) মিশ্র

সরল (Simple) : অংশীদারগণের নিজ মূলধন যদি সমান সময় ধরে ব্যবসায়ে নিয়োজিত থাকে তবে তাকে সরল অংশীদারি কারবার বলা হয়।

মিশ্র (Compound) : অংশীদারগণের নিজস্ব মূলধন যদি বিভিন্ন সময় ধরে ব্যবসায়ে নিয়োজিত থাকে তবে তাকে মিশ্র অংশীদারি কারবার বলা হয়।

এক্ষেত্রে প্রথমে প্রত্যেক অংশীদারের সমতুল্য মূলধন (সময়ের সাপেক্ষে) নির্ণয় করে নিতে হবে।

কিন্তু মিশ্র অংশীদারি কারবারে সময়ের সাপেক্ষে সমতুল্য মূলধন কীভাবে পাব দেখি।

প্রথমে জয়াকাকিমা ও সুলেখাদিদির ব্যবসায়ে নিয়োজিত মূলধনের সময়কে সমান করে নিতে হবে।

ধরি, জয়াকাকিমা 1 মাসে 10000 টাকার জিনিস বিক্রি করে x টাকা লাভ করেন

তিনি 2 মাসে 10000 টাকার জিনিস বিক্রি করে 2x টাকা লাভ করেন

∴ তিনি 12 মাসে 10000 টাকার জিনিস বিক্রি করে 12x টাকা লাভ করেন।

জয়া কাকিমা যদি ওই 12x টাকা লাভ 1 মাসে করতে চান তবে তাকে মূলধন দিতে হবে 12×10000 টাকা
= 120000 টাকা

আবার, সুলেখা দিদি একইভাবে তার 14000 টাকা মূলধন 6 মাস খাটিয়ে যে লাভ পাবেন তা 1 মাসে পেতে হলে 6×14000 টাকা = 84000 টাকা দিতে হবে।

এইভাবে দুইক্ষেত্রেই সময়কে সমান করে অর্থাৎ 1 মাসে এনে সময়ের সাপেক্ষে জয়াকাকিমা ও সুলেখাদিদির সমতুল্য মূলধন পেলাম।

> **4** মিশ্র অংশীদারি কারবারে সকল অংশীদারের নিয়োজিত মূলধনের সময়কে সমান করা হয়। অর্থাৎ 1 মাসে নিয়ে গিয়ে সময়ের সাপেক্ষে অংশীদারগণের সমতুল্য মূলধন নির্ণয় করা হয়। তাই সেক্ষেত্রে প্রত্যেক অংশীদারের নিজস্ব মূলধন ও সময়ের সাংখ্যমানের গুণফলের অনুপাতে অংশীদারদের মধ্যে লাভ বণ্টন করা হয়।

$\therefore$ জয়াকাকিমা ও সুলেখাদিদির মূলধনের অনুপাত = 120000 : 84000 = 10 : 7

লভ্যাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে। অর্থাৎ, 10 : 7 অনুপাতে ভাগ হবে।

$\therefore$ লাভের 5100 টাকার মধ্যে জয়াকাকিমা পাবেন = $\left(\frac{10}{10+7} \times 5100\right)$ টাকা = ☐ টাকা

লাভের 5100 টাকার মধ্যে সুলেখাদিদি পাবেন = $\left(\frac{7}{10+7} \times 5100\right)$ টাকা = ☐ টাকা

প্রয়োগ : 8 মনীষা 3750 টাকা দিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করেন। 6 মাস পরে রজত 15000 টাকা নিয়ে ওই ব্যবসায় যোগ দেন। বৎসরান্তে যদি 6900 টাকা ক্ষতি হয়ে থাকে, তবে ক্ষতির টাকা কে, কত দেবেন হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 9. আমাদের গ্রামের আমিনাবিবি, রমেনবাবু ও ঈশিতাকাকিমা গত বছর 1 জানুয়ারি যথাক্রমে 50000 টাকা, 60000 টাকা ও 70000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি অংশীদারি কারবার শুরু করেছিলেন। 1 এপ্রিল রমেনবাবু আরও 10000 টাকা মূলধন নিয়োগ করেন, কিন্তু 1 জুন ঈশিতাকাকিমা 10000 টাকা মূলধন উঠিয়ে নেন। 31 ডিসেম্বর পর্যন্ত মোট 39240 টাকা লাভ হলে মূলধনের অনুপাতে কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন হিসাব করে লিখি।

আমিনাবিবির 50000 টাকা 12 মাস খাটিয়ে যে পরিমাণ লাভ হয়েছে, সেই পরিমাণ লাভ একমাসে পেতে হলে তাঁর মূলধন হবে (50000 × 12) টাকা অর্থাৎ 600000 টাকা।

অনুরূপভাবে, রমেনবাবুর মূলধন 60000 টাকা 3 মাস ও (60000 + 10000) টাকা অর্থাৎ 70000 টাকা 9 মাস খেটেছে।

সুতরাং, 1 মাস হিসাবে তাঁর মূলধন $\{(60000 \times 3) + (70000 \times 9)\}$ টাকা= 810000 টাকা

আবার, ঈশিতাকাকিমার মূলধন 70000 টাকা 5 মাস ও (70000–10000) টাকা = 60000 টাকা 7 মাস খেটেছে।

সুতরাং, 1 মাস হিসাবে তাঁর মূলধন হবে = $\{(70000 \times 5) + (60000 \times 7)\}$ টাকা = 770000 টাকা

এই হিসাবে আমিনাবিবি, রমেনবাবু ও ঈশিতাকাকিমার মূলধনের অনুপাত হবে

$$= 600000 : 810000 : 770000 = 60 : 81 : 77$$

$\therefore$ আমিনাবিবি, রমেনবাবু ও ঈশিতাকাকিমার মূলধনের হিসাবে তাদের আনুপাতিক ভাগহার হবে যথাক্রমে $\frac{60}{218}$, $\frac{81}{218}$ ও $\frac{77}{218}$

লভ্যাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে।

$\therefore$ 39240 টাকার মধ্যে আমিনাবিবি পাবেন = $\left(\frac{60}{218} \times 39240\right)$ টাকা = 10800 টাকা

39240 টাকার মধ্যে রমেনবাবু পাবেন = ☐ টাকা **[নিজে লিখি]**

39240 টাকার মধ্যে ঈশিতাকাকিমা পাবেন = ☐ টাকা **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 10. নিবেদিতা ও উমা যথাক্রমে 3000 টাকা ও 5000 টাকা দিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করল। 6 মাস পরে নিবেদিতা ব্যবসায়ে আরও 4000 টাকা দিল, কিন্তু 6 মাস পরে উমা 1000 টাকা তুলে নিল। এক বছরে 6175 টাকা লাভ হলে লাভের টাকা কে কত পাবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 11. সাব্বা, দীপক ও পৃথা যথাক্রমে 6000 টাকা, 8000 টাকা ও 9000 টাকা মূলধন নিয়ে একত্রে একটি ব্যাবসা আরম্ভ করল। কয়েকমাস পরে সাব্বা আরও 3000 টাকা লগ্নি করল। বছরের শেষে মোট 3000 টাকা লাভ হলো এবং পৃথা 1080 টাকা লভ্যাংশ পেল। সাব্বা 3000 টাকা কখন লগ্নি করেছিল নির্ণয় করি।

ধরি, সাব্বা x মাস পরে আরও 3000 টাকা লগ্নি করেছিল

$\therefore$ সাব্বা 6000 টাকা x মাস এবং (6000 + 3000) টাকা = 9000 টাকা
বাকি (12 – x) মাস ব্যবসায় নিয়োজিত করেছিল

বছরের শেষে যে লাভ পাওয়া যায় সেই লাভ 1 মাসে পেতে হলে

সাব্বার প্রয়োজন হতো $\{6000 \times x + 9000 \times (12 - x)\}$ টাকা

$= (108000 - 3000x)$ টাকা

আবার দীপক ও পৃথা যথাক্রমে 8000 টাকা ও 9000 টাকা 12 মাস ব্যবসায় নিয়োজিত করেছে।

$\therefore$ বছরের শেষে যে লাভ পাওয়া যায় সেই লাভ 1 মাসে পেতে হলে দীপকের প্রয়োজন (8000×12) টাকা এবং পৃথার প্রয়োজন (9000×12) টাকা।

$\therefore$ সাব্বা, দীপক ও পৃথার মূলধনের অনুপাত

$= (108000 - 3000x) : 8000 \times 12 : 9000 \times 12$

$= (108 - 3x) : 96 : 108$

$= (36 - x) : 32 : 36$

লভ্যাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে।

$\therefore$ পৃথার লাভের পরিমাণ $= 3000 \times \dfrac{36}{36 - x + 32 + 36}$ টাকা $= \dfrac{3000 \times 36}{104 - x}$ টাকা

শর্তানুসারে,

$$\frac{3000 \times 36}{104 - x} = 1080$$

বা, $104 - x = \dfrac{3000 \times 36}{1080} = 100 \quad \therefore x = 4$

$\therefore$ সাব্বা 3000 টাকা 4 মাস পরে ব্যবসায় লগ্নি করেছিল।

কষে দেখি 14

1. আমি ও আমার বন্ধু মালা দুজনে যথাক্রমে 15000 টাকা ও 25000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করলাম। এক বছরে 16,800 টাকা লাভ হলো। হিসাব করে দেখি আমরা কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাব?

2. প্রিয়ম, সুপ্রিয়া ও বুলু যথাক্রমে 15000 টাকা , 10000 টাকা এবং 25000 টাকা দিয়ে একটি ছোটো মুদির দোকান খুলল। কিন্তু বৎসরান্তে 3000 টাকা লোকসান হলো। কাকে কত টাকা লোকসানের পরিমাণ দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

3. শোভা ও মাসুদ দুজনে মিলে 2,50,000 টাকার একটি গাড়ি কিনে 2,62,500 টাকায় বিক্রি করলেন। গাড়িটি কেনার সময়ে শোভা মাসুদের $1\frac{1}{2}$ গুণ টাকা দিয়ে থাকলে, কে কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন তা হিসাব করে লিখি।

4. তিনবন্ধু যথাক্রমে 5000 টাকা, 6000 টাকা ও 7000 টাকা দিয়ে একটি অংশীদারি ব্যাবসা শুরু করার এক বছর পর দেখলেন 1800 টাকা লোকসান হয়েছে। মূলধন ঠিক রাখার জন্য প্রত্যেকে লোকসানের পরিমাণ দিয়ে দেবেন বলে সিদ্ধান্ত করেন। তাদের কাকে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

5. দীপু, রাবেয়া ও মেঘা যথাক্রমে 6500 টাকা, 5200 টাকা ও 9,100 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ছোটো ব্যাবসা শুরু করল ও ঠিক একবছর পরে 14,400 টাকা লাভ হলো। ওই লাভের $\frac{2}{3}$ অংশ তারা সমানভাবে এবং বাকি অংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নিলে কে কত টাকা লভ্যাংশ পাবে নির্ণয় করি।

6 তিনবন্ধু যথাক্রমে 8000 টাকা, 10000 টাকা ও 12000 টাকা সংগ্রহ করে এবং ব্যাংক থেকে কিছু টাকা ধার নিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করেন। বছরের শেষে তারা দেখলেন 13400 টাকা লাভ হয়েছে। সেই লাভ থেকে ব্যাংকের বছরের কিস্তি 5000 টাকা শোধ দেওয়ার পর বাকি টাকা তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নিলেন। লভ্যাংশ থেকে কে কত টাকা পাবেন হিসাব করে লিখি।

7. দুই বছরের মধ্যে টাকা ফেরত দিলে কোনো সুদ দিতে হবে না এই শর্তে তিন বন্ধু একটি সমবায় ব্যাংক থেকে যথাক্রমে 6000 টাকা, 8000 টাকা, ও 5000 টাকা ধার নিয়ে যৌথভাবে চারটি সাইকেল রিকশা ক্রয় করেন। দুই বছর পর হিসাব করে দেখা যায় সমস্ত খরচ-খরচা বাদ দিয়ে মোট 30400 টাকা আয় হয়েছে। তারা সেই আয় মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেওয়ার পর প্রত্যেকে নিজ নিজ ঋণের টাকা ব্যাংকে ফিরিয়ে দেন। এখন কার হাতে কত টাকা থাকবে এবং তাদের হাতে থাকা টাকার অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।

8. তিন বন্ধু যথাক্রমে 1,20,000 টাকা, 1,50,000 টাকা ও 1,10,000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি বাস ক্রয় করেন। প্রথমজন ড্রাইভার ও বাকি দুজন কন্ডাক্টরের কাজ করেন। তারা ঠিক করেন যে মোট আয়ের $\frac{2}{5}$ অংশ কাজের জন্য 3:2:2 অনুপাতে ভাগ করবেন এবং বাকি টাকা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবেন। কোনো একমাসে যদি 29260 টাকা আয় হয়, তবে কে, কত টাকা পাবেন নির্ণয় করি।

9. বছরের প্রথমে প্রদীপবাবু ও আমিনাবিবি যথাক্রমে 24000 টাকা ও 30000 টাকা নিয়ে ব্যাবসা শুরু করেন। পাঁচ মাস পর প্রদীপবাবু আরও 4000 টাকা মূলধন দেন। বছরের শেষে 27716 টাকা লাভ হলে, কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন হিসাব করে লিখি।

10. নিয়ামতচাচা ও করবীদিদি যথাক্রমে 30,000 টাকা ও 50,000 টাকা মূলধন দিয়ে যৌথভাবে একটি ব্যাবসা আরম্ভ করলেন। 6 মাস পরে নিয়ামতচাচা আরও 40,000 টাকা লগ্নি করলেন, কিন্তু করবীদিদি ব্যক্তিগত প্রয়োজনে 10,000 টাকা তুলে নিলেন। বছরের শেষে যদি 19,000 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তাহলে কে, কত টাকা লাভ পাবেন হিসাব করে দেখি।

11. বছরের শুরুতে শ্রীকান্ত ও সৈফুদ্দিন 2,40,000 টাকা ও 3,00,000 টাকা দিয়ে একটি মিনিবাস ক্রয় করে চালাতে থাকেন। চার মাস পর তাদের বন্ধু পিটার 81,000 টাকা নিয়ে তাদের সঙ্গে যোগ দিলে শ্রীকান্ত ও সৈফুদ্দিন তাদের মূলধনের অনুপাতে সেই টাকা তুলে নেন। বছরের শেষে 39150 টাকা লাভ হলে, লভ্যাংশ থেকে কে, কত টাকা পাবেন হিসাব করে লিখি।

12. বছরের প্রথমে অরুণ ও অজয় যথাক্রমে 24,000 টাকা ও 30,000 টাকা দিয়ে যৌথভাবে ব্যাবসা শুরু করেন। কিন্তু কয়েক মাস পরে অরুণ আরও 12,000 টাকা ওই ব্যবসায়ে মূলধন দেন। বছরের শেষে ওই ব্যবসায়ে 14,030 টাকা লাভ হলো এবং অরুণ 7,130 টাকা লভ্যাংশ পেলেন। অরুণ কত মাস পরে ব্যবসায়ে টাকা দিয়েছিলেন নির্ণয় করি।

13. কুমারটুলির তিনজন মৃৎশিল্পী একটি সমবায় ব্যাংক থেকে যৌথভাবে 100000 টাকা ধার করে মৃৎশিল্পের একটি কারখানা স্থাপন করেন। তারা এই চুক্তি করেন যে প্রতি বছর ব্যাংকের কিস্তি 28100 টাকা দেওয়ার পর বাকি লাভের অর্ধেক কাজের দিনের অনুপাতে এবং বাকি অর্ধেক সমান ভাগে ভাগ করে নেবেন। গত বছর তারা যথাক্রমে 300 দিন, 275 দিন ও 350 দিন কাজ করেছেন এবং মোট লাভ হয়েছে 139100 টাকা। কে, কত টাকা পেয়েছিলেন হিসাব করে লিখি।

14. দুই বন্ধু যথাক্রমে 40000 টাকা ও 50000 টাকা দিয়ে একটি যৌথ ব্যবসা শুরু করেন। তাদের মধ্যে একটি চুক্তি হয় যে, লাভের 50% নিজেদের মধ্যে সমান ভাগে এবং লাভের অবশিষ্টাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে। প্রথম বন্ধুর লভ্যাংশের পরিমাণ যদি দ্বিতীয় বন্ধুর লভ্যাংশ অপেক্ষা 800 টাকা কম হয়, তবে প্রথম বন্ধুর লভ্যাংশের পরিমাণ হিসাব করে লিখি।

15. পূজা, উত্তম ও মেহের যথাক্রমে 5000 টাকা, 7000 টাকা ও 10000 টাকা মূলধন নিয়ে অংশীদারি কারবার এই শর্তে শুরু করে যে (i) কারবার চালানোর মাসিক খরচ 125 টাকা, (ii) হিসাবপত্র রাখার জন্য পূজা ও উত্তম প্রত্যেকে মাসিক 200 টাকা পাবে। বছরের শেষে 6960 টাকা লাভ হলে, তা থেকে কে, কত টাকা পাবে হিসাব করে লিখি।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) কোন যৌথ ব্যবসায়ে তিন বন্ধুর মূলধন যথাক্রমে 200 টাকা, 150 টাকা ও 250 টাকা। একই সময় পরে তাদের লভ্যাংশের অনুপাত হবে

(a) 5:3:4 (b) 4:3:5 (c) 3:5:4 (d) 5:4:3

(ii) শুভেন্দু ও নৌসাদ যথাক্রমে 1500 এবং 1000 টাকা দিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে। এক বছর পরে ব্যবসায় 75 টাকা ক্ষতি হলে, শুভেন্দুর ক্ষতি হয়

(a) 45 টাকা (b) 30 টাকা (c) 25 টাকা (d) 40 টাকা

(iii) ফতিমা, শ্রেয়া এবং স্মিতা তিনজনে মোট 6000 টাকা দিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে। এক বছর পরে ফতিমা, শ্রেয়া এবং স্মিতা যথাক্রমে লভ্যাংশের 50 টাকা, 100 টাকা এবং 150 টাকা পায়। স্মিতা ওই ব্যবসায় নিয়োজিত করে

(a) 1000 টাকা (b) 2000 টাকা (c) 3000 টাকা (d) 4000 টাকা

(iv) অমল এবং বিমল একটি ব্যাবসা শুরু করে। অমল 500 টাকা 9 মাসের জন্য এবং বিমল কিছু টাকা 6 মাসের জন্য ব্যবসায় নিয়োজিত করে। ব্যবসায় মোট লাভ হয় 69 টাকা এবং বিমল লাভের 46 টাকা পায়। ব্যবসায় বিমলের মূলধন

(a) 1500 টাকা (b) 3000 টাকা (c) 4500 টাকা (d) 6000 টাকা

(v) পল্লবী 500 টাকা 9 মাসের জন্য এবং রাজিয়া 600 টাকা 5 মাসের জন্য একটি ব্যবসায় নিয়োজিত করে। লভ্যাংশ তাদের মধ্যে বণ্টিত হবে যে অনুপাতে তা হলো

(a) 3:2 (b) 5:6 (c) 6:5 (d) 9:5

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) অংশীদারি ব্যবসায় কমপক্ষে লোকের দরকার 3 জন।

(ii) একটি ব্যবসায় রাজু ও আসিফের মূলধনের অনুপাত 5 : 4 এবং রাজু মোট লাভের 80 টাকা পেলে আসিফ পায় 100 টাকা।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) অংশীদারি কারবার ____________ ধরনের।

(ii) অন্য কোনো শর্ত ছাড়া অংশীদারি ব্যবসায় অংশীদারগণ সমান সময়ের জন্য মূলধন নিয়োজিত করলে তাকে ____________ অংশীদারি কারবার বলে।

(iii) অন্য কোনো শর্ত ছাড়া অংশীদারি ব্যবসায় অংশীদারগণ ভিন্ন ভিন্ন সময়ের জন্য মূলধন নিয়োজিত করলে তাকে ____________ অংশীদারি কারবার বলে।

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি অংশীদারি ব্যবসায় সমীর, ইদ্রিশ এবং অ্যান্টনির মূলধনের অনুপাত $\frac{1}{6} : \frac{1}{5} : \frac{1}{4}$; বছরের শেষে ব্যবসায় মোট লাভ 3700 টাকা হলে, অ্যান্টনির লাভ কত হবে হিসাব করি।

(ii) একটি অংশীদারি ব্যবসায় পৃথা ও রাবেয়ার মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং রাবেয়া ও জেসমিনের মূলধনের অনুপাত 4 : 5 হলে, পৃথা, রাবেয়া ও জেসমিনের মূলধনের অনুপাত কত তা হিসাব করি।

(iii) দুজনের একটি অংশীদারী ব্যবসায় মোট লাভ হয় 1500 টাকা। রাজীবের মূলধন 6000 টাকা এবং লাভ 900 টাকা হলে, আফতাবের মূলধন কত তা হিসাব করি।

(iv) একটি অংশীদারি ব্যবসায় তিনজনের মূলধনের অনুপাত 3 : 8 : 5 এবং প্রথম ব্যক্তির লাভ তৃতীয় ব্যক্তির লাভের থেকে 60 টাকা কম হলে, ব্যবসায় মোট কত লাভ হয়েছিল হিসাব করি।

(v) জয়ন্ত, অজিত এবং কুণাল মোট 15000 টাকা দিয়ে একটি অংশীদারি ব্যাবসা শুরু করে। বছরের শেষে জয়ন্ত, অজিত এবং কুণালের যথাক্রমে লাভ হয় 800 টাকা, 1000 টাকা এবং 1200 টাকা। জয়ন্ত কত টাকা ব্যবসায় নিয়োজিত করে হিসাব করি।

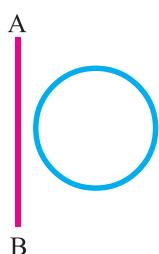
15 বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য
THEOREMS RELATED TO TANGENT OF A CIRCLE

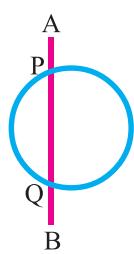
গত রবিবার আমরা বাড়ির ভাইবোনেরা সকলে মিলে গ্রামের মেলায় গিয়েছিলাম। মেলায় অনেক চিনামাটির মূর্তি, চুড়ি, আচার, জিলিপি, বাঁশি, বাঁশকাঠি ও বেতের খেলনা ও নানান ধরনের হাতের কাজের শৌখিন জিনিস কিনেছি।

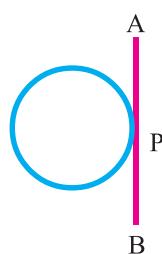
আমার ভাই পাশের ছবির মতো একটি বাঁশকাঠির খেলনা কিনেছে যেটির বৃত্তাকার চাকাটি হাওয়ায় ঘুরতে থাকে।

আমার কাছে একটি বৃত্তাকার রিং আছে। আমি ঠিক করেছি একইরকম একটি খেলনা তৈরির চেষ্টা করব।

আমি বাঁশের কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-এর কাছে বিভিন্ন স্থানে বসিয়ে নীচের তিনটি অবস্থা পেলাম —

(i) A B

AB কাঠি ও বৃত্তাকার রিং-এর কোনো সাধারণ বিন্দু নেই

(ii)

AB কাঠি ও বৃত্তাকার রিং-এর P ও Q দুটি সাধারণ বিন্দু আছে

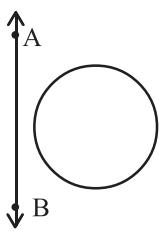
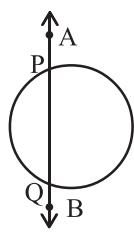
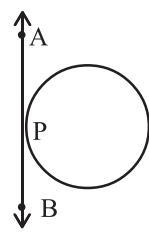
(iii)

AB কাঠি ও বৃত্তাকার রিং-এর একটি মাত্র সাধারণ বিন্দু P

বুঝেছি, (i) নং ক্ষেত্রে AB কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-কে ছেদ করেনি। আবার
(ii) নং ক্ষেত্রে AB কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-কে ছেদ করেছে।

1 কিন্তু (iii) নং ক্ষেত্রে AB কাঠিটি ও বৃত্তাকার রিং কীভাবে আছে?

AB কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-কে P বিন্দুতে স্পর্শ করে আছে।

আমার বন্ধু সুমেধা তার খাতায় আমার মতো একইরকমভাবে একটি সরলরেখা ও একটি বৃত্ত পরস্পর কী কী অবস্থানে থাকতে পারে আঁকল।

(i)

(ii)

(iii)

দেখছি, (i) নং চিত্রে AB সরলরেখা বৃত্তকে ছেদ করেনি।

আবার, (ii) নং চিত্রে AB সরলরেখা বৃত্তকে ☐ ও ☐ বিন্দুতে ছেদ করেছে।

2 কিন্তু, (ii)ও (iii) নং চিত্রে AB সরলরেখাকে বৃত্তের কী বলা হয়?

(ii) নং চিত্রে AB সরলরেখা বৃত্তের ছেদক (Secant) এবং PQ, AB ছেদকের অনুরূপ জ্যা [Corresponding chord] দেখছি, (iii) নং চিত্রে AB সরলরেখা ও বৃত্তের সাধারণ বিন্দু ☐।

∴ AB সরলরেখা বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

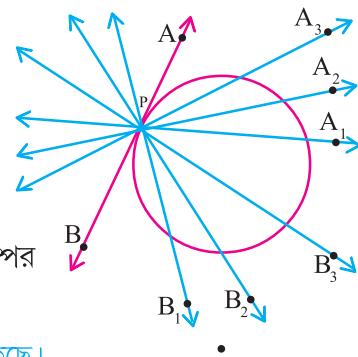
3 কিন্তু (iii) নং চিত্রে AB সরলরেখাকে বৃত্তের কী বলা হয়?

(iii) নং চিত্রে AB সরলরেখা P বিন্দুতে বৃত্তের **স্পর্শক** (tangent), P বিন্দু **স্পর্শবিন্দু** [Point of contact]

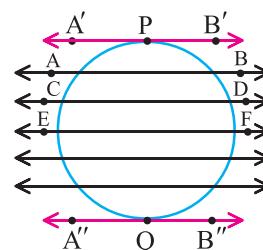
বুঝেছি, বৃত্তের ছেদকের অনুরূপ জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিত হলে, ছেদকটি বৃত্তের একটি স্পর্শক হবে।

আমি হাতেকলমে যাচাই করি

একটি শক্ত তারের বৃত্তাকার রিং-এর যে-কোনো একটি P বিন্দুতে একটি সোজা সরলরৈখিক (straight) তার PA_1-আটকে P বিন্দুকে কেন্দ্র করে ক্রমশ দু-দিকে ঘোরালাম।

দেখছি, PA_1, PA_2, PA_3 ... বা PB_3, PB_2, PB_1 ... অবস্থানের ছেদকটি ঘুরতে ঘুরতে যখন ছেদকের অনুরূপ জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিত হলো, তখন বৃত্তের ছেদকটি একটি ☐ হলো।

রজত তার খাতায় একটি বৃত্ত ও তার একটি ছেদক AB সরলরেখা এঁকেছে।

4 আমি ওই বৃত্তে AB ছেদকের সমান্তরাল স্পর্শক আঁকার চেষ্টা করি।

খাতায় একটি বৃত্ত এঁকে স্কেলের সাহায্যে স্কেলের দু-প্রান্তে দুটি সরলরেখা AB ও CD আঁকলাম। CD ছেদক AB ছেদকের সমান্তরাল। বৃত্তের AB ছেদকের সমান্তরাল একাধিক ছেদক স্কেলের সাহায্যে এঁকে A'B' ও A"B" দুটি ছেদক পেলাম যারা যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক এবং AB ছেদকের সমান্তরাল ওই বৃত্তে দুটির বেশি স্পর্শক পেলাম না। **[নিজে এঁকে যাচাই করি]**

আমরা গোলাকার রিং ও কাঠির সাহায্যে আগের খেলনার মতো অন্যরকম একটি খেলনা তৈরি করলাম। এছাড়া অনেক সাদা পিচবোর্ডের বৃত্তাকার চাকতিও তৈরি করেছি যেগুলি দিয়ে অন্যরকম খেলনা তৈরি করব।

রীতম তার রঙিন কাগজে একটি বৃত্তাকার চাকতি আটকে দিল যার কেন্দ্র O।

হাতেকলমে

আমি হাতেকলমে এই বৃত্তের যে-কোনো বিন্দুতে স্পর্শক আঁকি ও কী পাই দেখি।

(i) বৃত্তের উপরে যে-কোনো তিনটি বিন্দু P, Q ও R নিলাম।

(ii) কাগজ ভাঁজ করে পাশের ছবির মতো বৃত্তের P, Q ও R বিন্দুতে তিনটি স্পর্শক যথাক্রমে AB, BC ও CA অঙ্কন করলাম যারা A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করল।

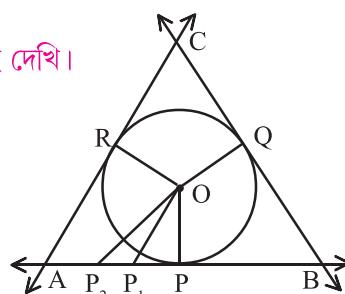
(iii) OP, OQ ও OR ব্যাসার্ধ পেলাম।

(iv) AB-এর উপরে P বিন্দু ব্যতীত অন্য যে-কোনো বিন্দু P_1, P_2 নিলাম।

ΔOP_1P ও ΔOP_2P থেকে দেখছি, $OP_1 > OP$ এবং $OP_2 > OP$.

∴ দেখছি, AB স্পর্শকের উপর যে-কোনো বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যে OP ক্ষুদ্রতম

$\therefore OP \perp AB$

হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :40. বৃত্তের কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও ওই স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে AB স্পর্শক এবং OP, P বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করতে হবে : OP ও AB স্পর্শক পরস্পর লম্ব। অর্থাৎ, $OP \perp AB$

অঙ্কন : AB স্পর্শকের উপর অপর যে-কোনো একটি বিন্দু Q নিলাম। O, Q বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : স্পর্শক AB -এর উপর স্পর্শবিন্দু P ছাড়া অন্য যে-কোনো বিন্দু বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।

সুতরাং, OQ বৃত্তটিকে একটি বিন্দুতে ছেদ করবে।

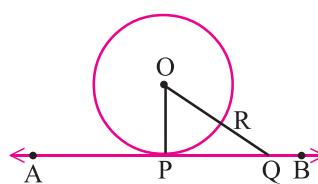
মনে করি, ছেদবিন্দু R.

$\therefore OR < OQ$ [$\because$ R বিন্দু O, Q-এর মধ্যবর্তী]

আবার, $OR = OP$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore OP < OQ$

$\because$ Q বিন্দু A B স্পর্শকের উপর যে-কোনো বিন্দু, সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে AB স্পর্শক পর্যন্ত যত সরলরেখাংশ অঙ্কন করা যায় OP তাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম। আবার ক্ষুদ্রতম দূরত্ব লম্ব দূরত্ব।

সুতরাং, $OP \perp AB$ (প্রমাণিত)

যুক্তি দিয়ে উপপাদ্য : 40-এর বিপরীত বিবৃতি প্রমাণ করি।

প্রয়োগ : 1. কোনো বৃত্তের যে-কোনো ব্যাসার্ধের প্রান্তবিন্দু দিয়ে ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত লম্ব সরলরেখা ওই বৃত্তের ওই প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শক হবে।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে OP ব্যাসার্ধ এবং P বিন্দুতে OP ব্যাসার্ধের উপর AB সরলরেখা লম্ব।

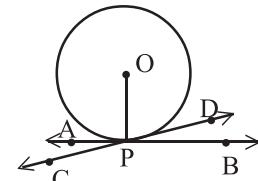
প্রমাণ করতে হবে : সরলরেখা AB, P বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক।

প্রমাণ : ধরি, AB সরলরেখা P বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক নয়। O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে একটি স্পর্শক CD অঙ্কন করি।

যেহেতু, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে CD স্পর্শক এবং OP, P বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সুতরাং OP, CD সরলরেখার উপর লম্ব। $\therefore \angle OPD = 90^0$

আবার, $\angle OPB = 90^0$ (প্রদত্ত) [$\because$ OP, AB সরলরেখার উপর লম্ব]

$\therefore \angle OPD = \angle OPB$ অর্থাৎ CD সরলরেখা ও AB সরলরেখা পরস্পর সমাপতিত হবে।

$\therefore$ AB সরলরেখা O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক।

প্রয়োগ : 2. প্রমাণ করি যে বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

[**সংকেত :** যেহেতু ওই বিন্দুতে ওই বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর একটিমাত্র লম্ব সরলরেখাই অঙ্কন করা যায়।]

প্রয়োগ : 3. প্রমাণ করি যে, স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

[**সংকেত :** একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটিমাত্র লম্ব সরলরেখাই অঙ্কন করা যায়।]

প্রয়োগ : 4. পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে A বিন্দুতে AT একটি স্পর্শক। x কে y-এর সাহায্যে প্রকাশ করি।

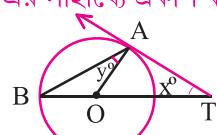
O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AT স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

$\therefore \angle OAT = 90^o$; আবার, $\angle ATO = x^o$

সুতরাং, ΔAOT-এর, $\angle AOT = 90^o - x^o$ ______ (i)

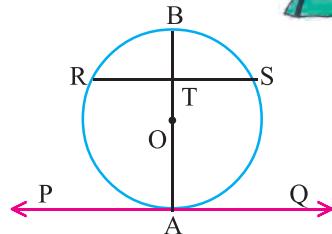
আবার, ΔAOB-এর, $\angle OAB = \angle OBA = y^o$ [$\because$ OA ও OB একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $\therefore OA = OB$]

ΔAOB-তে, বহিঃস্থ $\angle AOT = \angle OAB + \angle OBA = 2y^o$ ______ (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পেলাম, $2y^o = 90^o - x^o$ বা, $x^o = 90^o - 2y^o$ $\therefore x = 90 - 2y$

প্রয়োগ : 5. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার একটি ব্যাস AB এবং A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক PAQ; PAQ-এর সমান্তরাল জ্যা RS; যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে AB, RS-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ : ধরি, AB, RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করেছে। O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে PAQ স্পর্শক এবং AB ব্যাস। সুতরাং, $AB \perp PQ$

আবার, $PQ \parallel RS$ [প্রদত্ত]

$\therefore AB \perp RS$ অর্থাৎ, $OT \perp RS$

$\therefore$ T, RS-এর মধ্যবিন্দু [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বৃত্তের জ্যা-এর উপর লম্ব জ্যা-টিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ AB, RS-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

প্রয়োগ : 6. প্রমাণ করি যে-কোনো বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুটিতে অঙ্কিত স্পর্শকদুটি পরস্পর সমান্তরাল।
(নিজে করি)

কষে দেখি 15.1

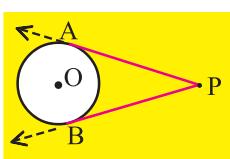
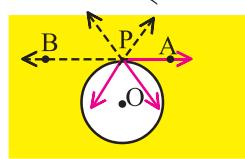
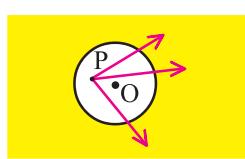
1. মাসুম O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যার AB একটি জ্যা। B বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করেছি যা বর্ধিত AO-কে T বিন্দুতে ছেদ করল। $\angle BAT = 21^0$ হলে, $\angle BTA$-এর মান হিসাব করে লিখি।
2. কোনো বৃত্তের XY একটি ব্যাস। বৃত্তটির উপর অবস্থিত A বিন্দুতে PAQ বৃত্তের স্পর্শক। X বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব PAQ-কে Z বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, XA, $\angle YXZ$-এর সমদ্বিখণ্ডক।
3. একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যার PR একটি ব্যাস। P বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করলাম এবং এই স্পর্শকের উপরে S এমন একটি বিন্দু নিলাম যাতে PR = PS হয়। RS, বৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, ST = RT = PT.
4. একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন করি যার দুটি ব্যাসার্ধ OA ও OB পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, AB = OT এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
5. দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির AB ও AC জ্যা দুটি অপর বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করলে, প্রমাণ করি যে , $PQ = \frac{1}{2} BC$.
6. O কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের উপর অবস্থিত A বিন্দুতে স্পর্শকের উপর X যে-কোনো একটি বিন্দু। X বিন্দু থেকে অঙ্কিত একটি ছেদক বৃত্তকে Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে। YZ-এর মধ্যবিন্দু P হলে, প্রমাণ করি যে, XAPO বা XAOP একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।
7. O কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। ওই ব্যাসের উপর O বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। বর্ধিত QP বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। R বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বর্ধিত OP-কে S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, SP=SR.
8. বুমেলা O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যার QR একটি জ্যা। Q ও R বিন্দুতে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। QM বৃত্তের একটি ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে, $\angle QPR = 2 \angle RQM$.
9. কোনো বৃত্তের AC ও BD দুটি জ্যা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে এবং C ও D বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $\angle P + \angle Q = 2\angle BOC$.

আজ আমরা ঠিক করেছি হাতেকলমে কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে স্পর্শক আঁকার চেষ্টা করব এবং কোন কোন ক্ষেত্রে কতগুলি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব জানব।

হাতেকলমে

(i) তিনটি রঙিন শক্ত পিচবোর্ড নিলাম।

(ii) তিনটি সাদা কাগজে একই মাপের O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম এবং এই রঙিন পিচবোর্ডে আটকে দিলাম।

(iii) তিনটি বোর্ডে তিনটি আলপিন নীচের ছবির মতো যথাক্রমে বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বাহিরে, বৃত্তের উপর ও বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ভিতরে P বিন্দুতে আটকে দিলাম এবং আলপিনে সুতোর একপ্রান্ত আটকে অন্য প্রান্ত নীচের ছবির মতো বিভিন্ন দিকে ঘুরিয়ে সুতোর সাহায্যে বৃত্তের স্পর্শক টানার চেষ্টা করলাম।

(i)

(ii)

(iii)

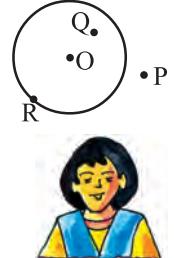
দেখছি, (i) নং ক্ষেত্রে অর্থাৎ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বাহিরের যে-কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে ☐ টি স্পর্শক অঙ্কন করতে পারব।

(ii) নং ক্ষেত্রে অর্থাৎ বৃত্তের উপরের যে-কোনো বিন্দুতে ওই বৃত্তে ☐ টি স্পর্শক অঙ্কন করতে পারব। এবং

(iii) নং ক্ষেত্রে অর্থাৎ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ভেতরের যে-কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তের কোনো স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব নয়।

পাশের ছবির O কেন্দ্রীয় বৃত্তটির একটি বহিঃস্থ বিন্দু P এবং একটি অন্তঃস্থ বিন্দু Q এবং ওই বৃত্তে অবস্থিত একটি বিন্দু R.

হাতে কলমে যাচাই করে দেখি, P, Q ও R বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে কয়টি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব।

∴ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে 2টি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

প্রয়োগ : 7. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের T যে-কোনো একটি বহিঃস্থ বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে : T বিন্দু থেকে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

অঙ্কন : T, O যুক্ত করলাম। T O -কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম।
যেহেতু T বিন্দুটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু এবং O অন্তঃস্থ বিন্দু।
সুতরাং, TO-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্তটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করবে।
ধরি, ছেদবিন্দু দুটি A এবং B; T, A; T, B; O, A; O, B যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : $\angle OAT$ এবং $\angle OBT$ প্রত্যেকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle OAT = \angle OBT = 1$ সমকোণ

অর্থাৎ, $OA \perp AT$ এবং $OB \perp BT$

TA ও TB যথাক্রমে ব্যাসার্ধ OA এবং OB-এর উপর A ও B বিন্দুতে লম্ব।

$\therefore$ TA ও TB, O কেন্দ্রীয় বৃত্তে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে দুটি স্পর্শক।

পেলাম, বহিঃস্থ বিন্দু থেকে একটি বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। [প্রমাণিত]

বুঝেছি, বৃত্তের ☐ [অন্তঃস্থ/বহিঃস্থ] কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে কোনো স্পর্শক অঙ্কন করা যায় না। [নিজে লিখি]

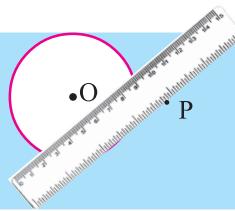
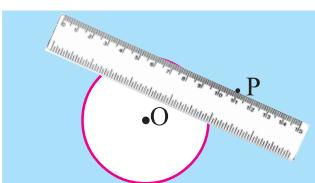
প্রয়োগ : 8. আমি একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে দুটি স্পর্শক PA ও PB অঙ্কন করেছি যারা বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, $\angle APB + \angle AOB = 180^0$ [নিজে করি]

হাতেকলমে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করেছি যে, বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

কিন্তু এই দুটি স্পর্শকের মধ্যে কীরকম সম্পর্ক থাকবে হাতেকলমে পরীক্ষা করে দেখি।

হাতেকলমে

(1) একটি কাগজে যে-কোনো O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকলাম এবং বৃত্তের বহিঃস্থ যে-কোনো বিন্দু P নিলাম।

(2) এবার একটি স্কেল কাগজের উপর এমনভাবে নীচের ছবির মতো বৃত্তের কেন্দ্রের দু-দিকে রাখলাম যাতে স্কেলটি P বিন্দু এবং বৃত্তকে স্পর্শ করে থাকে।

(3) কাগজটি দু-দিকে ভাঁজ করে P বিন্দু থেকে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শবিন্দু A ও B পেলাম এবং A, P; B, P; O, P; O, A ও O, B যোগ করলাম ও দুটি স্পর্শক AP ও BP পেলাম।

(4) OP বরাবর কাগজটি দু-ভাঁজ করে দেখছি, AP ও BP পরস্পর মিলে গেছে এবং OA ও OB পরস্পর মিলে গেছে।

∴ হাতেকলমে পেলাম, AP = BP এবং $\angle AOP = \angle BOP$।

হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করলে তাদের স্পর্শবিন্দু দুটির সঙ্গে বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ দুটির দৈর্ঘ্য **সমান** হয় এবং তারা কেন্দ্রে **সমান** কোণ উৎপন্ন করে।

[নিজে অপর একটি বৃত্ত এঁকে একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করি]

কিন্তু বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে স্পর্শবিন্দু A পর্যন্ত দৈর্ঘ্যকে কী বলা হয়?

বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে স্পর্শবিন্দু A পর্যন্ত দৈর্ঘ্যকে P বিন্দু থেকে PA **স্পর্শকের দৈর্ঘ্য** বলা হয়।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :41. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে যে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায় তাদের স্পর্শবিন্দু দুটির সঙ্গে বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ দুটির দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক যাদের স্পর্শবিন্দু যথাক্রমে A ও B, O,A; O, B ; O, P যুক্ত করায় PA ও PB সরলরেখাংশ দুটি কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle POA$ ও $\angle POB$ দুটি কোণ উৎপন্ন করেছে।

প্রমাণ করতে হবে :(i) PA = PB (ii) $\angle POA = \angle POB$

প্রমাণ : PA ও PB স্পর্শক এবং OA ও OB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

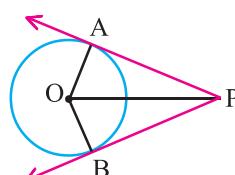
∴ $OA \perp PA$ এবং $OB \perp PB$

POA ও POB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে, $\angle OAP = \angle OBP$ (প্রত্যেকে 1 সমকোণ)

অতিভুজ OP সাধারণ বাহু এবং OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

∴ $\Delta PAO \cong \Delta PBO$ [সর্বসমতার R-H-S শর্তানুসারে]

∴ PA = PB (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু) .... [(i) প্রমাণিত]

এবং $\angle POA = \angle POB$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ) .... [(ii) প্রমাণিত]

এই উপপাদ্যটি থেকে আরও পেলাম $\angle APO = \angle BPO$ (সর্বসম ত্রিভুজ PAO ও PBO-এর অনুরূপ কোণ)। সুতরাং OP, $\angle APB$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রয়োগ : 9. আমি একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকেছি যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। কেন্দ্র O থেকে 10 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দু থেকে PT স্পর্শক আঁকলাম। হিসাব করে PT স্পর্শকের দৈর্ঘ্য লিখি।

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OT ব্যাসার্ধ এবং PT স্পর্শক। $\therefore OT \perp PT$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ POT-তে, $PT^2 = PO^2 - OT^2$

[পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম]

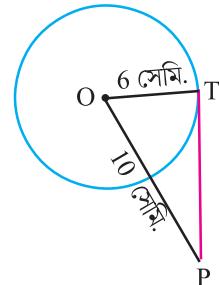
বা, $PT^2 = \{(10)^2 - (6)^2\}$ বর্গ সেমি.

$= (100 - 36)$ বর্গ সেমি.

$= 64$ বর্গ সেমি.

$\therefore$ $PT = \sqrt{64}$ সেমি.

$= 8$ সেমি.

$\therefore$ পেলাম PT স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 8 সেমি.।

প্রয়োগ : 10. আমি যদি এমন একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি যার কেন্দ্র থেকে 26 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হবে, তবে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে লিখি।

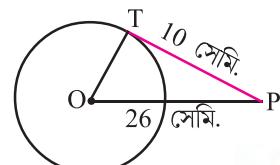
PT = 10 সেমি., PO = 26 সেমি.

$\therefore$ সমকোণী ΔPOT থেকে পাই,

$PO^2 = PT^2 + OT^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

$\therefore$ (26সেমি.)^2 = (10সেমি.)^2 + OT^2

বা, OT^2 = (26সেমি.)^2 – (10সেমি.)^2 = ☐

$\therefore$ OT = ☐ সেমি. **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 11. পাশের চিত্রের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ OA ও OB-এর মধ্যবর্তী কোণ 130°; A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় T বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle ATB$ এবং $\angle ATO$-এর মান হিসাব করে লিখি।

A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করেছে।

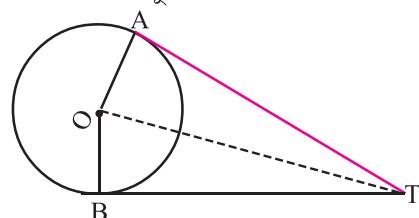
$\therefore$ T বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক AT ও BT এবং OA ও OB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

$\therefore OA \perp AT$ এবং

$\therefore \angle ATB + \angle AOB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ)$

$= 180^\circ$

$\therefore \angle ATB = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

আবার, যেহেতু OT, $\angle ATB$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সুতরাং $\angle ATO = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

নিজে করি 15.1

(1) 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 13 সেমি. দূরবর্তী কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

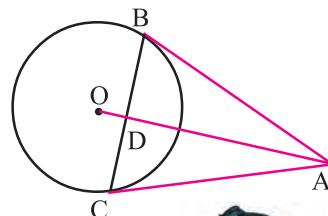
(2) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 13 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু P থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

(3) যদি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় PA ও PB; $\angle AOB = 120^\circ$ হলে, $\angle APB$ এবং $\angle APO$-এর মান হিসাব করে লিখি।

প্রয়োগ : 12. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে বৃত্তে দুটি স্পর্শক টানি যারা বৃত্তকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে। প্রমাণ করি যে, AO, BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে বৃত্তে দুটি স্পর্শক AB ও AC টানা হয়েছে যারা বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। A, O যুক্ত করি। AO, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : AO, BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও AC স্পর্শক। সুতরাং, AB = AC
এবং AO, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক। অর্থাৎ, $\angle BAD = \angle CAD$
ΔABD ও ΔACD-তে, AB = AC
$\angle BAD = \angle CAD$ এবং AD সাধারণ বাহু
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (S-A-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে)
সুতরাং, BD = CD (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু)
এবং $\angle BDA = \angle CDA$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ)
আবার, $\angle BDA + \angle CDA = 180^\circ$ বা, $2\angle BDA = 180^\circ$ ($\because \angle BDA = \angle CDA$)
$\therefore \angle BDA = 90^\circ$ সুতরাং $AD \perp BC$ $\therefore$ AD, BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক। **(প্রমাণিত)**

নিজে করি 15.2

(1) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক দুটির অন্তর্ভূত কোণকে ওই বিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(2) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক দুটির অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী হবে।

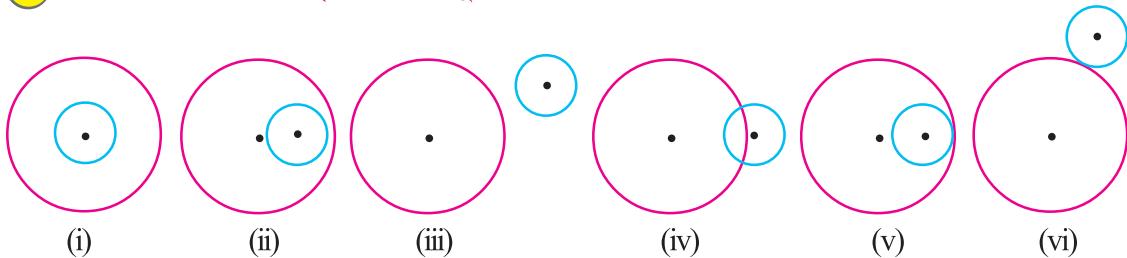
(3) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের উপরিস্থিত দুটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি যদি পরস্পরকে ছেদ করে, তাহলে ছেদবিন্দু থেকে স্পর্শবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হবে।

আজ আমরা ঠিক করেছি আমাদের নিজস্ব পরিবেশের বৃত্তাকার ছবি আঁকব। নীলাদ্রি খুব ভালো ছবি আঁকে। সে স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে একটি বৃত্তাকার মাঠের ছবি আঁকল।

কিন্তু আমাদের পাড়ার বৃত্তাকার মাঠের চারধারে সমান চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তাসমেত বৃত্তাকার মাঠটির ছবি আঁকি।

দেখছি, দুটি বৃত্ত পেলাম যাদের কেন্দ্র একই অর্থাৎ দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত পেলাম। এদিকে রাবেয়া দুটি বৃত্তকার তারের রিং নানাভাবে বসিয়ে নতুন কিছু তৈরির চেষ্টা করছে।

5 আমি রাবেয়ার বসানো বৃত্তাকার রিং-গুলির অবস্থান দেখি ও কী কী ভাবে আছে দেখি।

(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

দেখছি, (i) নং ছবির বৃত্তদ্বয় ______, কিন্তু (ii) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় এককেন্দ্রীয় নয়। আবার,

(iii) নং ছবির বৃত্তদ্বয় পরস্পরছেদী না হলেও (iv) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় দুটি বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে।

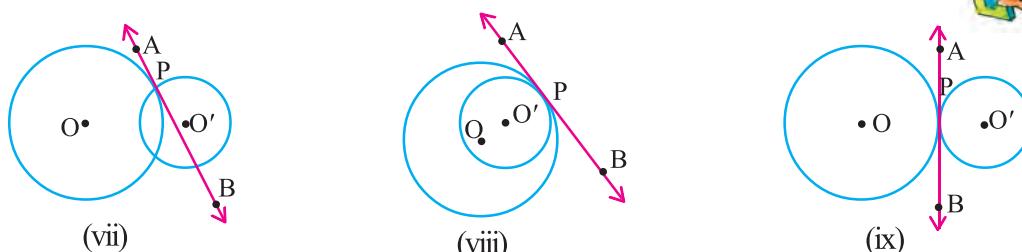
6 স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শক আঁকলে কী ধরনের স্পর্শক পাব ছবি এঁকে দেখি।

কিন্তু দেখছি, (v) ও (vi) নং চিত্রে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করেছে।

7 দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করেছে তা বুঝব কীভাবে?

(vii)

(viii)

(ix)

একই সমতলে O কেন্দ্রীয় এবং O′ কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্তের যদি একটি ছেদবিন্দু P হয় এবং P বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শকটি যদি O′ কেন্দ্রীয় বৃত্তকেও ঐ বিন্দুতে স্পর্শ করে তবে বলা হবে বৃত্তদুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। চিত্র (vii)-এ বৃত্তদুটি পরস্পরকে স্পর্শ করেনি। চিত্র (viii) ও চিত্র (ix)-এ বৃত্তদুটি পরস্পরকে স্পর্শ করেছে।

(viii) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে **অন্তঃস্থভাবে** বা **অন্তঃস্পর্শ (Internally Touch)** করেছে।

AB হলো বৃত্তদ্বয়ের **সাধারণ স্পর্শক**।

আবার (ix) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে **বহিঃস্থভাবে বা বহিঃস্পর্শ (Externally Touch)** করেছে। AB হলো বৃত্তদ্বয়ের ______ **[নিজে লিখি]**

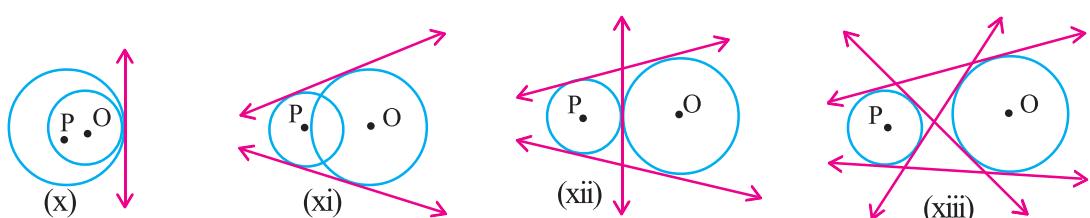
বুঝেছি, একটি সরলরেখা যদি দুটি বৃত্তের প্রত্যেকটিকেই স্পর্শ করে, তাহলে ওই সরলরেখাটিকে বৃত্তদুটির **সাধারণ স্পর্শক (Common Tangent)** বলা হয়।

8 আমি খাতায় নানাভাবে দুটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক আঁকি ও কী পাই দেখি।

(x)

(xi)

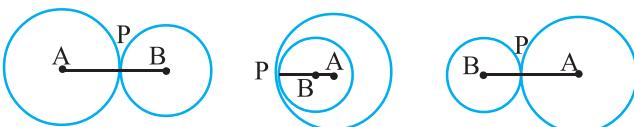
(xii)

(xiii)

দেখছি দুটি বৃত্তের বিভিন্ন অবস্থানে কখনো 1টি, কখনো 2টি, কখনো 3টি, আবার কখনো 4টি সাধারণ স্পর্শক এঁকেছি।

9 কিন্তু কখনো দেখছি সাধারণ স্পর্শকের একই পাশে বৃত্তদুটি আছে, আবার কখনো সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত পাশে বৃত্তদুটি আছে। এই ধরনের স্পর্শককে কী বলা হয়?

সাধারণ স্পর্শকের একই পাশে বৃত্তদুটি অবস্থিত হলে স্পর্শকটিকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** এবং সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত পাশে বৃত্তদুটি অবস্থিত হলে স্পর্শকটিকে **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** বলা হয়।

বুঝেছি, (x) ও (xi) ছবির স্পর্শকগুলি সরল সাধারণ স্পর্শক, কিন্তু (xii)-এ দুটি সরল সাধারণ স্পর্শক ও 1টি ☐ সাধারণ স্পর্শক আছে। আবার (xiii) নং ছবিতে ☐ টি সরল সাধারণ স্পর্শক ও ☐ টি তির্যক সাধারণ স্পর্শক আছে। **[নিজে ছবি দেখে লিখি]**

10 কিন্তু দুটি বৃত্ত যদি পরস্পরকে স্পর্শ করে তবে স্পর্শবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় কী অবস্থানে থাকবে ছবি এঁকে যাচাই করি।

ছবি থেকে দেখছি, বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু একই সরলরেখায় আছে।

আমি যে-কোনো দুটি বৃত্ত আঁকলাম যারা পরস্পরকে স্পর্শ করেছে এবং দেখছি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ। **[নিজে করি]**

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :42. যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে, তাহলে স্পর্শবিন্দুটি কেন্দ্র দুটির সংযোজক সরলরেখাংশের উপর অবস্থিত হবে।

প্রদত্ত : A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : A, P ও B সমরেখ।

অঙ্কন : A, P ও B, P যোগ করলাম।

প্রমাণ : A কেন্দ্রীয় ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

$\therefore$ P বিন্দুতে বৃত্তদুটির একটি সাধারণ স্পর্শক আছে।

ধরি, ST হলো সাধারণ স্পর্শক যা দুটি বৃত্তকেই P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

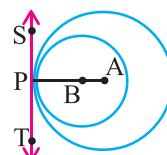
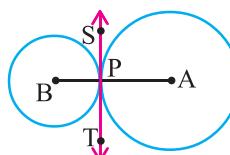
$\because$ A কেন্দ্রীয় বৃত্তের ST স্পর্শক এবং AP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

$\therefore AP \perp ST$

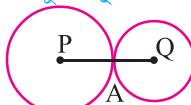
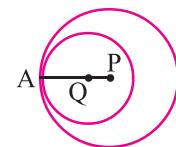
আবার, যেহেতু B কেন্দ্রীয় বৃত্তের ST স্পর্শক এবং BP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

$\therefore BP \perp ST$

$\therefore$ AP ও BP একই P বিন্দুতে ST সরলরেখার উপর লম্ব।

$\therefore$ AP ও BP একই সরলরেখায় অবস্থিত অর্থাৎ A, P ও B সমরেখ। **(প্রমাণিত)**

আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করলে একটির কেন্দ্র ও স্পর্শবিন্দুগামী সরলরেখা অপর বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যাবে। [নিজে করি]

যদি দুটি বৃত্ত বহিঃস্পর্শ করে, তবে কেন্দ্রদুটির দূরত্ব ব্যাসার্ধ দুটির দৈর্ঘ্যের ☐ [সমষ্টির / অন্তরের] সমান হবে।

পাশের চিত্রে, PQ = PA + AQ

আবার, যদি দুটি বৃত্ত অন্তঃস্পর্শ করে, তবে কেন্দ্রদুটির দূরত্ব ব্যাসার্ধ দুটির দৈর্ঘ্যের অন্তরফলের সমান হবে। পাশের চিত্রে, PQ = ☐ – ☐ [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 13. আমি O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যার AB একটি ব্যাস। AB ব্যাসের A ও B বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করেছি যা বৃত্তটির অপর একটি বিন্দু T-তে অঙ্কিত স্পর্শককে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি, $\angle POQ = 90^\circ$

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। A ও B বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা হয়েছে। বৃত্তের অপর একটি বিন্দু T-তে অঙ্কিত স্পর্শক A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : $\angle POQ = 90^\circ$

অঙ্কন : O, P; O, Q এবং O, T যুক্ত করি।

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে A ও T বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

∴ PO, ∠APT-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক [নিজে প্রমাণ করি]

$\therefore \angle TPO = \frac{1}{2}\angle APT$ ———— (i)

অনুরূপে, T ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদুটি Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

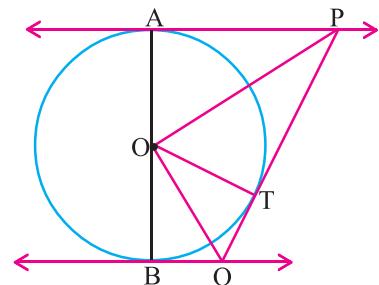
$\therefore \angle TQO = \frac{1}{2}\angle BQT$ ———— (ii)

আবার, AP || BQ এবং PQ ভেদক।

$\therefore \angle APT + \angle BQT = 180^\circ$

$\therefore \angle TPO + \angle TQO = \frac{1}{2}\angle APT + \frac{1}{2}\angle BQT$ [(i) ও (ii) থেকে পেলাম]

$= \frac{1}{2}(\angle APT + \angle BQT) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

∴ ΔPOQ-এর অপর কোণটি অর্থাৎ $\angle POQ = 90^\circ$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 14. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD হলে প্রমাণ করি যে, AB + CD = BC + DA

প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তে পরিলিখিত।
ধরি, AB, BC, CD ও DA বৃত্তটিকে যথাক্রমে P, Q, R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

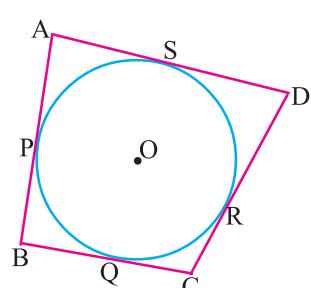
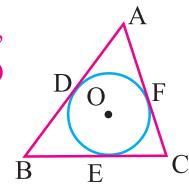
প্রমাণ করতে হবে : AB + CD = BC + DA

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে AS ও AP দুটি স্পর্শক

∴ AS = AP

অনুরূপে, BP = BQ, CQ = CR এবং DR = DS

AB + CD = AP + BP + CR + DR

= AS + BQ + CQ + DS = (AS + DS) + (BQ + CQ) = AD + BC [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 15. পাশের ছবিতে ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত AB, BC ও CA বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AD + BE + CF = AF + CE + BD = \Delta ABC$ -এর পরিসীমার অর্ধেক। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 16. P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে,

(i) A বিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ স্পর্শক RS সরলরেখাংশকে T বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(ii) $\angle RAS = 1$ সমকোণ

(iii) যদি PT ও QT, AR ও AS-কে যথাক্রমে C ও B বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে ABTC একটি আয়তাকার চিত্র হবে।

প্রদত্ত : P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক P ও Q কেন্দ্রীয় বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করে। A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করে। PT, AR-কে C বিন্দুতে এবং QT, AS-কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : (i) AT, RS-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে

(ii) $\angle RAS = 1$ সমকোণ

(iii) ABTC একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রমাণ :
A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ T বিন্দু থেকে P-কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি স্পর্শক TR ও TA

$\therefore TR = TA$

অনুরূপে, $TS = TA \quad \therefore TR = TS$

$\therefore$ AT, RS-কে T বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। [(i) প্রমাণিত]

আবার ΔATR-এর $TR = TA \quad \therefore \angle TAR = \angle TRA$

অনুরূপভাবে, $\angle TAS = \angle TSA$

$\therefore \angle RAS = \angle TAR + \angle TAS = 90^\circ$

[$\because \angle TRA + \angle TAR + \angle TAS + \angle TSA = 180^\circ$

$\therefore 2(\angle TAR + \angle TAS) = 180^\circ$; সুতরাং, $\angle TAR + \angle TAS = 90^\circ$] [(ii) নং প্রমাণিত]

আবার, PT, $\angle RTA$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং QT, $\angle ATS$-এর সমদ্বিখণ্ডক

$\therefore PT \perp TQ$ অর্থাৎ, $\angle PTQ = 1$ সমকোণ। অনুরূপে, $QT \perp SA$

$PT \perp RA$ এবং $QT \perp SA$,

$\therefore \angle ACT = \angle ABT = 1$ সমকোণ

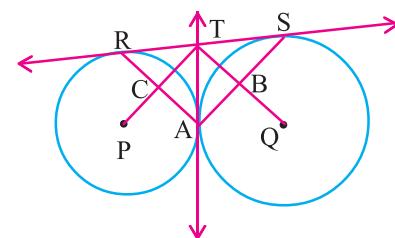
ABTC চতুর্ভুজের, $\angle ACT = \angle ABT = 90^\circ$

এবং $\angle CAB = 90^\circ \quad \therefore \angle CTB = 90^\circ$

[কারণ ΔTRC ও ΔTAC -এর মধ্যে, $TR = TA$, $\angle RTC = \angle ATC$ এবং TC উহাদের সাধারণ বাহু $\therefore \Delta TRC \cong \Delta TAC$ (S-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে) সুতরাং, $\angle TCR = \angle TCA \therefore PT \perp RA$]

$\therefore$ ABTC একটি সামান্তরিক ($\because$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ সমান)

আবার, ABTC সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ।

$\therefore$ ABTC একটি আয়তাকার চিত্র, [(iii) প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 17. সুমিতা দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। যদি PQ ও RS দুটি বৃত্তের ব্যাস হয় যারা পরস্পর সমান্তরাল, তবে প্রমাণ করি যে, P, O এবং S বিন্দু তিনটি সমরেখ।

প্রদত্ত : দুটি বৃত্ত পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির ব্যাস PQ ও RS সমান্তরাল।

প্রমাণ করতে হবে : P, O, S বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : ধরি বৃত্ত দুটির কেন্দ্র A ও B ; O, A;O, B; O, P; O,Q; O, R; O, S যুক্তি করি।

প্রমাণ : বৃত্তদুটির কেন্দ্র A ও B.

O বিন্দুতে বৃত্তদুটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে।

$\therefore$ A, O ও B একই সরলরেখায় অবস্থিত।

ΔAOP-এর AP = AO, $\therefore \angle APO = \angle AOP$

আবার $\angle PAO + \angle APO + \angle AOP = 180^\circ$

$\therefore 2\angle AOP = 180^\circ - \angle PAO$

অনুরূপভাবে, ΔBOR থেকে পাই $2\angle ROB = 180^\circ - \angle RBO$

$\therefore 2\angle AOP + 2\angle ROB = 360^\circ - (\angle PAO + \angle RBO)$

$= 360^\circ - 180^\circ$ [$\because$ PQ || RS এবং AB ভেদক]

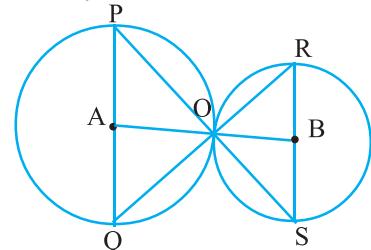
$= 180^\circ$

$\therefore \angle AOP + \angle ROB = 90^\circ$

$\therefore \angle POR = 180^\circ - (\angle AOP + \angle ROB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\angle POR + \angle ROS = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ($\because \angle ROS$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, সুতরাং $\angle ROS = 90^\circ$)

$\therefore \angle POS = 180^\circ$

$\therefore$ P, O এবং S বিন্দু তিনটি সমরেখ। **[প্রমাণিত]**

কষে দেখি 15.2

1. 16 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 17 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
2. একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত P ও Q বিন্দু দুটিতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি A বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle PAQ = 60^\circ$ হলে $\angle APQ$-এর মান নির্ণয় করি।
3. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক AP ও AQ বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করে। PR একটি ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে, OA || RQ
4. প্রমাণ করি যে, একটি বৃত্তের পরিলিখিত কোনো চতুর্ভুজের যে-কোনো দুটি বিপরীত বাহুর দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ সম্মুখ কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক।
5. প্রমাণ করি যে, বৃত্তের পরিলিখিত সামান্তরিক মাত্রই রম্বস।
6. A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর O একটি বিন্দু এবং OD ও OE যথাক্রমে A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। $\angle COD = 56^\circ$, $\angle COE = 40^\circ$, $\angle ACD = x^\circ$ এবং $\angle BCE = y^\circ$ হলে প্রমাণ করি যে OD = OC = OE এবং $x - y = 8$

7. A ও B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি নির্দিষ্ট বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করেছে। অপর একটি বৃত্ত, বৃহত্তর বৃত্তটিকে X বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে Y বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। O যদি ওই বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ করি যে, AO + BO ধ্রুবক হবে।
8. A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। O বিন্দু দিয়ে একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, AP || BQ.
9. তিনটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, ওই বৃত্ত তিনটির কেন্দ্রগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।
10. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু A থেকে অঙ্কিত AB ও AC দুটি স্পর্শক বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে। উপচাপ BC-এর উপর অবস্থিত X বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AB ও AC -কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, ΔADE-এর পরিসীমা = 2 AB.

11. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ A বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক বৃত্তকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। OB = 5 সেমি., AO = 13 সেমি. হলে, AB-এর দৈর্ঘ্য
(a) 12 সেমি. (b) 13 সেমি. (c) 6.5 সেমি. (d) 6 সেমি.

(ii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। AB বৃত্ত দুটির একটি সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুটিকে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করে। $\angle$ACB-এর পরিমাপ
(a) 60° (b) 45° (c) 30° (d) 90°

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি.। O বিন্দু থেকে 13 সেমি. দূরত্বে P একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে বৃত্তের দুটি স্পর্শকের দৈর্ঘ্য PQ এবং PR; PQOR চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল
(a) 60 বর্গ সেমি. (b) 30 বর্গ সেমি. (c) 120 বর্গ সেমি. (d) 150 বর্গ সেমি.

(iv) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. ও 3 সেমি.। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। বৃত্তদুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব
(a) 2 সেমি. (b) 2.5 সেমি. (c) 1.5 সেমি. (d) 8 সেমি.

(v) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি. ও 2 সেমি.। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করে। বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব
(a) 5.5 সেমি. (b) 1 সেমি. (c) 1.5 সেমি. (d) কোনোটিই নয়

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি বৃত্তের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু P ; বৃত্তে অঙ্কিত কোনো স্পর্শক P বিন্দুগামী নয়।
(ii) একটি বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল দুইয়ের অধিক স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি সরলরেখা বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করলে সরলরেখাটিকে বৃত্তের ________ বলে।
(ii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ বা স্পর্শ না করলে বৃত্তদুটির সর্বাধিক সংখ্যায় ________ টি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
(iii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। A বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক হলো ________ সাধারণ স্পর্শক (সরল / তির্যক)।

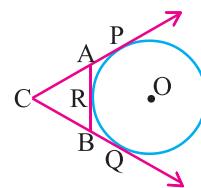
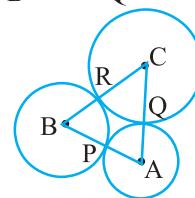
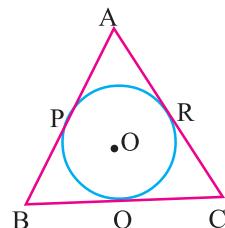
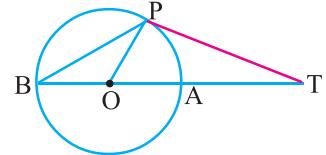
12. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) পাশের চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র O এবং BOA বৃত্তের ব্যাস। বৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বর্ধিত BA-কে T বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle PBO = 30^{\circ}$ হলে, $\angle PTA$-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে পরিলিখিত এবং বৃত্তকে P, Q, R বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি AP = 4 সেমি., BP = 6 সেমি., AC = 12 সেমি. এবং BC = x সেমি. হয়। তাহলে x-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) পাশের চিত্রে A, B, C কেন্দ্রবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। যদি AB = 5 সেমি., BC = 7 সেমি. এবং CA = 6 সেমি. হয়, তাহলে A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iv) পাশের চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে বহিঃস্থ বিন্দু C থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তের অপর একটি বিন্দু R-তে অঙ্কিত স্পর্শক CP ও CQ-কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি, CP = 11 সেমি. এবং BC = 7 সেমি. হয়, তাহলে BR-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(v) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 8 সেমি. ও 3 সেমি. এবং তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 13 সেমি.। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

16 লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু

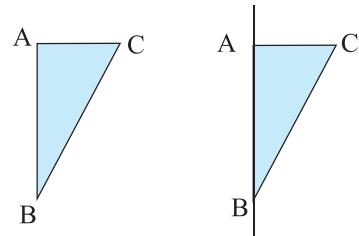
RIGHT CIRCULAR CONE

গত মাসে আমরা অর্ধবৃত্তাকার পিচবোর্ডে একটি সরু কাঠি আটকে অনেকগুলি হাতপাখা তৈরি করেছি।

আবার দেখেছি এই হাতপাখাগুলি তার কাঠিটিকে অক্ষ করে জোরে ঘোরালে গোলক আকারের ঘনবস্তু পাই।

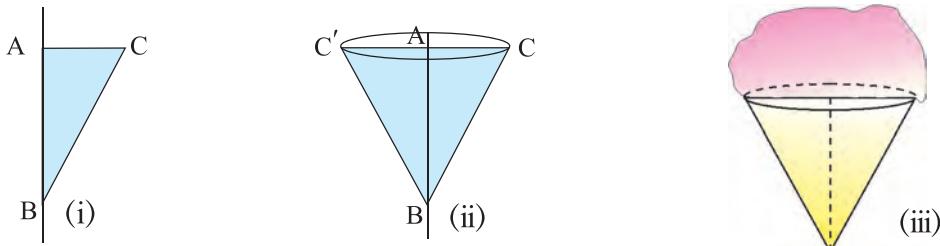
1 কিন্তু একইভাবে কোনো সমকোণী ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডকে ত্রিভুজটির লম্ব বা ভূমির দিকে কাঠির সঙ্গে আটকে কাঠির সাপেক্ষে ঘোরালে কী পাব দেখি।

আমার বন্ধু আসলাম একটি রঙিন আয়তক্ষেত্রাকার পিচবোর্ড থেকে পাশের চিত্রের মতো একটি সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC কেটে নিল, যার $\angle A$ সমকোণ।

আমি এই ABC সমকোণী ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহু AB -এর সঙ্গে খুব সরু কাঠি আটকে পাশের চিত্রের মতো পেলাম।

2 এবার AB কাঠিটিকে অক্ষ করে অক্ষের চারপাশে ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডটি খুব জোরে ঘুরিয়ে কী পাই দেখি।

(i)

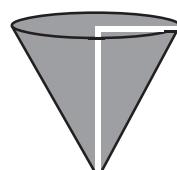
(ii)

(iii)

ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুকে অক্ষ করে অক্ষের চারপাশে ঘোরানোর ফলে দেখছি আইসক্রিমের কোনের মতো আকারের একটি ঘনবস্তুর আকার তৈরি হয়েছে।

3 এইরকম আকারের ঘনবস্তুকে কী বলা হয়?

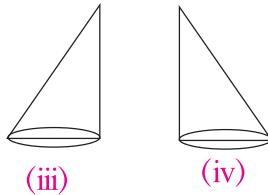
এইরকম আকারের ঘনবস্তুকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু বলা হয়।

4 ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুর সাপেক্ষে ঘোরানোয় AC বাহু দ্বারা একটি বৃত্ত গঠিত হয়েছে একে কী বলা হয়?

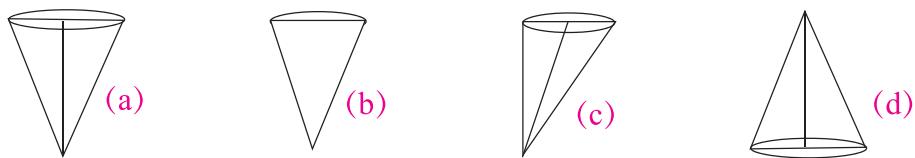
(ii) নং চিত্রের AC বাহু দ্বারা গঠিত বৃত্তকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমি বলা হয়। শঙ্কুর বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধ AC এবং বৃত্তাকার ভূমির কেন্দ্র A

5 কিন্তু (ii) নং চিত্রের B বিন্দুকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর কী বলা হয়?

(ii) নং চিত্রের B বিন্দু লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু [apex]। আবার বৃত্তাকার ভূমির উপর লম্ব AB-কে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা [Height] এবং BC-কে তির্যক উচ্চতা [Slant height] বলা হয়।

একটি মুখবন্ধ শঙ্কুর ☐ টি তল। একটি সমতল এবং অন্যটি ☐ [বক্রতল/সমতল] **[নিজে লিখি]**

6 আমি আমার বাড়ির ব্যবহার করা 4টি ঘনবস্তু লিখি যাদের আকার লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির মতো।
আমার বোন কাগজ দিয়ে পাশের ছবির মতো দুটি শঙ্কু তৈরি করল।

7 (iii) ও (iv) নং ছবির শঙ্কুগুলি কি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু?

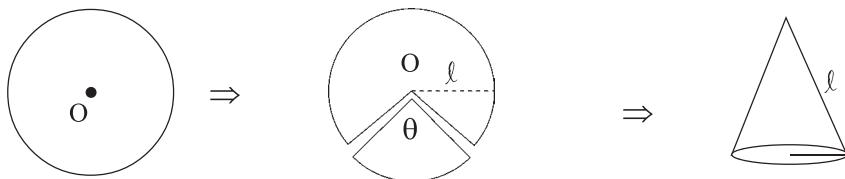
(iii) ও (iv) নং চিত্রের শঙ্কুগুলি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু নয়। কারণ শঙ্কুগুলির শীর্ষবিন্দু ও তাদের বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখাংশ তাদের ভূমির উপর লম্বভাবে অবস্থিত নহে।

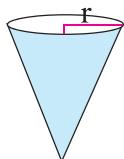
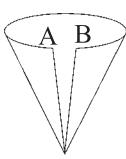
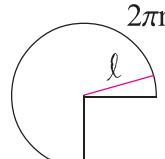
8 নীচের শঙ্কুর চিত্রগুলি দেখি এবং এদের মধ্যে কোনগুলি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু বুঝে লিখি :

তবে এখানে 'শঙ্কু' বলতে আমরা 'লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকেই বুঝব'।

আমি একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরির চেষ্টা করি। কিন্তু কতটা পরিমাণ কাগজ লাগবে কীভাবে পাব?

লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মাধ্যমে পাব।

হাতেকলমে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করি ও তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

1. একটি কাঠের বোর্ডে একটি সাদা আর্টপেপার আটকে দিলাম।
2. এবার ওই আর্টপেপারে 'ℓ' একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম।
3. ওই বৃত্তাকার ক্ষেত্র থেকে যে-কোনো একটি বৃত্তকলা কেটে নিলাম।
4. এবার ওই কেটে নেওয়া বৃত্তকলার দুই প্রান্তের ব্যাসার্ধ দুটি আঠা দিয়ে আটকে লম্ব বৃত্তাকার ফাঁপা শঙ্কু পেলাম।

হাতেকলমে ওই শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

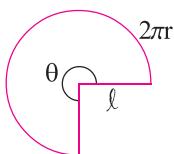
(1) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু নিয়ে নীচের ছবির মতো তির্যক উচ্চতা বরাবর কেটে খুলে দিলাম।
ধরি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা = ℓ এবং ব্যাসার্ধ = r

∴ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু খুলে একটি বৃত্তকলা পেলাম।
শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা = বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = ℓ
শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r

∴ শঙ্কুর ভূমির পরিধি = $2\pi r$ = বৃত্তকলার দৈর্ঘ্য

∴ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল

= বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{\text{বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} \times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{2\pi r}{2\pi\ell} \times \pi\ell^2 = \pi r\ell$

[বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi\ell^2$, যেখানে বৃত্তকলা বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কেন্দ্রে θ° কোণ উৎপন্ন করে।

আবার, বৃত্তাকার ক্ষেত্রে চাপের দৈর্ঘ্য ও চাপ দ্বারা বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সমানুপাতী, $\therefore \dfrac{\theta}{360} = \dfrac{2\pi r}{2\pi\ell}$]

∴ হাতেকলমে পেলাম, **লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r\ell$**
[যেখানে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r এবং শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা = ℓ]

মুখ খোলা লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করতে $\pi r\ell$ বর্গ একক কাগজ লাগবে,যেখানে r = ☐ এবং ℓ = ☐ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 1. আমি যে মুখখোলা লম্ব বৃত্তকার শঙ্কু তৈরি করেছি তার ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 12 সেমি. হলে, ওই শঙ্কু তৈরি করতে কী পরিমাণ কাগজ লেগেছে হিসাব করে লিখি।

শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{14}{2}$ সেমি. = 7 সেমি.

∴ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল বা বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{22}{7} \times 7 \times 12$ বর্গ সেমি. = 264 বর্গ সেমি.

প্রয়োগ :2. যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ 1.5 মিটার এবং তির্যক উচ্চতা 2 মিটার তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :3. কোনো শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল $78\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 13সেমি. হলে,শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

শর্তানুসারে, $\dfrac{22}{7} r^2 = 78\dfrac{4}{7}$ $\quad \therefore r =$ ☐

∴ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = ☐ বর্গ সেমি. [নিজে করি]

প্রয়োগ : 4. কোনো শঙ্কুর ভূমির পরিধি $\frac{660}{7}$ সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি. হলে, শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

(9) কিন্তু যদি একটি মুখবন্ধ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করি তবে কতটা পরিমাণ আর্টপেপার লাগবে হিসাব করি।

ধরি, লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r এবং তির্যক উচ্চতা = ℓ

∴ আর্টপেপার লাগবে = শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল + ভূমির বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল

$= \pi r\ell + \pi r^2$

$= \pi r(\ell + r)$

লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r(r+\ell)$

প্রয়োগ : 5. যে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 1.5 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 2.5 সেমি., তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\frac{22}{7} \times 1.5\,(1.5 + 2.5)$ বর্গ সেমি.

$= \frac{22}{7} \times \frac{15}{10} \times 4$ বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 6. যে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 20 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি., তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

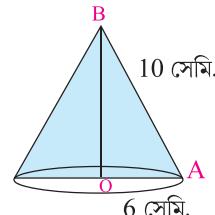
প্রয়োগ : 7. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করেছি যার ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 10 সেমি.। ওই শঙ্কুটির উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি।

B
10 সেমি.
A
O
6 সেমি.

লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{12}{2}$ সেমি. = 6 সেমি.

চিত্রে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ OA, তির্যক উচ্চতা AB এবং উচ্চতা OB

OA = 6 সেমি., AB = 10 সেমি.   শঙ্কুর উচ্চতা = OB

∴ সমকোণী ত্রিভুজ OAB-তে, $AB^2 = OB^2 + OA^2$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম)

বা, $OB^2 = AB^2 - OA^2$

বা, $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2}$ [∵ উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$= \sqrt{(\text{তির্যক উচ্চতা})^2 - (\text{ব্যাসার্ধ})^2}$

$= \sqrt{(10)^2 - 6^2}$ সেমি.

$= \sqrt{64}$ সেমি.

= 8 সেমি.

∴ শঙ্কুর উচ্চতা 8 সেমি.

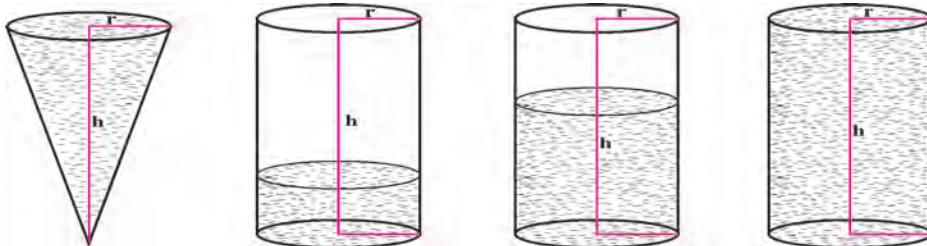
∴ শঙ্কুর উচ্চতা = $\sqrt{(\text{তির্যক উচ্চতা})^2 - (\text{ব্যাসার্ধ})^2}$

প্রয়োগ : 8. যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর পরিধি $\frac{660}{7}$ সেমি. এবং উচ্চতা 20 সেমি., তার তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

আমি আমাদের স্কুলের বিজ্ঞানের ল্যাবরেটরিতে একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির কাচের ফ্লাস্ক দেখেছি। ওই ফ্লাস্কে জল ভরা থাকে। কিন্তু ওই লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কে কতটা পরিমাণ জল ধরবে কীভাবে পাব দেখি। হাতেকলমে পরিমাপের চেষ্টা করি।

হাতেকলমে

(1) একই দৈর্ঘ্যের ভূমির ব্যাস ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ ও একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির খালি পাত্র নিলাম।

(2) এবার শঙ্কু আকৃতির পাত্রটি সম্পূর্ণভাবে জলপূর্ণ করে চোঙাকৃতি পাত্রে ঢাললাম।

প্রথমবারে $\frac{1}{3}$ অংশ ভর্তি

দ্বিতীয়বারে $\frac{2}{3}$ অংশ ভর্তি

তৃতীয়বারে সম্পূর্ণ ভর্তি

দেখছি, শঙ্কু আকৃতির পাত্রটি **তিনবার** জলপূর্ণ করে জল ঢাললে চোঙাকৃতি পাত্রটি সম্পূর্ণভাবে জলপূর্ণ হয়।

সুতরাং চোঙের আয়তন = 3 × শঙ্কুর আয়তন

$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}$ × চোঙের আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ [যেখানে r = ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং h = ফ্লাস্কের উচ্চতা]

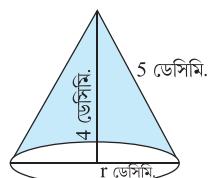
$\therefore$ স্কুলের ল্যাবরেটরির লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কে জল আছে $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

প্রয়োগ : 9. স্কুলের বিজ্ঞানের ল্যাবরেটরির শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কের উচ্চতা 4 ডেসিমি. এবং তির্যক উচ্চতা 5 ডেসিমি. হলে, ওই ফ্লাস্কে কী পরিমাণ জল ধরবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r ডেসিমি.

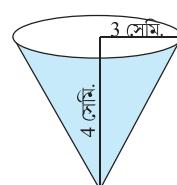
সুতরাং $(5)^2 = r^2 + (4)^2$

বা, $r^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \therefore r = \pm 3$

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore r \neq -3 \quad \therefore r = 3$

$\therefore$ ওই ফ্লাস্কে জল ধরবে $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 4$ ঘন ডেসিমি.= ☐ ঘন ডেসিমি. **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 10. যদি কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির পরিধি 2.2 মিটার এবং উচ্চতা 45 ডেসিমি. হয়, তবে ওই লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 11. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 4সেমি. ও 3সেমি.। সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির দীর্ঘ বাহুটিকে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করলে যে ঘনবস্তু তৈরি হয়, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন হিসাব করে লিখি।

উত্তর সংকেত : যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি হবে তার উচ্চতা 4 সেমি. এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3 সেমি.।

প্রয়োগ : 12. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 7 সেমি. এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 147.84 বর্গ সেমি.। শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

ধরি, শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r সেমি.

$\therefore$ শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\frac{22}{7} r(r+7)$ বর্গ সেমি.

শর্তানুসারে, $\frac{22}{7} r(r+7) = 147.84$

বা, $r(r+7) = \frac{14784}{100} \times \frac{7}{22} = \frac{1176}{25}$

বা, $25r^2 + 175r - 1176 = 0$

বা, $25r^2 + 280r - 105r - 1176 = 0$

বা, $5r(5r+56) - 21(5r+56) = 0$

বা, $(5r+56)(5r-21) = 0$

হয়, $5r - 21 = 0$ বা, $5r = 21$ বা, $r = \frac{21}{5}$

$\therefore r = 4.2$

অথবা, $5r + 56 = 0$ বা, $5r = -56$

$\therefore r = \frac{-56}{5}$

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore r \neq \frac{-56}{5}$

সুতরাং $r = 4.2$

$\therefore$ শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 4.2 সেমি.।

প্রয়োগ :13. যদি দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত 1 : 3 এবং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 1 হয়, তবে হিসাব করে দেখাই যে শঙ্কুদ্বয়ের আয়তনের অনুপাত 3 : 1 হবে।

ধরি, প্রথম শঙ্কুর উচ্চতা x একক এবং দ্বিতীয় শঙ্কুর উচ্চতা 3x একক, যেখানে $x>0$;

আবার, প্রথম শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3y একক এবং দ্বিতীয় শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য y একক, যেখানে $y>0$

সুতরাং, $\frac{\text{প্রথম শঙ্কুর আয়তন}}{\text{দ্বিতীয় শঙ্কুর আয়তন}} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times (3y)^2 \times x}{\frac{1}{3} \times \pi \times (y)^2 \times 3x} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$ $\therefore$ শঙ্কু দুটির আয়তনের অনুপাত 3 : 1

প্রয়োগ :14. যদি দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত 2 : 3 এবং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5 হয়, তবে শঙ্কুদ্বয়ের আয়তনের অনুপাত হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ :15. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবুর ভূমিতলের ক্ষেত্রফল 13.86 বর্গ মিটার। তাঁবুটি তৈরি করতে 5775 টাকা মূল্যের একটি ত্রিপল লাগে এবং এক বর্গমিটার ত্রিপলের মূল্য 150 টাকা হলে, তাঁবুটির উচ্চতা নির্ণয় করি। তাঁবুটিতে কত লিটার বায়ু আছে হিসাব করে লিখি।

ধরি, তাঁবুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার, উচ্চতা h মিটার এবং তির্যক উচ্চতা ℓ মিটার।

ভূমিতলের ক্ষেত্রফল = 13.86 বর্গ মিটার।

শর্তানুসারে, $\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$ $\therefore r = \square$ [নিজে হিসাব করি] $\therefore$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2.1 মিটার।

প্রতি বর্গ মিটার 150 টাকা হিসাবে 5775 টাকায় ত্রিপলের পরিমাণ= $\frac{5775}{250}$ বর্গ মিটার = 23.1 বর্গ মিটার

$\therefore$ পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r \ell$ বর্গ মিটার = 23.1 বর্গ মিটার

বা, $\frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \ell = 23.1$ $\therefore \ell = \frac{7}{2}$ [নিজে হিসাব করি]

$\therefore$ তির্যক উচ্চতা = $\frac{7}{2}$ মিটার = 3.5 মিটার

$\therefore h = +\sqrt{\ell^2 - r^2}$ [$\because$ উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$= \sqrt{(3.5)^2 - (2.1)^2}$ মি.= $\sqrt{(3.5+2.1) \times (3.5-2.1)}$ মি. = $\square$ [নিজে লিখি] $\therefore$ উচ্চতা = 2.8 মিটার

$\therefore$ তাঁবুটিতে বায়ু ধরে = $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8$ ঘন মি.= $\square$ ঘন মি. = 12936 ঘন ডেসিমি.

= 12936 লিটার

কষে দেখি 16

1. আমি একটি মুখবন্ধ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করেছি যার ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 15 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 24 সেমি.। ওই শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
2. শঙ্কুর আয়তন নির্ণয় করি যখন, (i) ভূমির ক্ষেত্রফল 1.54 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 2.4 মিটার,
(ii) ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 মিটার এবং তির্যক উচ্চতা 17.5 মিটার।
3. আমিনা একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করেছে যার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 15 সেমি. ও 20 সেমি.। 15 সেমি. দীর্ঘ বাহুটিকে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করলে যে ঘনবস্তু তৈরি হয়, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় করি।
4. কোনো শঙ্কুর উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা যথাক্রমে 6 সেমি. ও 10 সেমি. হলে, শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করি।
5. কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন (100π) ঘন সেমি. এবং উচ্চতা 12 সেমি. হলে, শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
6. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবু তৈরি করতে 77 বর্গ মিটার ত্রিপল লেগেছে। তাঁবুটির তির্যক উচ্চতা যদি 7 মিটার হয়, তবে তাঁবুটির ভূমিতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
7. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাস 21 মিটার এবং উচ্চতা 14 মিটার। প্রতি বর্গ মিটার 1.50 টাকা হিসাবে পার্শ্বতল রং করতে কত টাকা খরচ পড়বে হিসাব করি।
8. নিরেট শঙ্কু আকৃতির একটি কাঠের খেলনার ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি.। খেলনাটির বক্রতলে প্রতি বর্গ সেমি. 2.10 টাকা হিসাবে পালিশ করতে 429 টাকা খরচ পড়ে। খেলনাটির উচ্চতা কত হিসাব করি। খেলনাটি তৈরি করতে কত ঘন সেমি. কাঠ লেগেছে নির্ণয় করি।
9. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি লোহার পাতের বয়া তৈরি করতে $75\frac{3}{7}$ বর্গ মিটার লোহার পাত লেগেছে। বয়াটির তির্যক উচ্চতা যদি 5 মিটার হয়, তবে বয়াটিতে কত বায়ু আছে এবং বয়াটির উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি।

   ওই বয়াটির চারপাশ রং করতে প্রতি বর্গ মিটার 2.80 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে নির্ণয় করি। [লোহার পাতের বেধ হিসাবের মধ্যে ধরতে হবে না]
10. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবুতে 11জন লোক থাকতে পারে। প্রত্যেক লোকের জন্য ভূমিতে 4 বর্গ মিটার জায়গা লাগে এবং 20 ঘন মিটার বাতাসের প্রয়োজন। ঠিক এই 11 জন লোকের জন্য নির্মিত তাঁবুর উচ্চতা নির্ণয় করি।
11. শোলা দিয়ে তৈরি একটি শঙ্কু আকৃতির মাথার টোপরের ভূমির বাইরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 সেমি.। টোপরটির উপরিভাগ রাংতা দিয়ে মুড়তে প্রতি বর্গ সেমি. 10 পয়সা হিসাবে 57.75 টাকা খরচ পড়ে। টোপরটির উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
12. গমের একটি স্তূপ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকারে আছে, যার ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 9 মিটার এবং উচ্চতা 3.5 মিটার। মোট গমের আয়তন নির্ণয় করি। গমের ওই স্তূপ ঢাকতে কমপক্ষে কত বর্গ মিটার প্লাসটিকের চাদর প্রয়োজন হবে হিসাব করে দেখি। [ধরি, $\pi = 3.14$, $\sqrt{130} = 11.4$]
13. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

    (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

    (i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 15 সেমি. এবং ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 16 সেমি. হলে, শঙ্কুটির পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল

    (a) 60π বর্গ সেমি. (b) 68π বর্গ সেমি. (c) 120π বর্গ সেমি. (d) 130π বর্গ সেমি.

(ii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত 1:4 এবং তাদের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 4:5 হলে, তাদের উচ্চতার অনুপাত

(a) 1:5 (b) 5:4 (c) 25:16 (d) 25:64

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য একই রেখে উচ্চতা দ্বিগুণ করলে,শঙ্কুটির আয়তন বৃদ্ধি পায়

(a) 100% (b) 200% (c) 300% (d) 400%

(iv) একটি শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা প্রত্যেকটি দ্বিগুণ হলে, শঙ্কুটির আয়তন হয় পূর্বের শঙ্কুর আয়তনের

(a) 3গুণ (b) 4 গুণ (c) 6 গুণ (d) 8 গুণ

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{r}{2}$ একক এবং তির্যক উচ্চতা 2ℓ একক হলে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

(a) $2\pi r(\ell+r)$ বর্গ একক (b) $\pi r(\ell+\frac{r}{4})$ বর্গ একক (c) $\pi r(\ell+r)$ বর্গ একক (d) $2\pi r\ell$ বর্গ একক

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অর্ধেক এবং উচ্চতা দ্বিগুণ করা হলে শঙ্কুটির আয়তন একই থাকে।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা, ব্যাসার্ধ এবং তির্যক উচ্চতা সর্বদা একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি:

(i) ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজ। AB বাহুকে অক্ষ করে ত্রিভুজটির একবার পূর্ণ আবর্তনের জন্য যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু উৎপন্ন হয় তার ব্যাসার্ধ ______।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন V ঘন একক এবং ভূমিতলের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক হলে, উচ্চতা ______।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান এবং তাদের উচ্চতা সমান। তাদের আয়তনের অনুপাত ______।

14. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 সেমি. এবং আয়তন 100π ঘন সেমি.। শঙ্কুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল ভূমিতলের ক্ষেত্রফলের $\sqrt{5}$ গুণ। শঙ্কুটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন V ঘন একক, ভূমিতলের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক এবং উচ্চতা H একক হলে, $\frac{AH}{V}$ -এর মান কত তা লিখি।

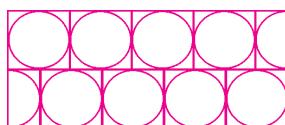
(iv) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন এবং পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান। শঙ্কুটির উচ্চতা এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে h একক এবং r একক হলে, $\frac{1}{h^2}+\frac{1}{r^2}$ -এর মান কত তা লিখি।

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3:4 এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত 2:3; চোঙ এবং শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

17 সম্পাদ্য : বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন

CONSTRUCTION OF TANGENT TO A CIRCLE

এবছরের গ্রীষ্মের ছুটিতে আমাদের গ্রামের ক্লাবঘর মেরামত করা হবে। পাড়ার সকল বাড়ি থেকে চাঁদা তোলা হয়েছে। প্রত্যেক পরিবার তাদের সাধ্যমতো চাঁদা দিয়েছে। ক্লাবঘরের সামনের বারান্দায় লোহার গ্রিল লাগানো হবে। তাই আমরা পাড়ার ছোটোরা সকলে মিলে গ্রিলের নকশা পছন্দ করব। লোহার দোকানে গিয়ে আমাদের গ্রিলের যে নকশাটি পছন্দ হলো, সেটি হলো—

বাড়ি ফিরে গিয়ে মায়া গ্রিলের নকশাটি তার খাতায় আঁকার চেষ্টা করল।

দেখছি, আমাদের পছন্দের গ্রিলের নকশায় অনেকগুলি বৃত্ত ও সরলরেখাংশ আছে। কিন্তু নকশায় বৃত্ত ও সরলরেখাংশগুলি কীভাবে আছে?

নকশায় বৃত্তগুলিকে কিছু সরলরেখাংশ স্পর্শ করে আছে। অর্থাৎ, কিছু সরলরেখাংশ বৃত্তের **স্পর্শক** হয়ে আছে।

একটি বৃত্তে কতগুলি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব? এঁকে দেখি।

বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে ☐ [1টি/2টি] স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। কিন্তু বৃত্তের বাহিরের কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে ☐ [1টি / 2টি] স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

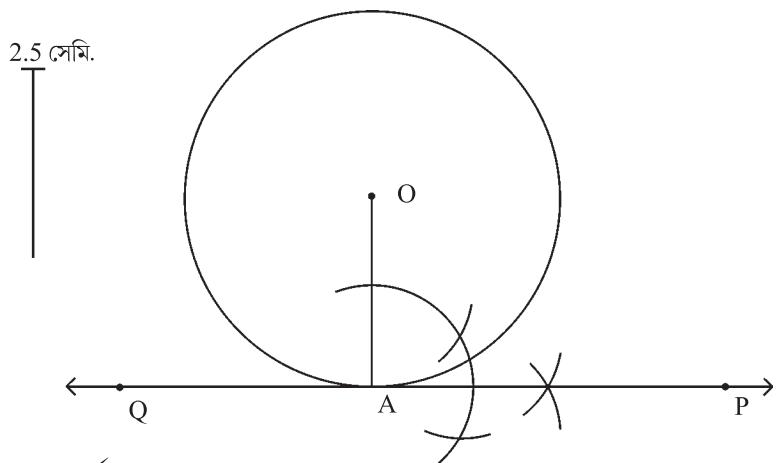
সম্পাদ্য : আমি 2.5সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো একটি বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।

2.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যার উপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দু A; A বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

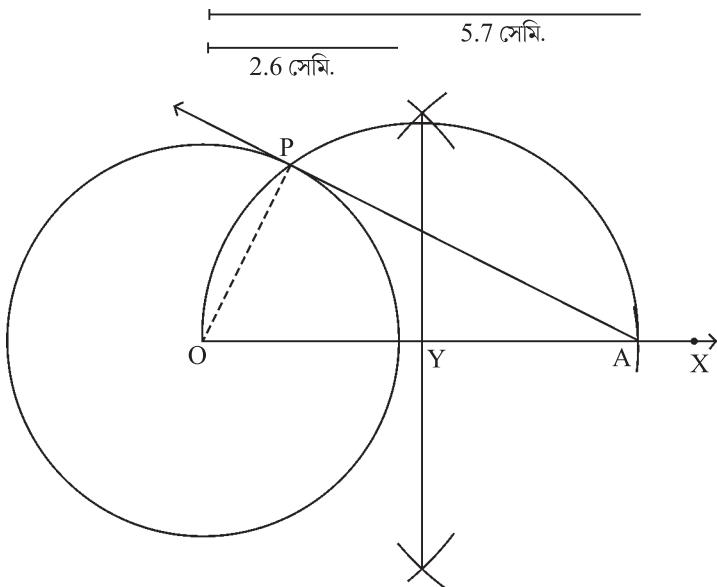
(i) O, A যুক্ত করলাম।

(ii) A বিন্দুতে OA-এর উপর পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে PQ লম্ব অঙ্কন করলাম।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ}$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক।

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ OA বৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং $\overleftrightarrow{PQ} \perp OA$,

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ}$, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক

[$\because$ বৃত্তের কোনো ব্যাসার্ধ যে বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে সেই বিন্দুতে ওই ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত লম্ব, ওই বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক]

সম্পাদ্য : 2.6সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 5.7সেমি. দূরে ওই বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তটিতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2.6সেমি.। যে-কোনো একটি রশ্মি OX থেকে 5.7সেমি. দৈর্ঘ্যের সমান করে OA সরলরেখাংশ কেটে নিই।

(ii) O, A যুক্ত করলাম।

(iii) OA সরলরেখাংশকে Y বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করলাম।

(iv) Y বিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং YO দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলাম যা O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করল।

(v) A, P যোগ করে বর্ধিত করলাম।

$\therefore$ AP হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে ওই বৃত্তের একটি স্পর্শক।

প্রমাণ : O, P যোগ করি।

$\angle OPA$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। সুতরাং $\angle OPA = 90^{o}$; O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OP ব্যাসার্ধ এবং $OP \perp PA$. সুতরাং $\overrightarrow{AP}$, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি স্পর্শক।

বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে বহিঃস্থ বিন্দু A- এর দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ হলে OA- এর মধ্যবিন্দু Y বিন্দুটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর অবস্থিত হয়।

আমি হাতেকলমে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করেছি যে, যে-কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব। নিজে অঙ্কনের চেষ্টা করি।

সম্পাদ্য : 3সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 7সেমি. দূরে বৃত্তটির বহিঃস্থ বিন্দু থেকে ওই বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করি।

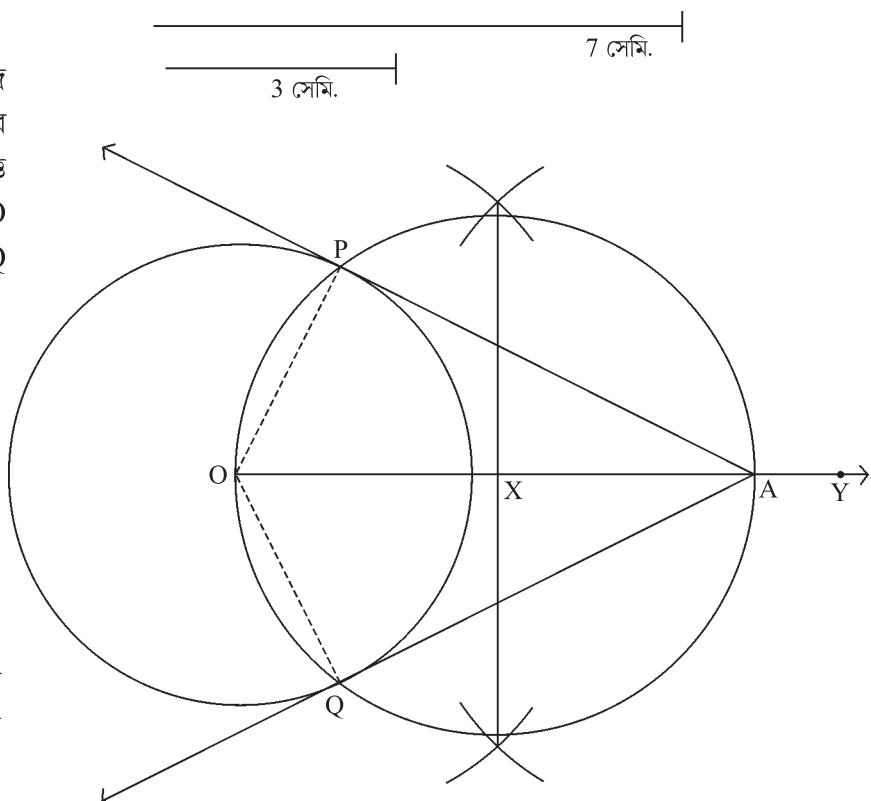
অঙ্কন প্রণালী :

(i) O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3সেমি. এবং কেন্দ্র O থেকে 7 সেমি. দূরে OY রশ্মি থেকে OA সরলরেখাংশ কেটে নিই।

(ii) OA সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করলাম। ধরি, OA সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু X.

(iii) X বিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং XO দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যা O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল।

(iv) A, P ও A, Q যোগ করে বর্ধিত করলাম।

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক।

প্রমাণ :

O, P যোগ করলাম। $\angle OPA$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle OPA = 90^{\circ}$

যেহেতু O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OP ব্যাসার্ধ এবং $OP \perp AP$, সুতরাং $\overrightarrow{AP}$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে ওই বৃত্তে অঙ্কিত একটি স্পর্শক।

অনুরূপে, $\overrightarrow{AQ}$, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের অপর একটি স্পর্শক।

সম্পাদ্য : আমি 2.5সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 10সেমি. দূরে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করি এবং স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য মেপে লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি 17

1. 3.2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।

2. 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট AB একটি সরলরেখাংশ অঙ্কন করে A বিন্দুকে কেন্দ্র করে AB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি এবং B বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।

3. 2.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। ওই বৃত্তের বাইরে এমন একটি বিন্দু নিই, কেন্দ্র থেকে যার দূরত্ব 6.5 সেমি.। ওই বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করি এবং স্কেলের সাহায্যে ওই স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

4. 2.8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 7.5 সেমি. দূরে একটি বিন্দু নিই। ওই বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করি।

5. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের PQ একটি জ্যা। P ও Q বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।

6. 8 সেমি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরলরেখাংশ XY অঙ্কন করে XY-কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। X ও Y বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি এবং এই স্পর্শক দুটির মধ্যে কী সম্পর্ক লিখি।

7. যে-কোনো একটি বৃত্ত অঙ্কন করে তার দুটি ব্যাস অঙ্কন করি যারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। ব্যাস দুটির চারটি প্রান্তবিন্দুতে বৃত্তের চারটি স্পর্শক অঙ্কন করি এবং এরফলে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হলো তা কী ধরনের চতুর্ভুজ বুঝে লিখি।

8. 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করে ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। ওই পরিবৃত্তের A, B ও C বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি।

9. 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করে ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। A বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি এবং স্পর্শকের উপর P এমন একটি বিন্দু নিই যাতে AP = 5সেমি. হয়। P বিন্দু থেকে বৃত্তের অপর স্পর্শকটি অঙ্কন করি এবং এই স্পর্শকটি বৃত্তকে কোন বিন্দুতে স্পর্শ করেছে তা লক্ষ করে লিখি।

10. AB একটি সরলরেখাংশের উপর O একটি বিন্দু এবং O বিন্দুতে AB-এর উপর PQ একটি লম্ব অঙ্কন করি। A এবং B বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে AO এবং BO দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্ত অঙ্কন করি এবং এই বৃত্তদুটির সাপেক্ষে PQ-কে কী বলা হয় লিখি। P বিন্দু থেকে বৃত্ত দুটির অপর স্পর্শক দুটি অঙ্কন করি।

11. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর P একটি বিন্দু। P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি এবং ওই স্পর্শক থেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান করে PQ অংশ কেটে নিই। Q বিন্দু থেকে বৃত্তের অপর স্পর্শক QR অঙ্কন করি এবং চাঁদার সাহায্যে $\angle$PQR পরিমাপ করে তার মান লিখি।

18 সদৃশতা
SIMILARITY

আমি এবছরে আমাদের জেলার হয়ে হকি খেলার সুযোগ পেয়েছি। তাই কিছু ফর্ম পূরণ করতে হবে এবং সেখানে আমার ছবি দরকার। আমি ও ভাই পাড়ার মিঠুদির সঙ্গে আমার এখনকার একটি ছবি নিয়ে পাড়ার প্রশান্তকাকুর Digital Store-এ গেলাম।

বললাম এই ছবি থেকে 3টি ছবি করে দিন।

কী সাইজের ছবি দরকার? স্ট্যাম্প সাইজ, পাসপোর্ট সাইজ না পোস্টকার্ড সাইজ?

সেটা কী রকম? একটু বুঝিয়ে বলুন।

স্ট্যাম্প সাইজ

পাসপোর্ট সাইজ

পোস্টকার্ড সাইজ

দেখছি, ছবিগুলি একই আকৃতির (Shape) কিন্তু বিভিন্ন আকারের (Size)।

1 এই ছবিগুলি কী সম্পর্কে আছে?

এই ছবিগুলি পরস্পর **সদৃশ (Similar)**।

2 আমার 5 বছর আগের অন্য একটি পাসপোর্ট সাইজ ছবি ও এখনকার পাসপোর্ট সাইজ ছবিদুটি কি পরস্পর সদৃশ হবে?

পাশের ছবিদুটি দেখি ।

ছবিদুটি পরস্পর **সদৃশ নয়**। কারণ ছবিদুটির আকার (Size) এক হলেও আকৃতি (Shape) আলাদা।

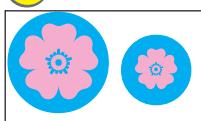
3 কিন্তু দুটি সর্বসম চিত্র কি সদৃশ হবে?

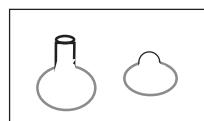
যেহেতু দুটি সর্বসম চিত্রে আকৃতি (Shape) ও আকার (Size) সমান, তাই দুটি সর্বসম চিত্র সর্বদা ______ **[সদৃশ / সদৃশ নয়]**।**[নিজে লিখি]**

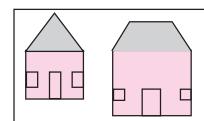
অর্থাৎ যদি একাধিক চিত্রের আকার আলাদা হলেও আকৃতি এক হয়, তবে চিত্রগুলি পরস্পর সদৃশ হবে। তাই সর্বসম চিত্র সর্বদা সদৃশ হবে কিন্তু সদৃশ চিত্র সর্বসম নাও হতে পারে।

আমি বাড়ি ফিরে জানলাম পাসপোর্ট সাইজের ছবি দরকার এবং সেইমতো দোকানে বলে দিলাম।

আমার ভাই বাড়ি ফিরে অনেকগুলি ছবি আঁকল এবং একইরকম ছবিগুলি আলাদা দলে ভাগ করে রাখল।

4 আমি প্রতি দলের ছবিগুলি সদৃশ কিনা দেখি।

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

দেখছি, (i), (ii) ও (iv) নং দলের ছবিগুলি পরস্পর ______। কিন্তু (iii) ও (v) নং দলের ছবিগুলি পরস্পর সদৃশ নয়।

5 আমি একাধিক বিভিন্ন আকারের বর্গক্ষেত্র আঁকি ও বর্গক্ষেত্রগুলি সদৃশ কিনা দেখি।

দেখছি, ABCD, A′B′C′D′ ও A″B″C″D″ বর্গক্ষেত্রগুলি পরস্পর সদৃশ।

আবার দেখছি, $\angle A = \angle A' = \angle A''$

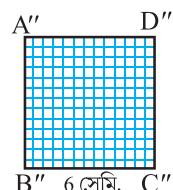
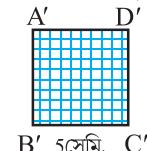
$\angle B = \angle B' = \angle B''$

$\angle C = \angle C' = \angle C''$

$\angle D = \angle D' = \angle D''$

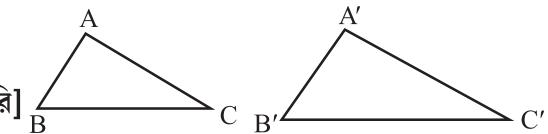
A D, B 3সেমি. C; A′ D′, B′ 5সেমি. C′; A″ D″, B″ 6 সেমি. C″

এবং $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'} = \dfrac{3}{5}$

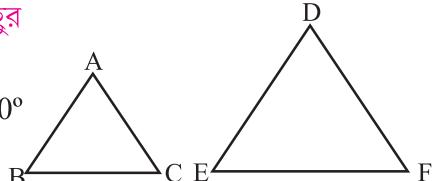
$\dfrac{AB}{A''B''} = \dfrac{BC}{B''C''} = \dfrac{CD}{C''D''} = \dfrac{DA}{D''A''} = \dfrac{3}{6}$

6 আমি দুটি ত্রিভুজ ABC ও A′B′C′ আঁকি যাদের

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$

ত্রিভুজ দুটির বাহু মেপে দেখছি,

$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$ **[নিজে এঁকে যাচাই করি]**

7 আমি দুটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকি যার একটির প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সেমি. ও অপর একটির প্রত্যেকটির বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি.।

দেখছি, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle E = 60^\circ$, $\angle C = \angle F = 60^\circ$

এবং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{3}{5}$; সুতরাং ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

8 কিন্তু ত্রিভুজ দুটি কি সর্বসম হবে?

দেখছি ত্রিভুজ দুটি সর্বসম নয়।

অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে সর্বদা সদৃশ। কিন্তু সদৃশ হলে সর্বসম নয়।

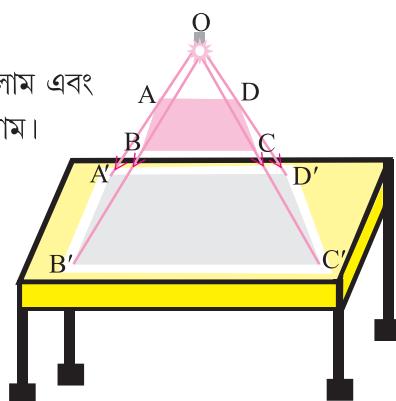
আরও দেখছি একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বদা সর্বসম নাও হতে পারে। অর্থাৎ কোণ-কোণ-কোণ (A-A-A) দ্বারা দুটি ত্রিভুজ সর্বদা সর্বসম নাও হতে পারে।

আমি দুটি বহুভুজাকার চিত্র কখন সদৃশ হবে হাতেকলমে যাচাই করি।

(1) ঘরের সিলিং-এর কাছের O বিন্দুতে একটি বাল্ব আটকে দিলাম এবং তার ঠিক নীচে একটি টেবিল রেখে তাতে সাদা আর্টপেপার রাখলাম।

(2) এবার যে-কোনো একটি বহুভুজাকার পিচ্‌বোর্ড (ধরি) (ABCD) চতুর্ভুজটি টেবিলের সমান্তরালে বাল্‌বের নীচে রাখলাম।

(3) এবার বাল্‌বের আলো জ্বাললে ABCD চতুর্ভুজের ছায়া A′B′C′D′ টেবিলের আর্টপেপারে পড়ল এবং পেন্‌সিলের সাহায্যে যোগ করে A′B′C′D′ চতুর্ভুজ পেলাম যা ABCD চতুর্ভুজের সদৃশ। এটা সম্ভব হলো কারণ আলো সরলরেখায় চলে।

OA রশ্মির উপর A′, OB রশ্মির উপর B′, OC রশ্মির উপর C′, OD রশ্মির উপর D′ বিন্দু আছে।

ABCD ও A′B′C′D′ চতুর্ভুজের কোণগুলি ও বাহুগুলি মেপে দেখছি,

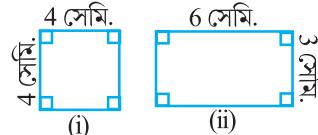
$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$, এবং $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$

[নিজে একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করি]

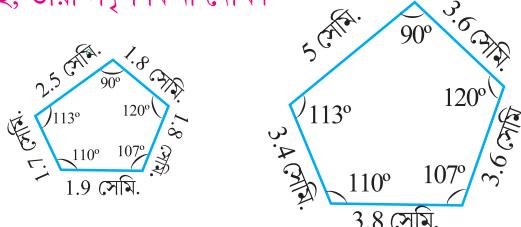
∴ হাতেকলমে পেলাম, একই সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুটি বহুভুজ সদৃশ হবে যদি,

(i) তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হয় এবং

(ii) অনুরূপ বাহুগুলি সমান অনুপাতে থাকে।

সহেলী দুটি চতুর্ভুজ এঁকেছে, তারা সদৃশ কিনা দেখি

দেখছি, সহেলির আঁকা (i) নং ও (ii) নং চতুর্ভুজদ্বয় সদৃশ নয়। কারণ চতুর্ভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলেও অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান নয়।

একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি রম্বস কি সর্বদা সদৃশ হবে? এঁকে যুক্তি দিয়ে লিখি। [নিজে করি]

পলাশ দুটি বহুভুজ এঁকেছে, তারা সদৃশ কিনা দেখি।

দেখছি,পলাশের আঁকা বহুভুজদ্বয় সদৃশ। কারণ নিজে বুঝে লিখি।

কষে দেখি 18.1

1. ☐-এ সঠিক উত্তর লিখি:

(i) সকল বর্গক্ষেত্র ☐ [সর্বসম / সদৃশ]

(ii) সকল বৃত্ত ☐ [সর্বসম / সদৃশ]

(iii) সকল ☐ [সমবাহু / সমদ্বিবাহু] ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।

(iv) দুটি চতুর্ভুজ সদৃশ হবে যদি তাদের অনুরূপ কোণগুলি ☐ [সমান / সমানুপাতী] হয় এবং অনুরূপ বাহুগুলি ☐ [অসমান / সমানুপাতী] হয়।

2. নীচের বাক্যগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) যে-কোনো দুটি সর্বসম চিত্র সদৃশ।

(ii) যে-কোনো দুটি সদৃশ চিত্র সর্বদা সর্বসম।

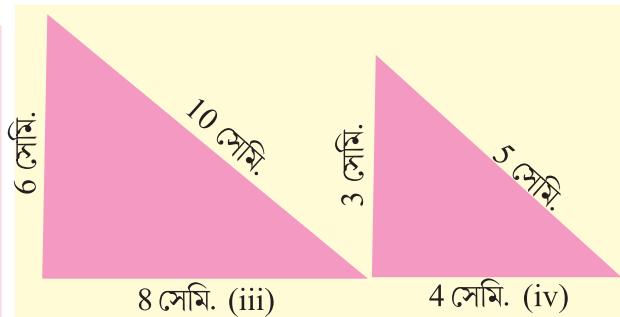
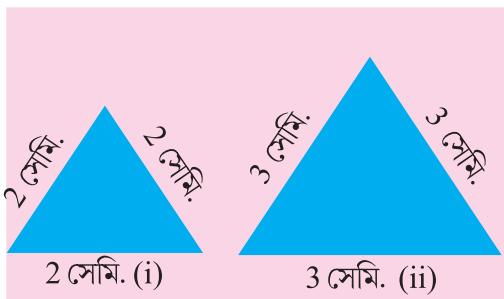
(iii) যে-কোনো দুটি সদৃশ বহুভুজাকার চিত্রের অনুরূপ কোণগুলি সমান।

(iv) যে-কোনো দুটি সদৃশ বহুভুজাকার চিত্রের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতিক।

(v) বর্গক্ষেত্র ও রম্বস সর্বদা সদৃশ।

3. একজোড়া সদৃশ চিত্রের উদাহরণ লিখি।

4. একজোড়া চিত্র অঙ্কন করি যারা সদৃশ নয়।

আমার বন্ধু শাকিল নানান রঙের ও নানান ধরনের ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করেছে।
আমি এই ত্রিভুজগুলির কোণ ও বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে সদৃশ ত্রিভুজগুলি আলাদা দলে ভাগ করে রাখি।

(i) ও (ii) নং চিত্রদুটি সদৃশ এবং (iii) ও (iv) নং চিত্রদুটি সদৃশ। কারণ এদের অনুরূপ বাহুগুলি ______ এবং অনুরূপ কোণগুলি সমান।

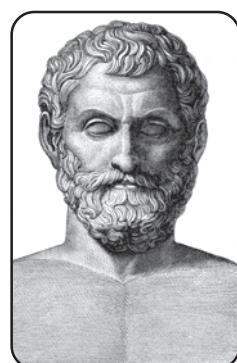
9 দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলে তাদের কী বলা হয়?

দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলে তাদের **সদৃশকোণী ত্রিভুজ** বলা হয়।

বুঝেছি, দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে, (i) তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে এবং (ii) ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী হবে।

গ্রিক গণিতজ্ঞ থ্যালেস (Thales) সদৃশকোণী ত্রিভুজের সম্পর্কে একটি সত্য বলেছিলেন। সেই সত্যটি হলো — 'সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।' অনেকে বিশ্বাস করেন যে তিনি একটি result ব্যবহার করেছিলেন এবং তাকে Basic Proportionality উপপাদ্য বা থ্যালেসের উপপাদ্য বলা হয়।

থ্যালেস উপপাদ্য বা Basic Proportionality উপপাদ্যটি হলো—

যে-কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপরদুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিত বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।

10 কিন্তু একটি সরলরেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করা বলতে কী বুঝি?

AB সরলরেখাংশের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। এক্ষেত্রে P বিন্দু AB সরলরেখাংশকে AP : PB অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

A ——————— P —— B

P বিন্দু AB সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে $\frac{AP}{PB} = 1$ হবে।

A ——— P ——— B

P বিন্দু মধ্যবিন্দু থেকে A বিন্দুর কাছে কিন্তু B বিন্দুর থেকে দূরে থাকলে $\frac{AP}{PB}$ -এর মান 1-এর থেকে কম হবে।

A —— P ————— B

আবার P বিন্দু মধ্যবিন্দু থেকে B বিন্দুর কাছে কিন্তু A বিন্দুর থেকে দূরে থাকলে $\frac{AP}{PB}$-এর মান 1-এর থেকে বেশি হবে।

A ————— P —— B

11 কিন্তু যদি P বিন্দু বর্ধিত AB সরলরেখাংশের উপর থাকে তখন কী হবে?

এক্ষেত্রে, P বিন্দু AB সরলরেখাংশকে $\frac{AP}{PB}$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করেছে।

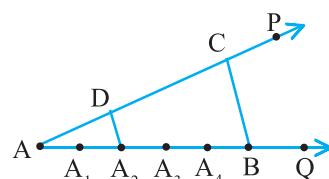
AP এর দৈর্ঘ্য PB-এর দৈর্ঘ্য থেকে বড়ো হওয়ায় $\frac{AP}{PB}$-এর মান সর্বদা 1-এর থেকে বেশি হবে।

12 কিন্তু যদি P বিন্দু বর্ধিত BA সরলরেখাংশের উপর থাকে তখন কী হবে?

এক্ষেত্রেও P বিন্দু AB সরলরেখাংশকে $\frac{AP}{PB}$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করেছে। এখানে PB-এর দৈর্ঘ্য AP-এর দৈর্ঘ্য থেকে বড়ো হওয়ায় $\frac{AP}{PB}$ এর মান 1-এর থেকে ছোটো হবে।

বুঝেছি, একটি ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে একই অনুপাতে বিভক্ত করলে তারা সমানুপাতী হবে।

আমি হাতেকলমে থ্যালেস উপপাদ্যটি যাচাই করি।

(1) আমার খাতায় $\angle PAQ$ অঙ্কন করলাম। AQ রশ্মির উপরে A_1, A_2, A_3, A_4 ও B পাঁচটি বিন্দু এমনভাবে নিলাম যাতে $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4B$ হয়।

(2) B বিন্দু দিয়ে যে-কোনো একটি সরলরেখা টানলাম যা AP রশ্মিকে C বিন্দুতে ছেদ করল।

(3) A_2 বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা AP রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore$ পেলাম, $\frac{AA_2}{A_2B}=\frac{2}{3}$

স্কেল দিয়ে মেপে দেখছি, $\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$ [নিজে এঁকে যাচাই করি]

$\therefore$ পেলাম, ΔABC-এর $BC \parallel A_2D$ হলে, $\frac{AA_2}{A_2B}=\frac{AD}{DC}$

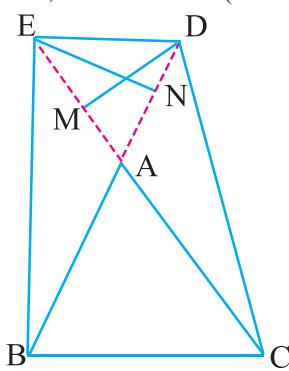
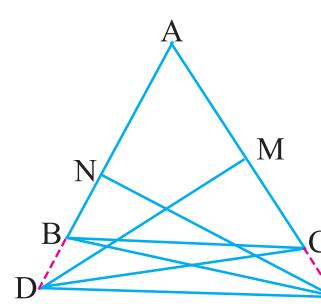
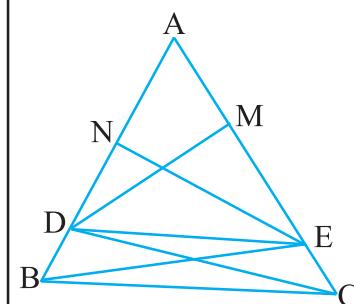
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে-কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা বর্ধিত বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :43. 'কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিত বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।' *(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)*

প্রদত্ত : ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে বা AB ও AC বাহুর বর্ধিতাংশকে (BA ও CA বাহুর বর্ধিতাংশকে) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করলাম এবং $DM \perp AC$ (বা CA বাহুর বর্ধিতাংশে) ও $EN \perp AB$ (বা BA বাহুর বর্ধিতাংশে) অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : ΔADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

অনুরূপে, ΔBDE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times DB \times EN$

$\therefore$ $\dfrac{\Delta ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta BDE\text{-এর ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \dfrac{AD}{DB}$ ——— (I)

আবার, ΔADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AE \times DM$

এবং ΔDEC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times EC \times DM$

$\therefore$ $\dfrac{\Delta ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta DEC\text{-এর ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \dfrac{AE}{EC}$ ——— (II)

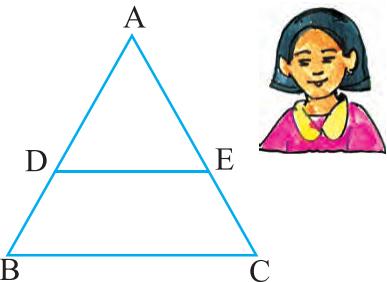
আবার, ΔBDE ও ΔDEC একই ভূমি DE-এর উপর এবং একই সমান্তরালযুগল DE ও BC-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ ΔBDE-এর ক্ষেত্রফল $= \Delta$DEC-এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে পাই, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ [প্রমাণিত]

অনুসিদ্ধান্ত : 1 ΔABC-এর BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করি যে,

(i) $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$ (ii) $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$

প্রমাণ : (i) থ্যালেস উপপাদ্য থেকে পাই, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

বা, $\dfrac{AD}{DB} + 1 = \dfrac{AE}{EC} + 1$

বা, $\dfrac{AD + DB}{DB} = \dfrac{AE + EC}{EC}$ $\therefore \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$ [প্রমাণিত]

(ii) থ্যালেস উপপাদ্য থেকে পাই, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

বা, $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{EC}{AE}$

বা, $1 + \dfrac{DB}{AD} = 1 + \dfrac{EC}{AE}$ বা, $\dfrac{AD+DB}{AD} = \dfrac{AE+EC}{AE}$

বা, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ $\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ [প্রমাণিত]

থ্যালেসের উপপাদ্যের বিপরীত কি সম্ভব অর্থাৎ যে সরলরেখা কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করে তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে কি?
হাতেকলমে যাচাই করি।

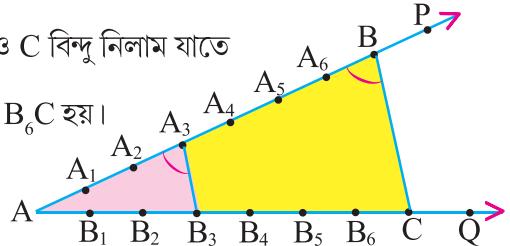
হাতেকলমে

(1) আমি খাতায় $\angle PAQ$ অঙ্কন করলাম। $\overrightarrow{AP}$ রশ্মির উপর $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ও B বিন্দু নিলাম যাতে $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6B$ হয়।

আবার, $\overrightarrow{AQ}$ রশ্মির উপর $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ ও C বিন্দু নিলাম যাতে

$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = B_5B_6 = B_6C$ হয়।

(2) এবার B ও C যোগ করে ΔABC পেলাম।

A_3 ও B_3 যোগ করে দেখছি,

$$\frac{AA_3}{A_3B} = \frac{AB_3}{B_3C} = \frac{3}{4}$$

(3) এবার $\angle AA_3B_3$ কেটে নিয়ে $\angle ABC$ -এর উপর $\angle AA_3B_3$ কোণটি বসিয়ে দেখছি কোণদ্বয় মিলে যাচ্ছে বা সমাপতিত হচ্ছে।

$\therefore$ পেলাম $\angle AA_3B_3 = \angle ABC$ যারা অনুরূপ কোণ,

$\therefore$ পেলাম $A_3B_3 \parallel BC$

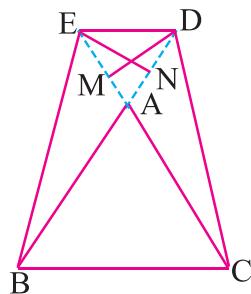
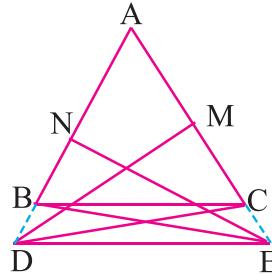
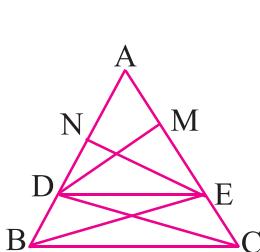
একইভাবে A_1, B_1 যোগ করে পাব $\dfrac{AA_1}{A_1B} = \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{\square}{\square}$ এবং $A_1B_1 \parallel BC$

A_2, B_2 যোগ করে পাব $\dfrac{AA_2}{A_2B} = \dfrac{AB_2}{B_2C} = \dfrac{\square}{\square}$ এবং A_2B_2 $\boxed{}$ BC [= / || বসাই]

A_4, B_4 বা A_5, B_5 বা A_6, B_6 যোগ করে কী পাব নিজে যাচাই করে লিখি।

আমি একইভাবে অন্য একটি ত্রিভুজ আঁকলাম ও একটি সরলরেখা আঁকলাম যা ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করেছে এবং দেখছি সরলরেখাটি তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। [নিজে করি]

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে সরলরেখা কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে।

উপপাদ্য : 44. *যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে 'কোনো সরলরেখা যে-কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতবাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করলে, তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে'।* ***(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)***

প্রদত্ত : ABC একটি ত্রিভুজ। একটি সরলরেখাংশ AB এবং AC বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশকে (বা BA এবং CA এর বর্ধিতাংশ) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

প্রমাণ করতে হবে : DE || BC

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করলাম। DM ⊥ AC (বা CA-এর বর্ধিতাংশ) ও EN ⊥ AB (বা BA -এর বর্ধিতাংশ) অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : Δ ADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

Δ BDE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2} \times DB \times EN$

$$\frac{\Delta \text{ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta \text{BDE-এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \frac{AD}{DB}$$

আবার, Δ ADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AE \times DM$

Δ DEC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times EC \times DM$

$$\frac{\Delta \text{ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta \text{DEC-এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC}$$

যেহেতু, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (প্রদত্ত)

সুতরাং, $\frac{\Delta \text{ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta \text{BDE-এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\Delta \text{ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta \text{DEC-এর ক্ষেত্রফল}}$

$\therefore$ Δ BDE-এর ক্ষেত্রফল = Δ DEC-এর ক্ষেত্রফল

Δ BDE ও Δ DEC একই ভূমি DE-এর উপর অবস্থিত, DE-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং তাদের ক্ষেত্রফল সমান। সুতরাং, তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

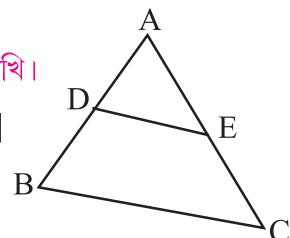
$\therefore$ DE || BC **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 1 পাশের চিত্রে ΔABC-এর $DE \parallel BC$; যদি $AD = 5$ সেমি., $DB = 6$ সেমি. এবং $AE = 7.5$ সেমি. হয়,তবে AC-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

ΔABC-এর $DE \parallel BC$, $\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পেলাম]

$\therefore \frac{5}{6} = \frac{7.5}{EC}$

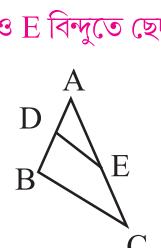
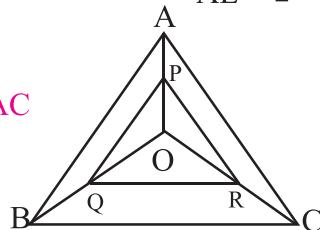
$\therefore EC = 7.5 \times \frac{6}{5}$ সেমি. $= 9$ সেমি.

$\therefore \quad AC = AE + EC = \square + \square = \square$

প্রয়োগ : 2 যদি ΔABC-এর $BC \parallel DE$, $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{5}$ এবং $AC = 21$ সেমি. হয়, তবে AE-এর মান হিসাব করে লিখি **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 3 ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। $AE = 2AD$ হলে, $DB : EC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

ΔABC -এর $DE \parallel BC$, $\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$\therefore \frac{DB}{EC} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$ [$\because AE = 2AD \quad \therefore \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$]

$\therefore DB : EC = 1 : 2$

প্রয়োগ : 4 পাশের চিত্রের $PQ \parallel AB$ এবং $PR \parallel AC$ হলে, প্রমাণ করি যে $QR \parallel BC$

ΔOAB-এর $PQ \parallel AB$, $\therefore \frac{OP}{PA} = \frac{OQ}{QB}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই] ———— (i)

আবার, ΔAOC-এর $PR \parallel AC$, $\therefore \frac{OP}{PA} = \frac{OR}{RC}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই] ———— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{OQ}{QB} = \frac{OR}{RC}$

$\therefore \Delta OBC$-এর OB ও OC-এর উপর যথাক্রমে দুটি এমন বিন্দু Q ও R পেলাম যাতে $\frac{OQ}{QB} = \frac{OR}{RC}$

$\therefore$ থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পেলাম, $QR \parallel BC$.

প্রয়োগ : 5 একটি সরলরেখা ΔABC-এর AB ও AC -কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করল যে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ হলো। যদি $\angle ADE = \angle ACB$ হয়, প্রমাণ করি যে, ΔABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রদত্ত : ΔABC-এর DE সরলরেখাংশ AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

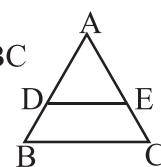
প্রমাণ করতে হবে : ΔABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ সুতরাং, থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই, $DE \parallel BC$

$\therefore$ অনুরূপ $\angle ADE = \angle ABC$ ———— (i)

আবার, $\angle ADE = \angle ACB$ [প্রদত্ত] ———— (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই, $\angle ABC = \angle ACB$

$\therefore AB = AC \qquad \therefore$ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রয়োগ : 6 ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করেছি যার AB || DC; AB-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, AE : ED = BF : FC

প্রদত্ত : ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC; AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : AE : ED = BF : FC

অঙ্কন : A, C যোগ করলাম যা EF-কে G বিন্দুতে ছেদ করল।

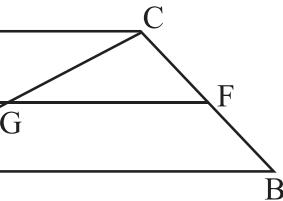
প্রমাণ : ΔADC -এর DC || EG

সুতরাং, থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ ———— (i)

আবার, ΔACB -এর AB || GF

$\therefore$ থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই, $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ———— (ii)

সুতরাং, (i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

$\therefore$ AE : ED = BF : FC

প্রয়োগ : 7 থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজের মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 8 ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করেছি যার AB || DC; AD ও BC-এর উপর যথাক্রমে P ও Q এমন দুটি বিন্দু নিলাম যাতে AP : PD = BQ : QC হয়। প্রমাণ করি যে, PQ || DC.

প্রদত্ত : ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC; P ও Q বিন্দু দুটি যথাক্রমে AD ও BC বাহুর উপর এমনভাবে অবস্থিত যাতে AP : PD = BQ : QC হয়।

প্রমাণ করতে হবে : PQ || DC

অঙ্কন : ধরি AB < DC; DA এবং CB বাহুকে বর্ধিত করা হলো। বর্ধিত DA ও CB বাহু পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল। PQ যোগ করলাম।

প্রমাণ : ΔODC-এর AB || DC

$\therefore \frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BC}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পেলাম] ———— (i)

আবার $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ [প্রদত্ত]

অর্থাৎ, $\frac{PD}{AP} = \frac{QC}{BQ}$ বা, $1+\frac{PD}{AP} = 1+\frac{QC}{BQ}$ বা, $\frac{AP+PD}{AP} = \frac{BQ+QC}{BQ}$

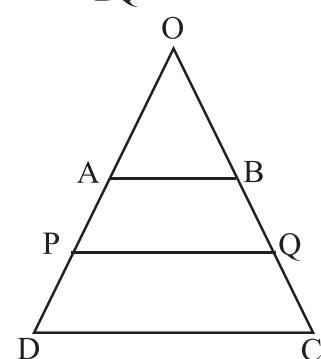
$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{BC}{BQ}$ ———— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{OA}{AD} \times \frac{AD}{AP} = \frac{OB}{BC} \times \frac{BC}{BQ}$

$\therefore \frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$

$\therefore$ পেলাম, ΔOPQ-এর $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$

$\therefore$ থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই, AB || PQ

আবার, AB || DC. $\therefore$ PQ || DC [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 9 যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে একটি ত্রিভুজের কোনো কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক কোণটির বিপরীত বাহুকে অন্তঃস্থভাবে বা বহিঃস্থভাবে কোণসংলগ্ন বাহুদুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাতে বিভক্ত করে। (প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)

প্রদত্ত: ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$-এর AD অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-i) বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-ii) BC বাহুকে বা BC-এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : $BD : DC = AB : AC$

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে DA বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করি যা বর্ধিত BA বাহুকে (চিত্র-i) বা BA বাহুকে (চিত্র-ii) E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $DA \parallel CE \therefore \angle DAC =$ একান্তর $\angle ACE$

$DA \parallel CE, \therefore \angle BAD$ (বা $\angle FAD$ চিত্র নং (ii)) = অনুরূপ $\angle AEC$

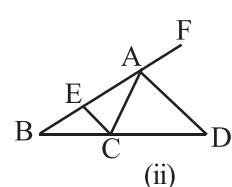
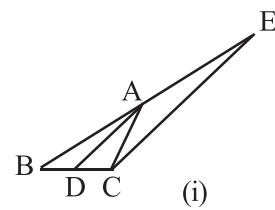
কিন্তু $\angle BAD$ (বা $\angle FAD$ চিত্র নং (ii)) = $\angle DAC$

$\therefore \angle ACE = \angle AEC$

সুতরাং, $AC = AE$

ΔBEC (চিত্র i) বা ΔBDA (চিত্র ii)-তে $DA \parallel CE$; সুতরাং, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$ (থ্যালেসের উপপাদ্য অনুযায়ী)

অর্থাৎ $BD : DC = AB : AE$

সুতরাং, $BD : DC = AB : AC$ ($\because AE = AC$) **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 10 যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, একটি ত্রিভুজের কোনো কোণ থেকে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি ওই কোণের বিপরীত বাহুকে অন্তঃস্থভাবে বা বহিঃস্থভাবে ত্রিভুজের কোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাতে বিভক্ত করে তাহলে সরলরেখাটি কোণটির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক হবে। (প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজে A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত একটি সরলরেখা BC (চিত্র-i) বা বর্ধিত BC (চিত্র-ii) বাহুকে D বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে, $BD : DC = AB : AC$ হয়।

প্রমাণ করতে হবে : AD, $\angle BAC$-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-i) বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-ii)

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে DA বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত করি যা বর্ধিত BA বাহুকে (চিত্র-i) বা BA বাহুকে (চিত্র-ii) E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : ΔBCE (চিত্র-i) বা ΔABD (চিত্র-ii)-তে, $DA \parallel CE$

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ (থ্যালেসের উপপাদ্য অনুযায়ী)

কিন্তু, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (প্রদত্ত)

সুতরাং, $\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$\therefore AE = AC$

সুতরাং $\angle AEC = \angle ACE$

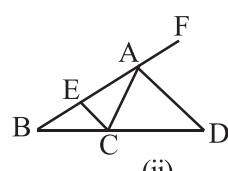
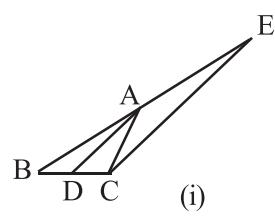
আবার, $DA \parallel CE$;

$\therefore \angle DAC =$ একান্তর $\angle ACE$ এবং $\angle BAD$ (চিত্র-i) বা $\angle FAD$ (চিত্র-ii) = অনুরূপ $\angle AEC$.

যেহেতু, $\angle AEC = \angle ACE$,

সুতরাং $\angle BAD$ (চিত্র-i) বা $\angle FAD$ (চিত্র-ii) = $\angle DAC$.

সুতরাং AD, $\angle BAC$ এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-i) বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-ii) **[প্রমাণিত]**

কষে দেখি 18.2

1. ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।
   (i) $PB = AQ$, $AP = 9$ একক, $QC = 4$ একক হলে, PB-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
   (ii) PB-এর দৈর্ঘ্য AP-এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ এবং QC-এর দৈর্ঘ্য AQ-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 3 একক বেশি হলে, AC-এর দৈর্ঘ্য কত হবে, হিসাব করে লিখি।
   (iii) যদি $AP = QC$, AB-এর দৈর্ঘ্য 12 একক এবং AQ-এর দৈর্ঘ্য 2 একক হয়, তবে CQ-এর দৈর্ঘ্য কত হবে, হিসাব করে লিখি।
2. ΔPQR-এর PQ ও PR বাহুর উপর যথাক্রমে X, Y দুটি বিন্দু নিলাম।
   (i) $PX = 2$ একক, $XQ = 3.5$ একক, $YR = 7$ একক এবং $PY = 4.25$ একক হলে, XY ও QR পরস্পর সমান্তরাল হবে কিনা যুক্তি দিয়ে লিখি।
   (ii) $PQ = 8$ একক, $YR = 12$ একক, $PY = 4$ একক এবং PY-এর দৈর্ঘ্য XQ-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 2 একক কম হলে, XY ও QR সমান্তরাল হবে কিনা যুক্তি দিয়ে লিখি।
3. প্রমাণ করি যে, কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [থ্যালেসের উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করি]
4. ΔABC-এর AD মধ্যমার উপর P একটি বিন্দু। বর্ধিত BP ও CP যথাক্রমে AC ও AB-কে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $RQ \parallel BC$.
5. ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমাদুটি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং FE সরলরেখাংশ AG সরলরেখাংশকে O বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে $AO = 3OG$.
6. প্রমাণ করি যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুগুলির মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখাংশ সমান্তরাল বাহুগুলির সমান্তরাল।
7. ΔABC-এর BC বাহুর উপর D যে-কোনো একটি বিন্দু। P, Q যথাক্রমে ΔABD ও ΔADC-এর ভরকেন্দ্র। প্রমাণ করি যে, $PQ \parallel BC$.
8. একই ভূমি QR-এর উপর এবং একই পার্শ্বে দুটি ত্রিভুজ ΔPQR ও ΔSQR অঙ্কন করেছি যাদের ক্ষেত্রফল সমান। F ও G যথাক্রমে ত্রিভুজদুটির ভরকেন্দ্র হলে প্রমাণ করি যে, $FG \parallel QR$.
9. প্রমাণ করি যে, কোনো সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদুটির যে-কোনো একটির সংলগ্ন কোণ দুটি সমান।
10. ΔABC এবং ΔDBC একই ভূমি BC-এর উপর এবং BC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। BC বাহুর উপর E যে-কোনো একটি বিন্দু। E বিন্দু দিয়ে AB এবং BD-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC এবং DC বাহুকে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $AD \parallel FG$.
11. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

   (A) বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

   (i) ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB এবং AC বাহুকে যথাক্রমে X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। $AX = 2.4$ সেমি., $AY = 3.2$ সেমি. এবং $YC = 4.8$ সেমি., হলে, AB-এর দৈর্ঘ্য
   (a) 3.6 সেমি. (b) 6 সেমি. (c) 6.4 সেমি. (d) 7.2 সেমি.

   (ii) ΔABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর উপর D ও E বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে $DE \parallel BC$ এবং $AD : DB = 3 : 1$; যদি $EA = 3.3$ সেমি. হয়, তাহলে AC-এর দৈর্ঘ্য
   (a) 1.1 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 4.4 সেমি. (d) 5.5 সেমি.

(iii) পাশের চিত্রে DE || BC হলে, x-এর মান

(a) 4 (b) 1 (c) 3 (d) 2

(iv) ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC এবং AD ও BC বাহুর উপর P ও Q বিন্দু দুটি এমনভাবে অবস্থিত যে PQ || DC; যদি PD = 18 সেমি., BQ = 35 সেমি., QC = 15 সেমি. হয়, তাহলে AD-এর দৈর্ঘ্য

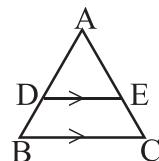
(a) 60 সেমি. (b) 30 সেমি. (c) 12 সেমি. (d) 15 সেমি.

(v) পাশের চিত্রে, DP = 5 সেমি., DE = 15 সেমি., DQ = 6 সেমি. এবং QF = 18 সেমি. হলে,

(a) PQ = EF (b) PQ || EF (c) PQ ≠ EF (d) PQ ∦ EF

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) দুটি সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সর্বসম।

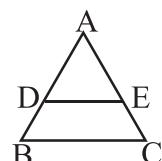
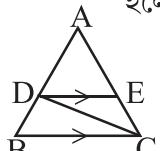
(ii) পাশের চিত্রে DE || BC হলে, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

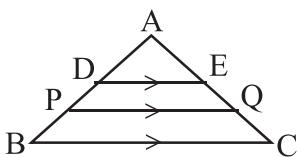
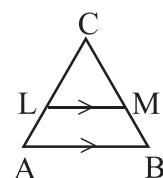
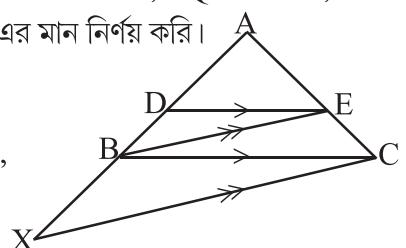
(i) একটি ত্রিভুজের যে-কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে __________ বিভক্ত করে।

(ii) দুটি ত্রিভুজের ভূমি একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং ত্রিভুজ দুটির অপর শীর্ষবিন্দুটি সাধারণ হলে ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত ভূমির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের __________।

(iii) একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখা অপর বাহুদ্বয়কে __________ বিভক্ত করে।

12. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ এবং $\angle ADE = \angle ACB$ হলে, বাহুভেদে ABC ত্রিভুজটি কী ধরনের লিখি।

(ii) পাশের চিত্রে DE || BC এবং AD : BD = 3 : 5 হলে, ΔADE-এর ক্ষেত্রফল : ΔCDE-এর ক্ষেত্রফল কত তা লিখি।

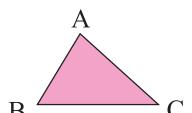
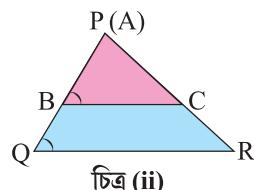
(iii) পাশের চিত্রে, LM || AB এবং AL = (x–3) একক, AC = 2x একক, BM = (x–2) একক এবং BC = (2x + 3) একক হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(iv) পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে DE || PQ || BC এবং AD = 3সেমি., DP = xসেমি., PB = 4সেমি., AE = 4সেমি., EQ = 5সেমি., QC = y সেমি. হলে, x এবং y-এর মান নির্ণয় করি।

(v) পাশের চিত্রে, DE || BC, BE || XC এবং $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ হলে, $\frac{AX}{XB}$-এর মান নির্ণয় করি।

আজ আমরা ঠিক করেছি শাকিলের তৈরি পিচবোর্ডের ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির মধ্যে যেগুলি সদৃশ তাদের একটি চার্টে আটকে আমাদের শ্রেণিকক্ষে টাঙিয়ে রাখব।

রাবেয়া ওই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির মধ্যে যাদের কোণগুলি সমান অর্থাৎ যারা সদৃশকোণী আলাদা করে রেখেছে।

কিন্তু এই সকল সদৃশকোণী ত্রিভুজগুলির বাহুগুলি কি সমানুপাতে আছে? অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি কি সদৃশ হবে? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. প্রথমে দুটি রঙিন ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC ও PQR নিলাম যাদের কোণগুলি সমান অর্থাৎ $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ এবং $\angle C = \angle R$ এবং $PQ > AB$, $PR > AC$, $QR > BC$.

চিত্র (i)

চিত্র (ii)

2. ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উপর এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু A ও শীর্ষবিন্দু P মিশে যায় এবং AB বাহু PQ বাহুর উপর থাকে। [(ii) নং চিত্রের মতো]

দেখছি, (i) Δ ABC-এর AC বাহু PR বাহুর সঙ্গে মিশে গেছে, [নিজে যাচাই করি]

(ii) $\frac{PB}{PQ} = \frac{PC}{PR}$ $\quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ [নিজে যাচাই করি] ———— (I)

ব্যাখ্যা : (ii) নং চিত্রে $\angle B = \angle Q$

$\therefore BC \parallel QR$ [$\because$ অনুরূপ কোণদ্বয় সমান]

$\therefore \frac{PB}{BQ} = \frac{PC}{CR}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই]

$\frac{AB}{BQ} = \frac{AC}{CR}$

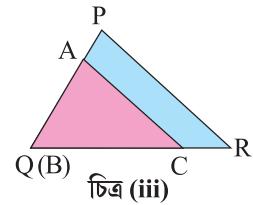
বা, $\frac{BQ}{AB} = \frac{CR}{AC}$

বা, $1 + \frac{BQ}{AB} = 1 + \frac{CR}{AC}$

বা, $\frac{AB + BQ}{AB} = \frac{AC + CR}{AC}$

বা, $\frac{AQ}{AB} = \frac{AR}{AC}$ $\quad \therefore \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC}$ সুতরাং, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$

3. একইরকমভাবে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রকে PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উপর পাশের ছবির মতো এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু B ও শীর্ষবিন্দু Q পরস্পর মিশে যায় এবং AB বাহু PQ বাহুর উপর থাকে।

চিত্র (iii)

দেখছি, (i) BC বাহু QR বাহুর সঙ্গে মিশে গেছে। [নিজে হাতেকলমে যাচাই করি]

এবং (ii) $\frac{AQ}{PQ} = \frac{QC}{QR}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [নিজে যাচাই করি] ———— (II)

উপরের মতো আমি নিজে ব্যাখ্যা লিখি [নিজে করি]

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে পেলাম, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

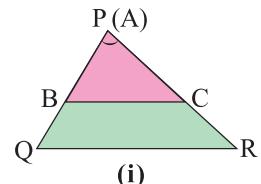
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী। অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

কিন্তু এর বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে কি তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে? দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে ত্রিভুজদুটি সদৃশকোণী হবে কিনা হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

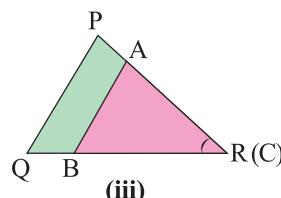
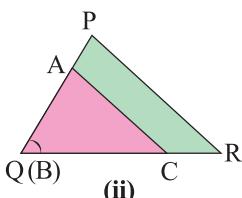
1. প্রথমে রঙিন আর্টপেপার কেটে দুটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC ও PQR তৈরি করলাম যাদের বাহুগুলি সমানুপাতী। অর্থাৎ, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

2. এবার পাশের চিত্রের মতো ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উপর এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু A ও শীর্ষবিন্দু P মিশে থাকে এবং AB বাহু PQ বাহুর উপর থাকে।

(i)

দেখছি, AC বাহু PR বাহুর সঙ্গে মিশে গেছে। অর্থাৎ পেলাম, $\angle A = \angle P$

3. একইভাবে নীচের (ii) নং ও (iii) নং চিত্রের মতো ΔABC-কে ΔPQR-এর উপরে বসিয়ে দেখছি $\angle B =$ ☐ এবং $\angle C =$ ☐ [নিজে যাচাই করে লিখি]

(ii)

(iii)

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে। অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হবে।

আমরা অন্য যে-কোনো দুটি ত্রিভুজ নিয়ে একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করে দেখছি—

(i) দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে।

আবার (ii) দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে তারা সদৃশকোণী হবে। [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :45. দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান হবে অর্থাৎ তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে। *[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : ABC ও DEF দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ। অর্থাৎ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

প্রমাণ করতে হবে : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

অঙ্কন : ΔDEF থেকে AB ও AC-এর সমান করে DE বা বর্ধিত DE থেকে এবং DF বা বর্ধিত DF থেকে যথাক্রমে DP ও DQ অংশ কেটে নিলাম। P ও Q বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDPQ-এর মধ্যে,

$AB = DP$, $\angle A = \angle D$ এবং $AC = DQ$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (S-A-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে)

$\therefore \angle B = \angle P$

আবার, $\angle B = \angle E$ [প্রদত্ত]

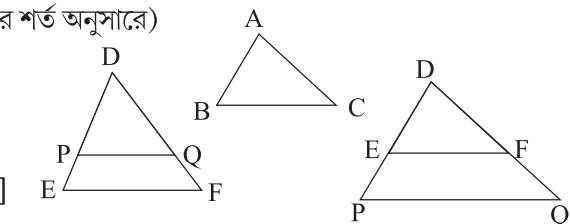
$\therefore \angle P = \angle E$

সুতরাং, $PQ \parallel EF$ [$\because$ অনুরূপ কোণ সমান]

$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ (থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ———— (I) [$\because$ DP = AB এবং DQ = AC]

অনুরূপে, ED বা বর্ধিত ED থেকে BA এবং EF বা বর্ধিত EF থেকে BC-এর সমান করে কেটে নিয়ে প্রমাণ করতে পারি, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ———— (II)

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে পেলাম, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ **[প্রমাণিত]**

বুঝেছি, যদি দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ অপরটির দুটি কোণের সমান হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে। কারণ নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :46. দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতে থাকলে তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে। অর্থাৎ, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী হবে। *[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : ΔABC ও ΔDEF -এর $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে : ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী অর্থাৎ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

অঙ্কন : DE বা বর্ধিত DE থেকে AB-এর সমান করে DP এবং DF বা বর্ধিত DF থেকে AC-এর সমান করে DQ কেটে নিলাম। P ও Q বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$; সুতরাং, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ [অঙ্কনানুসারে, AB = DP এবং AC = DQ]

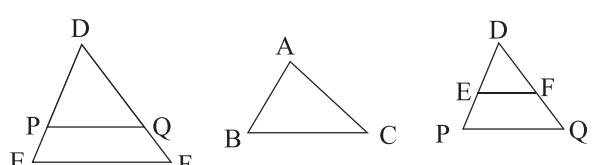
$\therefore$ থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে পাই, $PQ \parallel EF$

$PQ \parallel EF$ এবং DE ভেদক

$\therefore \angle P = \angle E$

$PQ \parallel EF$ এবং DF ভেদক,

$\therefore \angle Q = \angle F$

$\therefore \Delta DPQ$ ও ΔDEF সদৃশকোণী

$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{PQ}{EF}$

বা, $\frac{AB}{DE} = \frac{PQ}{EF}$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে DP = AB] ———— (i)

কিন্তু $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ [প্রদত্ত] ———— (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{PQ}{EF} = \frac{BC}{EF}$

$\therefore PQ = BC.$

$\therefore$ ΔABC ও ΔDPQ-এর মধ্যে AB = DP, BC = PQ এবং AC = DQ

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (S-S-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে)

$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle P = \angle E$ এবং $\angle C = \angle Q = \angle F$

$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

$\therefore$ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

13 দুটি বহুভুজ সদৃশ হবে যখন

(i) বহুভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী এবং (ii) বহুভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে।

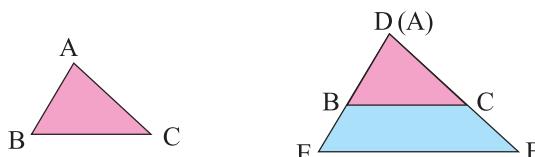
14 কিন্তু দুটি ত্রিভুজ কখন সদৃশ হবে?

উপরের প্রমাণ থেকে দেখছি, দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে যদি,

ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হয়। অথবা ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হয় বা ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হয়।

কিন্তু যদি দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণদুটির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হয়, তবে কি ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. কাগজ কেটে দুটি রঙিন ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC ও DEF তৈরি করলাম যাদের $\angle A = \angle D$ এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

2. উপরের ছবির মতো ΔABC-কে ΔDEF-এর উপর এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু A ও শীর্ষবিন্দু D মিশে থাকে এবং DE বাহু AB বাহুর উপর থাকে।

দেখছি, (i) AC বাহু DF বাহুর সঙ্গে মিশে আছে [$\because \angle A = \angle D$]

এবং (ii) $\frac{BC}{EF} = \frac{\square}{\square}$ [নিজে মেপে লিখি] $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

হাতেকলমে দেখছি, দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :47. দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে। *[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$ এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে : ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

প্রমাণ : $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ বা, $\frac{DB}{DE} = \frac{DC}{DF}$ বা, $\frac{DB}{BE} = \frac{DC}{CF}$ $\therefore BC \parallel EF$ [থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই]

সুতরাং, $\angle B$ = অনুরূপ $\angle E$ এবং $\angle C$ = অনুরূপ $\angle F$

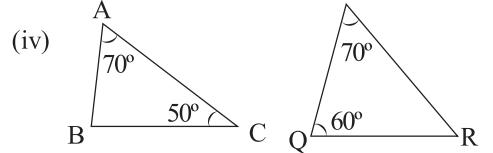
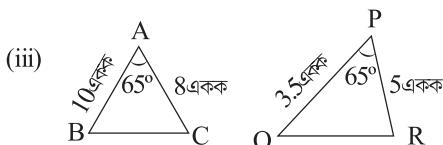
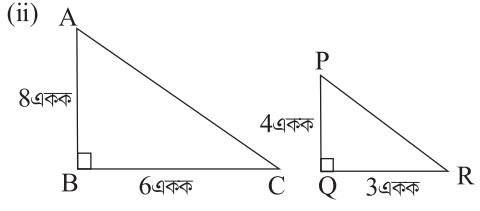
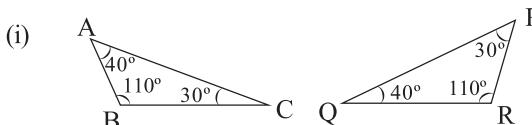
অর্থাৎ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী। $\therefore$ ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে সর্বসমতার চিহ্ন হিসাবে যেমন $\cong$ এটি ব্যবহার করি, সেরকম দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে কোনো চিহ্ন ব্যবহার করা যায় কি?

ΔABC ও ΔDEF-এর $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ হলে ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ। এখন লিখি $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

প্রয়োগ : 11. নীচের কোন ত্রিভুজ জোড়া সদৃশ হিসাব করে লিখি।

(i) $\angle A = \angle Q$, $\angle B = \angle R$ এবং $\angle C = \angle P$

$\therefore$ ΔABC ও ΔQRP সদৃশকোণী

$\therefore$ ΔABC ও ΔQRP সদৃশ বা $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

(ii) $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

$\therefore$ ΔABC ও ΔRQP-এর বাহুগুলি সমানুপাতী।

$\therefore$ ΔABC ও ΔRQP সদৃশ বা $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

একইভাবে (iii) ও (iv) চিত্রের বাহু ও কোণের হিসাব করে নিজে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 12. পাশের ছবি দেখি ও $\angle P$-এর মান হিসাব করে লিখি।

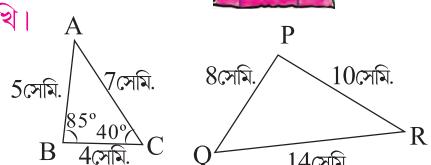
সমাধান : ΔABC ও ΔPQR -এর,

$\frac{AB}{PR} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{BC}{PQ} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ এবং $\frac{AC}{QR} = \frac{\square}{\square} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\frac{AB}{RP} = \frac{BC}{PQ} = \frac{CA}{QR} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ΔABC ও ΔRPQ সদৃশকোণী

$\therefore$ $\angle A = \angle R$, $\angle B = \angle P$ এবং $\angle C = \angle Q$

$\therefore$ $\angle P = \angle B = 85^\circ$

প্রয়োগ : 13. প্রমাণ করি যে, দুটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিসীমা ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহুগুলির সঙ্গে সমানুপাতী।

প্রদত্ত : ABC ও PQR দুটি সদৃশ ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে : $\dfrac{\Delta ABC\text{-এর পরিসীমা}}{\Delta PQR\text{-এর পরিসীমা}} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$

প্রমাণ : ΔABC ও ΔPQR সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$

সুতরাং, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP} = \dfrac{AB + BC + CA}{PQ + QR + PR}$

(সংযোজন প্রক্রিয়া করে পাই)

$\dfrac{\Delta ABC\text{-এর পরিসীমা}}{\Delta PQR\text{-এর পরিসীমা}} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 14. দুটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিসীমা যথাক্রমে 20 সেমি. ও 16 সেমি., প্রথম ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সেমি. হলে, দ্বিতীয় ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুর দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : $\dfrac{\text{প্রথম ত্রিভুজের পরিসীমা}}{\text{দ্বিতীয় ত্রিভুজের পরিসীমা}} = \dfrac{9 \text{ সেমি.}}{\text{দ্বিতীয় ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু}}$

প্রয়োগ : 15. প্রমাণ করি যে, যে-কোনো ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং দুটি বাহু দ্বারা সমান্তরাল সরলরেখার খণ্ডিতাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হবে।

প্রদত্ত : ΔABC-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু P দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : (i) Q, AC-এর মধ্যবিন্দু, (ii) $PQ = \dfrac{1}{2} BC$

প্রমাণ : ΔAPQ ও ΔABC-এর

$\angle PAQ = \angle BAC$ [সাধারণ কোণ]

$\angle APQ = \angle ABC$ [$\because PQ \parallel BC$ এবং AB ভেদক]

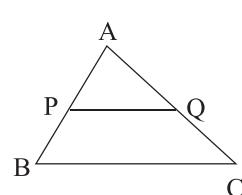
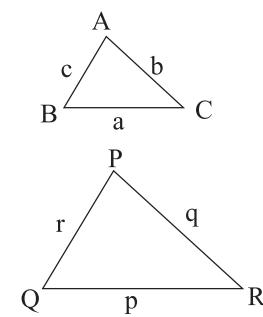
$\therefore \Delta APQ$ ও ΔABC সদৃশকোণী।

সুতরাং, ΔAPQ ও ΔABC সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{PQ}{BC}$

কিন্তু, $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{1}{2}$ [$\because$ P, AB-এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{1}{2}$ বা, $AQ = \dfrac{1}{2} AC$ $\therefore$ Q, AC-র মধ্যবিন্দু **[(i) প্রমাণিত]**

আবার, $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore PQ = \dfrac{1}{2} BC$ **[(ii) প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 16. ΔABC-এর $\angle B = \angle C$, D ও E বিন্দু BA ও CA-এর উপর এমনভাবে অবস্থিত যে, BD = CE; প্রমাণ করি যে, DE || BC   **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 17. ΔABC-এর একটি মধ্যমা AD অঙ্কন করেছি। যদি BC-এর সমান্তরাল কোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে AD দ্বারা PQ সরলরেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত হবে।

প্রদত্ত : ABC-এর AD মধ্যমা। BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB, AD ও AC-কে যথাক্রমে P, R ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : PR = RQ

প্রমাণ : ΔAPR ও ΔABD-এর $\angle PAR = \angle BAD$ [একই কোণ]

এবং $\angle APR$ = অনুরূপ $\angle ABD$ [$\because$ PR || BD এবং AB ভেদক]

$\therefore \Delta APR$ ও ΔABD সদৃশকোণী।

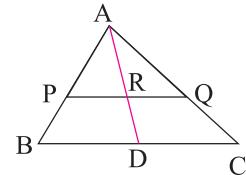
সুতরাং, ΔAPR ও ΔABD সদৃশ।

$\therefore \frac{PR}{BD} = \frac{AR}{AD}$ ———— (i)

ΔARQ ও ΔADC থেকে অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\frac{RQ}{DC} = \frac{AR}{AD}$ ———— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{PR}{BD} = \frac{RQ}{DC}$

কিন্তু, BD = DC [$\because$ AD মধ্যমা]

$\therefore$ PR = RQ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 18. একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD অঙ্কন করেছি। বর্ধিত AB ও DC বাহুদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, PA.PB = PC.PD

প্রদত্ত : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বর্ধিত AB ও DC বাহুদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : PA.PB = PC.PD

প্রমাণ : ABCD বৃহস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore \angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$

আবার, $\angle DCB + \angle BCP = 180^\circ$

$\therefore \angle DAB + \angle DCB = \angle DCB + \angle BCP$

$\therefore \angle DAB = \angle BCP$ ———— (i)

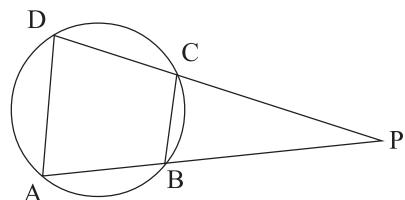
ΔAPD ও ΔCPB-এর, $\angle APD = \angle CPB$ [একই কোণ]

এবং $\angle PAD = \angle BCP$ [(i) থেকে পেলাম]

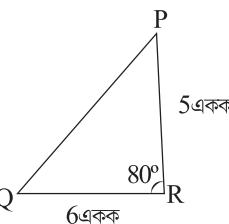
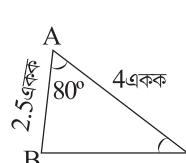
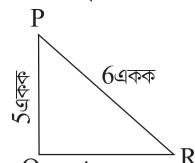
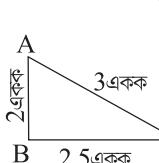
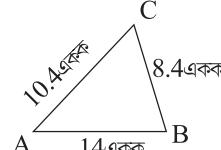
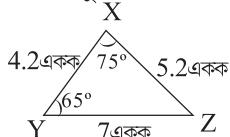
$\therefore \Delta APD$ ও ΔCPB সদৃশকোণী।

সুতরাং, ΔAPD ও ΔCPB সদৃশ।

$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$

সুতরাং, PA.PB = PC.PD (প্রমাণিত)

উপরের প্রমাণে দেখছি, ΔAPD ও ΔCPB-এর PA ও PC অনুরূপ বাহু এবং PD ও PB অনুরূপ বাহু।

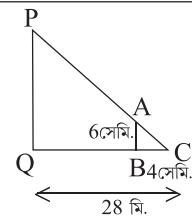
কষে দেখি 18.3

1. নীচের কোন ত্রিভুজ জোড়া সদৃশ হিসাব করে লিখি।

2. নীচের ত্রিভুজ জোড়া দেখি ও ∠A-এর মান হিসাব করে লিখি।

3. আমাদের মাঠে 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের একটি কাঠির 4 সেমি. দৈর্ঘ্যের ছায়া মাটিতে পড়েছে। ওই একই সময়ে যদি একটি উঁচু টাওয়ারের ছায়ার দৈর্ঘ্য 28 মিটার হয়, তবে টাওয়ারের উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি।

উত্তর সংকেত : ধরি, PQ টাওয়ার এবং AB কাঠি

∴ BC = 4 সেমি., QC = 28 মি.

ΔPQC ও ΔABC সদৃশকোণী।

সুতরাং সদৃশ। $\therefore \frac{PQ}{AB} = \frac{QC}{BC}$ [নিজে করি]

4. প্রমাণ করি যে, কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

5. তিনটি সমবিন্দু সরলরেখাকে দুটি সমান্তরাল সরলরেখা যথাক্রমে A, B, C ও X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করেছে, প্রমাণ করি যে, AB : BC = XY : YZ

6. PQRS একটি ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করেছি যার PQ || SR ; PR ও QS কর্ণ দুটি O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, OP : OR = OQ : OS; যদি SR = 2PQ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, O বিন্দু কর্ণ দুটির প্রত্যেকটির সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর একটি বিন্দু হবে।

7. PQRS একটি সামান্তরিক। S বিন্দুগামী একটি সরলরেখা PQ এবং বর্ধিত RQ-কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, PS : PX = QY : QX = RY : RS.

8. দুটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ΔABC ও ΔPQR সদৃশকোণী। তাদের পরিকেন্দ্র যথাক্রমে X ও Y; BC ও QR অনুরূপ বাহু হলে, প্রমাণ করি যে, BX : QY = BC : QR.

9. কোনো বৃত্তের PQ ও RS দুটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে X বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। P, S ও R, Q যুক্ত করে, প্রমাণ করি যে, ΔPXS ও ΔRSQ সদৃশকোণী। এর থেকে প্রমাণ করি যে, $PX \cdot XQ = RX \cdot XS$

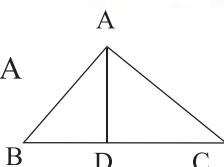
অথবা একটি বৃত্তে দুটি জ্যা পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে ছেদ করলে একটির অংশদ্বয়ের আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের আয়তক্ষেত্রের সমান হবে।

10. একটি সরলরেখার উপর P এবং Q দুটি বিন্দু। P এবং Q বিন্দুতে সরলরেখাটির উপর যথাক্রমে PR এবং QS লম্ব। PS এবং QR পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। OT, PQ -এর উপর লম্ব। প্রমাণ করি যে, $\frac{1}{OT} = \frac{1}{PR} + \frac{1}{QS}$

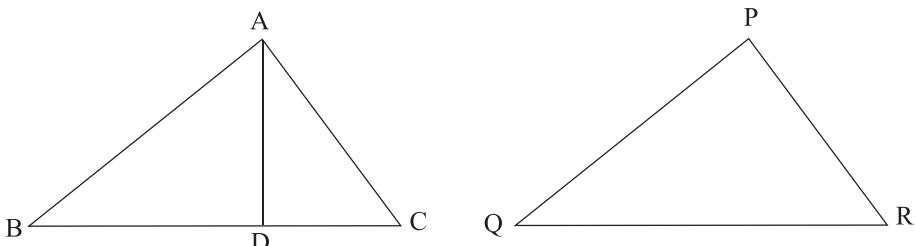
11. একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত ΔABC; বৃত্তের ব্যাস AD এবং AE, BC বাহুর উপর লম্ব যা BC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, ΔAEB এবং ΔACD সদৃশকোণী। এর থেকে প্রমাণ করি যে, AB.AC = AE.AD.

আমরা পিচবোর্ডে যে সকল ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করেছি তাদের মধ্যে সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলি দেবমাল্য আলাদা করে রেখেছে।

নুসরৎ এদের মধ্যে দুটি সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র নিয়ে কাগজ ভাঁজ করে ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব তৈরি করল।

নুসরৎ সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর সমকৌণিক বিন্দু A থেকে $AD \perp BC$ অঙ্কন করেছে।

কাগজের ভাঁজ খুলে তিনটি ত্রিভুজ ABD, CAD ও ABC পেলাম। কিন্তু এই তিনটি ত্রিভুজ কি পরস্পর সদৃশ? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. দুটি একই মাপের ত্রিভুজ ABC ও PQR তৈরি করলাম যার $\angle A = \angle P = 90^\circ$, $\angle B = \angle Q$ এবং $\angle C = \angle R$ এবং ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র দুটি কেটে নিলাম।
2. এবার কাগজ ভাঁজ করে ΔABC-এর অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব টানলাম।

3. এবার ΔABD ও ΔCAD কেটে নিলাম এবং ΔPQR-এর উপর বসিয়ে দেখছি

$\angle A = \angle P = \angle CDA = \angle ADB$

$\angle B = \angle Q = \angle ABD = \angle CAD$

$\angle C = \angle R = \angle DAB = \angle ACD$ **[নিজে করি]**

$\therefore$ পেলাম ΔABD, ΔCAD ও ΔABC সদৃশকোণী।

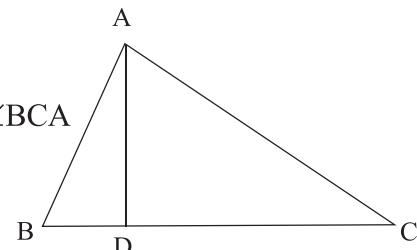
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম ΔABD, ΔCAD ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব ত্রিভুজটিকে যে দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ।

উপপাদ্য :48. যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করলে, এই লম্বের উভয় পার্শ্বস্থিত ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং ওই ত্রিভুজগুলির প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ।

প্রদত্ত : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ সমকোণ এবং সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে : (i) ΔDBA ও ΔABC পরস্পর সদৃশ। (ii) ΔDAC ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।
(iii) ΔDBA ও ΔDAC পরস্পর সদৃশ।

প্রমাণ : ΔDBA ও ΔABC -এর মধ্যে,
$\angle BDA = \angle BAC = 90^\circ$
এবং $\angle ABD = \angle CBA$. সুতরাং অবশিষ্ট $\angle BAD = \angle BCA$
$\therefore \Delta DBA$ ও ΔABC সদৃশকোণী।
$\therefore \Delta DBA$ ও ΔABC পরস্পর সদৃশ। **[(i) প্রমাণিত]**
আবার, ΔDAC ও ΔABC-এর মধ্যে,
$\angle ADC = \angle BAC = 90^\circ$
$\angle ACD = \angle BCA$. সুতরাং অবশিষ্ট $\angle CAD = \angle CBA$
$\therefore \Delta DAC$ ও ΔABC সদৃশকোণী।
$\therefore \Delta DAC$ ও ΔABC সদৃশ। **[(ii) প্রমাণিত]**
ΔDBA ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।
আবার, ΔDAC ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।
সুতরাং ΔDBA ও ΔDAC পরস্পর সদৃশ। **[(iii) প্রমাণিত]**

দুটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি করে সূক্ষ্মকোণ যদি সমান হয় তবে সমকোণী ত্রিভুজদুটি ☐ হবে। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :19. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম। প্রমাণ করি (i) $AB^2 = BC.BD$, (ii) $AD^2 = BD.CD$ এবং (iii) $AC^2 = BC.CD$

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজের $\angle BAC = 90^\circ$; $AD \perp BC$.

প্রমাণ করতে হবে : (i) $AB^2 = BC \cdot BD$, (ii) $AD^2 = BD \cdot CD$ এবং (iii) $AC^2 = BC \cdot CD$

প্রমাণ :(i) ΔDBA ও ΔABC সদৃশ। ($\because$ ABC ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব)

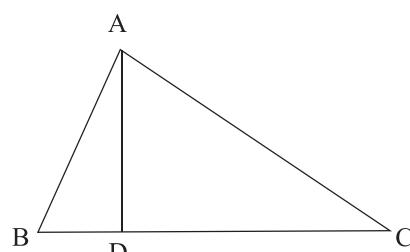
$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$ সুতরাং, $AB^2 = BC.BD$ **[(i) প্রমাণিত]**

(ii) ΔDBA ও ΔDAC সদৃশ।

$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ সুতরাং, $AD^2 = BD.CD$ **[(ii) প্রমাণিত]**

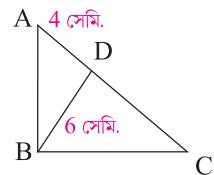
(iii) ΔDAC ও ΔABC সদৃশ।

$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$ সুতরাং, $AC^2 = BC.CD$ **[(iii) প্রমাণিত]**

A
B　D　C

উপরের প্রমাণের (ii) নং ক্ষেত্রে দেখছি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ($\angle A$ সমকোণ) সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলে AD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য, AD সরলরেখাংশ অতিভুজকে যে দুটি অংশে বিভক্ত করে সেই অংশ দুটির দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

প্রয়োগ :20. ΔABC-এর $\angle ABC = 90^{\circ}$ এবং $BD \perp AC$; যদি $BD = 6$ সেমি. এবং $AD = 4$ সেমি. হয়, তবে CD-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

ΔDAB ও ΔDBC সদৃশ।

$\therefore BD^2 = AD \cdot CD$ বা, $6^2 = 4 \times CD$ $\therefore$ CD = ☐ **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ :21. ΔABC-এর $\angle ABC = 90^{\circ}$ এবং $BD \perp AC$; যদি $AB = 6$ সেমি. এবং $BD = 3$ সেমি. এবং $CD = 5.4$ সেমি. হয়, তবে BC বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ :22. ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম। যদি $\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DC}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রমাণ : ΔBDA ও ΔADC-এর $\angle BDA = \angle ADC = 90^{\circ}$ [$\because$ $AD \perp BC$]এবং $\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DC}$

$\therefore \Delta BDA$ ও ΔADC সদৃশ। [যেহেতু দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান হলে এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হয়]

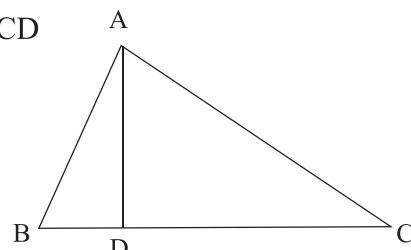
সুতরাং, $\angle ABD = \angle CAD$ এবং $\angle BAD = \angle ACD$

$\therefore \angle ABD + \angle ACD = \angle CAD + \angle BAD$

বা, $\angle B + \angle C = \angle A$

বা, $\angle A + \angle B + \angle C = 2\angle A$

বা, $2\angle A = 180^{\circ}$ $\therefore \angle A = 90^{\circ}$

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রয়োগ :23. যদি কোনো সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করি এবং যদি AC, AB ও BC ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তবে প্রমাণ করি যে, অতিভুজটির বৃহত্তম অংশ ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর সমান হবে।

প্রদত্ত : সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle A$ সমকোণ; A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম। ধরি, AC ক্ষুদ্রতম বাহু। $AC : AB = AB : BC$

প্রমাণ করতে হবে : অতিভুজ BC-এর বৃহত্তম অংশ AC বাহুর সমান। যেহেতু ADC সমকোণী ত্রিভুজের DC, অতিভুজ AC-এর সমান হতে পারে না,

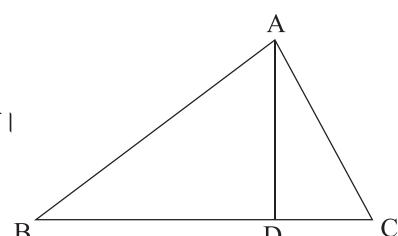
সুতরাং, প্রমাণ করতে হবে $BD = AC$

প্রমাণ : সমকৌণিক বিন্দু A থেকে BC-এর উপর AD লম্ব।

$\therefore \Delta ABD$ ও ΔABC সদৃশ।

$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$

কিন্তু, $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$ [প্রদত্ত] সুতরাং, $\frac{BD}{AB} = \frac{AC}{AB}$

$\therefore$ $BD = AC$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 24. একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যার ব্যাস AB এবং কেন্দ্র O; বৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দু P থেকে AB ব্যাসের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করলাম যা AB কে N বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে, $PB^2 = AB.BN$

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। P বৃত্তের উপরিস্থ যেকোনো একটি বিন্দু এবং $PN \perp AB$

প্রমাণ করতে হবে : $PB^2 = AB.BN$

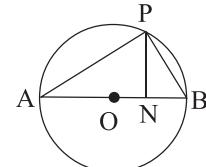
প্রমাণ: AB বৃত্তের ব্যাস। সুতরাং $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle APB = 1$ সমকোণ।

সমকোণী ত্রিভুজ APB-এর সমকৌণিক বিন্দু P থেকে অতিভুজ AB-এর উপর PN লম্ব।

$\therefore \Delta ABP$ ও ΔPBN পরস্পর সদৃশ।

সুতরাং, $\dfrac{PB}{BN} = \dfrac{AB}{PB}$

$\therefore PB^2 = AB.BN$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 25. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। PQ ওই দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক। যদি বৃত্ত দুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে r ও r' হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $PQ^2 = 4rr'$

প্রদত্ত : R ও S কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত যাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে r ও r', পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। PQ ওই দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং বৃত্তদুটিকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : $PQ^2 = 4rr'$

অঙ্কন: R, A ও A, S যোগ করলাম, A বিন্দুতে বৃত্তদুটির সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করলাম যা PQ-কে B বিন্দুতে ছেদ করল। R, B ও S, B যোগ করলাম।

প্রমাণ : B বিন্দু থেকে R কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শক BP ও BA.

$\therefore BP = BA$ এবং RB , $\angle ABP$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

সুতরাং, $\angle RBA = \frac{1}{2} \angle PBA$

আবার, B বিন্দু থেকে S কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শক BQ ও BA

$\therefore BQ = BA$ এবং BS, $\angle ABQ$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \angle SBA = \frac{1}{2} \angle QBA$

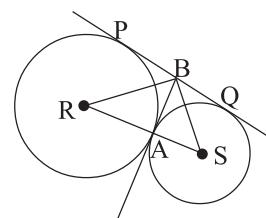
$\angle RBA + \angle SBA = \frac{1}{2} (\angle PBA + \angle QBA)$

বা, $\angle RBS = \frac{1}{2} \angle PBQ = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

$\therefore \angle RBS = 1$ সমকোণ

R, S দুটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং A স্পর্শবিন্দু।

$\therefore$ R, A, S বিন্দু তিনটি সমরেখ এবং $AB \perp RS$ [$\because$ বৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব]

সমকোণী ত্রিভুজ RBS-এর সমকৌণিক বিন্দু B থেকে অতিভুজ RS-এর উপর BA লম্ব।

$\therefore \Delta ABR$ ও ΔASB পরস্পর সদৃশ।

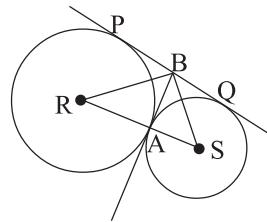
সুতরাং, $\dfrac{AB}{AS} = \dfrac{AR}{AB}$

বা, $AB^2 = AR.AS$

$= r.r'$ [$\because AR = r$ এবং $AS = r'$]

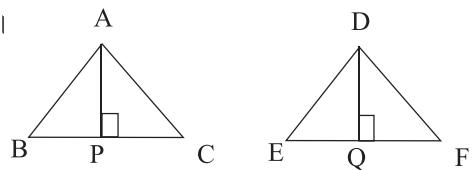
$\therefore 4AB^2 = 4r.r'$

বা, $(2AB)^2 = 4rr'$

$\therefore$ $PQ^2 = 4r.r'$ [$\because PQ = PB + BQ = 2AB$; $\because PB = BA$ এবং $QB = BA$] **(প্রমাণিত)**

প্রয়োগ : 26. *যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, দুটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সঙ্গে সমান [প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$; সুতরাং, ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।

$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

প্রমাণ করতে হবে : $\dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$

অঙ্কন : ABC ত্রিভুজে $AP \perp BC$ এবং DEF ত্রিভুজে $DQ \perp EF$ অঙ্কন করি।

প্রমাণ : $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} BC.AP$

এবং $\Delta DEF = \dfrac{1}{2} EF.DQ$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC.AP}{\frac{1}{2}EF.DQ} = \frac{BC}{EF}.\frac{AP}{DQ}$$

ΔABP ও ΔDEQ-তে, $\angle ABP = \angle DEQ$ ($\because \angle B = \angle E$)

$\angle APB = \angle DQE$ (প্রত্যেকটি সমকোণ)

সুতরাং, অবশিষ্ট $\angle PAB = \angle QDE$.

$\therefore \Delta ABP$ ও ΔDEQ সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AP}{DQ}$

আবার, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

সুতরাং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ $\therefore \dfrac{AP}{DQ} = \dfrac{BC}{EF}$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEC} = \frac{BC}{EF}.\frac{AP}{DQ} = \frac{BC}{EF}.\frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

যেহেতু, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

সুতরাং, $\dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$ $\therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$ **[প্রমাণিত]**

কষে দেখি 18.4

1. ΔABC-এর $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি BD = 8 সেমি. এবং AD = 5 সেমি. হয়, তবে CD-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

2. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ এবং $BD \perp AC$; যদি AD = 4 সেমি. এবং CD = 16 সেমি. হয়, তবে BD ও AB-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

3. O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের AB একটি ব্যাস। P বৃত্তের উপর যে-কোনো একটি বিন্দু। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটিকে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। যদি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হয়, প্রমাণ করি যে, $PQ.PR = r^2$

4. AB-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করেছি। AB-এর উপর যে-কোনো বিন্দু C থেকে AB-এর উপর লম্ব অঙ্কন করেছি যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, CD, AC ও BC-এর মধ্যসমানুপাতী।

5. সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle A$ সমকোণ। অতিভুজ BC-এর উপর লম্ব AD হলে, প্রমাণ করি যে,

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta ACD} = \frac{BC^2}{AC^2}$$

6. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত একটি সরলরেখা বৃত্তকে C বিন্দুতে এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে,

   (i) $BD^2 = AD.DC$ (ii) যে-কোনো সরলরেখার জন্য AC এবং AD দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সর্বদা সমান।

7. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

   (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

   (i) ΔABC ও ΔDEF-এ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FD} = \frac{AC}{EF}$ হলে,

   (a) $\angle B = \angle E$ (b) $\angle A = \angle D$ (c) $\angle B = \angle D$ (d) $\angle A = \angle F$

   (ii) ΔDEF ও ΔPQR-এ $\angle D = \angle Q$ এবং $\angle R = \angle E$ হলে, নীচের কোনটি সঠিক নয় লিখি।

   (a) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (b) $\frac{QR}{PQ} = \frac{EF}{DF}$ (c) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (d) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$

   (iii) ABC ও DEF ত্রিভুজে $\angle A = \angle E = 40^\circ$, AB : ED = AC : EF এবং $\angle F = 65^\circ$ হলে $\angle B$-এর মান

   (a) 35° (b) 65° (c) 75° (d) 85°

   (iv) ΔABC এবং ΔPQR-এ $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ হলে,

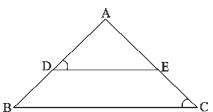
   (a) $\angle A = \angle Q$ (b) $\angle A = \angle P$ (c) $\angle A = \angle R$ (d) $\angle B = \angle Q$

   (v) ABC ত্রিভুজে AB = 9সেমি., BC = 6সেমি. এবং CA = 7.5সেমি.। DEF ত্রিভুজে BC বাহুর অনুরূপ বাহু EF; EF = 8সেমি. এবং $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ হলে ΔDEF-এর পরিসীমা

   (a) 22.5 সেমি. (b) 25 সেমি. (c) 27 সেমি. (d) 30 সেমি.

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) দুটি চতুর্ভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলে চতুর্ভুজ দুটি সদৃশ।

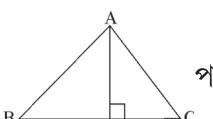
(ii)

পাশের চিত্রে $\angle ADE = \angle ACB$ হলে, $\Delta ADE \sim \Delta ACB$

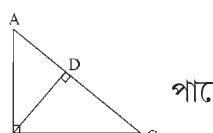
(iii) ΔPQR-এর QR বাহুর উপর D এমন একটি বিন্দু যে $PD \perp QR$; সুতরাং, $\Delta PQD \sim \Delta RPD$

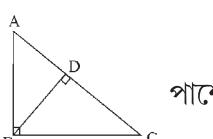
(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে যদি তাদের ________ বাহুগুলি সমানুপাতী হয়।

(ii) ΔABC ও ΔDEF-এর পরিসীমা যথাক্রমে 30সেমি. এবং 18সেমি.। $\Delta ABC \sim \Delta DEF$; BC ও EF অনুরূপ বাহু। যদি BC = 9সেমি. হয়, তাহলে EF = ________সেমি.।

8. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) পাশের চিত্রে, $\angle ACB = \angle BAD$ এবং $AD \perp BC$; AC = 15সেমি., AB = 20সেমি. এবং BC = 25সেমি. হলে, AD-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii)

পাশের চিত্রে, $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি AB = 30সেমি., BD = 24সেমি. এবং AD = 18সেমি. হলে, BC-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iii)

পাশের চিত্রে, $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি BD = 8সেমি. এবং AD = 4সেমি. হয়, তাহলে CD-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iv) ABCD ট্রাপিজিয়ামের $BC \parallel AD$ এবং AD = 4সেমি.। AC ও BD কর্ণদ্বয় এমনভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে যে $\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} = \frac{1}{2}$ হয়। BC-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

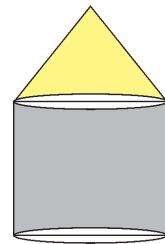
(v) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ এবং ΔABC ও ΔDEF -এ AB,BC ও CA বাহুর অনুরূপ বাহুগুলি যথাক্রমে DE, EF ও DF; $\angle A = 47^\circ$ এবং $\angle E = 83^\circ$ হলে, $\angle C$-এর পরিমাপ কত তা লিখি।

19 বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যা
REAL LIFE PROBLEMS RELATED TO DIFFERENT SOLID OBJECTS

গত বছরের ডিসেম্বর মাসের শীতের ছুটিতে আমরা ও পিসিমণিরা একসঙ্গে আঁটপুরে আমাদের গ্রামের বাড়িতে বেড়াতে গিয়েছিলাম। তখন মাঠে মাঠে ধান ঝাড়া হচ্ছিল এবং মরাই-এ ধান ভরতি করে রাখা হচ্ছিল।

প্রয়োগ : 1. আমাদের বাড়ির ধানের মরাই-এর নীচের অংশ লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি এবং উপরের অংশ শঙ্কু আকৃতির। এই মরাইটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 2.1 মিটার, চোঙাকৃতি অংশের উচ্চতা 2 মিটার এবং শঙ্কু আকৃতি অংশের উচ্চতা 1.4 মিটার। কিন্তু এই মরাইটিতে, এর আয়তনের $\frac{2}{3}$ অংশ ধান রাখা হয়েছে। মরাইয়ে রাখা ধানের আয়তন কীভাবে পাব দেখি।

মরাই-এর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{2.1}{2}$ মিটার $= \frac{21}{20}$ মিটার

চোঙাকৃতি অংশের আয়তন $= \frac{22}{7} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times 2$ ঘন মিটার $= 6.93$ ঘন মিটার

শঙ্কু-আকৃতির অংশের আয়তন $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{14}{10}$ ঘন মিটার

$= \frac{77 \times 21}{1000}$ ঘন মিটার $= 1.617$ ঘন মিটার

$\therefore$ ওই মরাইটির আয়তন $= (6.93 + 1.617)$ ঘন মিটার $= 8.547$ ঘন মিটার।

$\therefore$ ওই মরাইটিতে রাখা ধানের আয়তন $\frac{2}{3} \times 8.547$ ঘন মিটার $= 5.698$ ঘন মিটার।

বুঝেছি, যেহেতু মরাইটির কিছু অংশ চোঙাকৃতি এবং কিছু অংশ শঙ্কু আকৃতির, তাই দুটি আয়তন আলাদাভাবে নির্ণয় করে তাদের সমষ্টি নিয়ে মরাইটির আয়তন পেলাম।

প্রয়োগ : 2. কিন্তু যদি 25 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লোহার তৈরি ফাঁপা চোঙের বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. এবং অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হয় এবং চোঙটি গলিয়ে এর অর্ধেক উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করা হয়, তবে শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত হবে নির্ণয় করি।

ফাঁপা চোঙটির বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য (R) $= \frac{14}{2}$ সেমি. $= 7$ সেমি., অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য (r) $= \frac{10}{2}$ সেমি. $= 5$ সেমি., চোঙটির উচ্চতা $= 25$ সেমি.

$\therefore$ চোঙটিতে লোহার পরিমাণ $= \pi (R^2 - r^2) \times$ উচ্চতা $= \pi (7^2 - 5^2) \times 25$ ঘন সেমি.

$= \pi \times 24 \times 25$ ঘন সেমি.

নিরেট শঙ্কুর উচ্চতা $= \frac{25}{2}$ সেমি.

ধরি, শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r সেমি.

শর্তানুসারে, $\frac{1}{3} \pi \times r^2 \times \frac{25}{2} = \pi \times 24 \times 25$

$\therefore r = \pm$ ☐ **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore r \neq -$ ☐ সুতরাং r = ☐

$\therefore$ শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাস $= 2 \times r$ সেমি. = ☐ সেমি.।

প্রয়োগ : 3. রূপার পাত দিয়ে তৈরি একটি অর্ধগোলাকার বাটির মুখের বাইরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 8 সেমি. এবং ভিতরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 4 সেমি.। বাটিটিকে গলিয়ে 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট শঙ্কু তৈরি করা হলো। শঙ্কুটির উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 4. একটি লম্ব বৃত্তাকার ড্রামে কিছু জল আছে। 2.8 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ব্যাস ও 3 ডেসিমি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরো ওই জলে সম্পূর্ণ ডোবালাম। এর ফলে ড্রামের জলতল 0.64 ডেসিমি. উপরে উঠে এল। ড্রামটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{2.8}{2}$ ডেসিমি. $= 1.4$ ডেসিমি. এবং উচ্চতা $= 3$ ডেসিমি.

$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi \times (1.4)^2 \times 3$ ঘন ডেসিমি.

ধরি, ড্রামটির ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r ডেসিমি.

শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরোটি ড্রামের জলে ডোবানোর ফলে ড্রামে জলতল 0.64 ডেসিমি. উপরে উঠেছে।

$\therefore$ ড্রামে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত জলের আয়তন = শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরোর আয়তন।

$\therefore \pi r^2 \times 0.64 = \frac{1}{3}\pi \times (1.4)^2 \times 3$ বা, $r^2 =$ ☐ বা, $r = \pm$ ☐ **[নিজে করি]**

কিন্তু, ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore r \neq -$ ☐ , সুতরাং, $r =$ ☐

$\therefore$ ড্রামটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য = ☐ ডেসিমি.।

প্রয়োগ : 5. 28 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙে কিছু জল আছে এবং তাতে সমান ব্যাসের তিনটি নিরেট লোহার গোলক সম্পূর্ণ ডোবানো যায়। গোলকগুলি ডোবানোর আগে জলতলের যে উচ্চতা ছিল গোলকগুলি ডোবানোর ফলে জলতলের উচ্চতা তার থেকে 7 সেমি. বৃদ্ধি পায়। গোলকগুলির ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : ধরি, গোলকগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

শর্তানুযায়ী, $3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \times 14^2 \times 7$ $\therefore r =$ ☐

প্রয়োগ : 6. 21 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ ও 21 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার ড্রাম এবং 21 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট লোহার গোলক নিলাম। ওই ড্রাম ও নিরেট লোহার গোলকটির আয়তন অনুপাত হিসাব করে লিখি। (ড্রামের বেধ অগ্রাহ্য করব)। এবার ড্রামটি সম্পূর্ণ জলপূর্ণ করে ওই গোলকটি ড্রামটিতে সম্পূর্ণ ডুবিয়ে তুলে নিলাম। এরফলে এখন ড্রামে জলের গভীরতা কত হলো নির্ণয় করি।

ড্রামটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 21 সেমি. এবং উচ্চতা 21 সেমি.

$\therefore$ ড্রামটির আয়তন $= \pi \times 21^2 \times 21$ ঘন সেমি.

গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 সেমি. $\therefore$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{21}{2}$ সেমি.

$\therefore$ গোলকটির আয়তন $\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{21}{2}\right)^3$ ঘন সেমি.

$\therefore$ ড্রামের আয়তন : গোলকের আয়তন $= \pi \times 21 \times 21 \times 21 : \frac{4}{3}\pi \times \frac{21 \times 21 \times 21}{2 \times 2 \times 2} = 6:1$

গোলকটিকে সম্পূর্ণ ডুবিয়ে তুলে নেওয়ায় গোলকটি তার সমআয়তন জল অপসারিত করল।

ধরি, গোলকটি h সেমি. উচ্চতার জল অপসারণ করে।

শর্তানুসারে, $\pi \times 21^2 \times h = \frac{4}{3}\pi \times \frac{21 \times 21 \times 21}{2 \times 2 \times 2}$ বা, $\pi \times 21 \times 21 \times h = \frac{4}{3}\pi \times \frac{21 \times 21 \times 21}{8}$ $\therefore h = 3.5$

$\therefore$ ড্রামে এখন জলের গভীরতা 21 সেমি. – 3.5 সেমি. = 17.5 সেমি.।

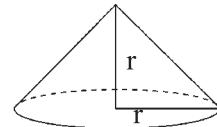
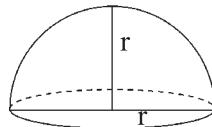
প্রয়োগ : 7. একটি নিরেট অর্ধগোলক ও একটি নিরেট শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য সমান ও উচ্চতা সমান হলে তাদের আয়তনের অনুপাত এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত হিসাব করে লিখি।

অর্ধগোলক ও শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য সমান। সুতরাং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান।

মনে করি, অর্ধগোলক ও শঙ্কুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।

অর্ধগোলকের উচ্চতা = অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

প্রদত্ত শর্তানুসারে, শঙ্কুর উচ্চতা = r একক।

$\therefore$ শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা = $\sqrt{r^2+r^2}$ একক = $\sqrt{2}\,r$ একক

এখানে, $\dfrac{\text{অর্ধগোলকের আয়তন}}{\text{শঙ্কুর আয়তন}} = \dfrac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^2 . r} = \dfrac{2}{1}$ $\therefore$ অর্ধগোলক ও শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত 2 : 1

এবং অর্ধগোলক এবং শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত $= \dfrac{2\pi r^2}{\pi . r . \sqrt{2} . r} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} : 1$

প্রয়োগ : 8. 2.1 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট পিতলের গোলককে পিটিয়ে 7 সেমি. লম্বা একটি লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে দণ্ডটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।
দণ্ডটি ও গোলকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করি।

ধরি, লম্ব বৃত্তাকার দণ্ডের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

শর্তানুসারে, $\pi r^2 \times 7 = \frac{4}{3}\pi \times (21)^3$ [$\because$ 2.1 ডেসিমি. = 21 সেমি.]

$\therefore r^2 = \frac{4}{3} \times \frac{21\times21\times21}{7}$ বা, r = ± ☐ **[নিজে করি]**

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং, $r \neq -$ ☐ $\therefore$ r = ☐

$\therefore$ দণ্ডের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 42 সেমি.। $\therefore$ দণ্ডের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 84 সেমি.

দণ্ড ও গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত = ☐ : ☐ **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

প্রয়োগ : 9. 9 সেমি. দৈর্ঘ্যের অন্তর্ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি অর্ধগোলাকার পাত্র সম্পূর্ণ জলপূর্ণ আছে। এই জল 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাস ও 4 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট চোঙাকৃতি বোতলে ভর্তি করে রাখব। হিসাব করে দেখি পাত্রটি খালি করতে কতগুলি বোতল দরকার।

মনে করি, n সংখ্যক বোতল দরকার।

1 টি বোতলে জল রাখা যায় $= \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4$ ঘন সেমি. [$\because$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{3}{2}$ সেমি.]

$\therefore$ n টি বোতলে জল রাখা যায় $= \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4 \times n$ ঘন সেমি.

শর্তানুসারে, $\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4 \times n = \frac{2}{3}\pi(9)^3$ $\therefore n = \dfrac{\frac{2}{3}\times9\times9\times9}{4\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} = \dfrac{6\times9\times9}{3\times3} = 54$

$\therefore$ জলপূর্ণ পাত্রটি খালি করতে 54 টি বোতল দরকার।

প্রয়োগ : 10. $12\sqrt{2}$ সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট এবং 21 মিটার লম্বা একটি লম্ব বৃত্তাকার কাঠের গুঁড়ি থেকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি আয়তঘনকাকার কাঠের লগ তৈরি করলে তাতে কত পরিমাণ কাঠ থাকবে এবং কত পরিমাণ কাঠ নষ্ট হবে হিসাব করি।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি কাঠের গুঁড়ির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{12\sqrt{2}}{2}$ সেমি. = $6\sqrt{2}$ সেমি.

কাঠের গুঁড়ির দৈর্ঘ্য = 21 মিটার = 2100 সেমি.

কাঠের গুঁড়ির আয়তন = ভূমিতলের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \frac{22}{7} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times 2100$ ঘন সেমি.

= 475200 ঘন সেমি. = 475.2 ঘন ডেসিমি.

বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কাঠের গুঁড়িকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কাঠের লগে পরিণত করতে হবে।

সুতরাং, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য = বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসের দৈর্ঘ্য

ধরি, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a সেমি.

সুতরাং, $\sqrt{2}\,a = 12\sqrt{2}$

$\therefore a = 12$

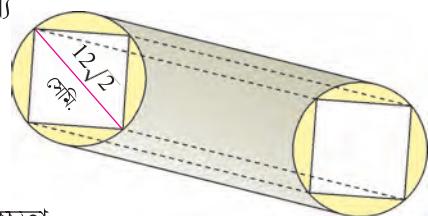
∴ আয়তঘনাকার কাঠের লগের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= 12 × 12 × 2100 ঘন সেমি.

= 302400 ঘন সেমি.

= 302.4 ঘন ডেসিমি.

∴ আয়তঘনাকার কাঠের লগে কাঠ থাকবে 302.4 ঘন ডেসিমি.

এবং কাঠ নষ্ট হবে (475.2 – 302.4) ঘন ডেসিমি. = 172.8 ঘন ডেসিমি.

প্রয়োগ : 11. 13 মিটার দীর্ঘ এবং 11 মিটার প্রশস্ত একটি ছাদের জল বের হওয়ার নলটি বৃষ্টির সময় বন্ধ ছিল। বৃষ্টির পর দেখা গেল ছাদে 7 সেমি. গভীর জল দাঁড়িয়ে গেছে। যে নলটি দিয়ে জল বের হয় তার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 7 সেমি. এবং চোঙাকারে মিনিটে 200 মিটার দৈর্ঘ্যের জল বের হয়। নলটি খুলে দিলে কতক্ষণে সব জল বেরিয়ে যাবে হিসাব করি।

ছাদে যে জল দাঁড়িয়েছে তার আয়তন = 1300 × 1100 × 7 ঘন সেমি.

নল দিয়ে প্রতি মিনিটে জল বের হয় $\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 200 \times 100$ ঘন সেমি.

= 11 × 7 × 100 × 100 ঘন সেমি.

[∵ চোঙাকৃতি জলস্তম্ভের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{7}{2}$ সেমি. এবং জলস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 200 মিটার = 200 × 100 সেমি.]

নলটি খুলে নিলে সব জল বেরিয়ে যেতে সময় লাগবে $= \frac{1300 \times 1100 \times 7}{11 \times 7 \times 100 \times 100}$ মিনিট

= 13 মিনিট

কষে দেখি 19

1. আনোয়ারদের বাড়ির সামনে একটি নিরেট লোহার স্তম্ভ আছে যার নীচের অংশ লম্ব বৃত্তাকার চোঙ আকৃতির এবং উপরের অংশ শঙ্কু আকৃতির। এদের ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 20 সেমি., চোঙাকৃতি অংশের উচ্চতা 2.8 মিটার এবং শঙ্কু আকৃতি অংশের উচ্চতা 42 সেমি.। 1 ঘন সেমি. লোহার ওজন 7.5 গ্রাম হলে, লোহার স্তম্ভের ওজন কত হবে তা হিসাব করে লিখি।

2. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 20 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি.। শঙ্কুটির সমান আয়তনবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 15 সেমি. হলে, চোঙটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

3. 24 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্রে কিছু জল আছে। 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ভূমিতলের ব্যাস ও 4 সেমি উচ্চতাবিশিষ্ট 60 টি নিরেট শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরো ওই জলে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত করলে, জলতলের উচ্চতা কতটা বৃদ্ধি পাবে হিসাব করে লিখি।

4. একই দৈর্ঘ্যের ভূমিতলের ব্যাসার্ধ এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট শঙ্কু ও একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 5:8 হলে, উহাদের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার অনুপাত নির্ণয় করি।

5. 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট লোহার গোলককে গলিয়ে 1 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের কয়টি নিরেট গুলি পাওয়া যাবে হিসাব করে দেখি।

6. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার লোহার দণ্ডের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 32 সেমি. এবং দৈর্ঘ্য 35 সেমি.। দণ্ডটি গলিয়ে 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ ও 28 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট কতগুলি নিরেট শঙ্কু তৈরি করা যাবে তা হিসাব করে লিখি।

7. 4.2 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ধারবিশিষ্ট একটি নিরেট কাঠের ঘনক থেকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে যে নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু পাওয়া যাবে তার আয়তন নির্ণয় করি।

8. একটি নিরেট গোলক ও একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান ও তাদের ঘনফলও সমান হলে, চোঙটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার অনুপাত হিসাব করে লিখি।

9. 6.6 ডেসিমি. দীর্ঘ, 4.2 ডেসিমি. প্রশস্ত এবং 1.4 ডেসিমি. পুরু একটি তামার নিরেট আয়তঘনাকার টুকরো গলিয়ে 2.1 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের কয়টি নিরেট গোলক ঢালাই করা যাবে এবং প্রতিটি গোলকে কত ঘন ডেসিমি. ধাতু থাকবে হিসাব করে দেখি।

10. 4.2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি সোনার নিরেট গোলক পিটিয়ে 2.8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে, দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

11. 6 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি নিরেট রৌপ্য গোলক গলিয়ে 1 ডেসিমি. লম্বা একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে, দণ্ডটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

12. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ডের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.2 ডেসিমি.। সেই দণ্ডটি গলিয়ে 21টি নিরেট গোলক তৈরি করা হলো। গোলকগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যদি 8 সেমি. হয়, তবে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত ছিল তা হিসাব করে লিখি।

13. 21 ডেসিমি. দীর্ঘ, 11 ডেসিমি. প্রশস্ত এবং 6 ডেসিমি. গভীর একটি চৌবাচ্চা অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। এখন সেই চৌবাচ্চায় যদি 21 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের 100টি লোহার গোলক সম্পূর্ণ ডুবিয়ে দেওয়া হয়, তবে জলতল কত ডেসিমি. উঠবে তা হিসাব করে লিখি।

14. সমান ভূমিতলের ব্যাস এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট শঙ্কু, একটি নিরেট অর্ধগোলক এবং একটি নিরেট চোঙের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করি।

15. 1 সেমি. পুরু সিসার পাতের তৈরি একটি ফাঁপা গোলকের বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। গোলকটি গলিয়ে 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে, দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

16. 2 মিটার লম্বা একটি আয়তঘনাকার কাঠের লগের প্রস্থচ্ছেদ বর্গাকার এবং তার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 14 ডেসিমি.। সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে ওই লগটিকে যদি একটি লম্ব বৃত্তাকার গুঁড়িতে পরিণত করা যায়, তবে তাতে কত ঘন মিটার কাঠ থাকবে এবং কত ঘন মিটার কাঠ নষ্ট হবে হিসাব করি।
[**উত্তর সংকেত :** বর্গাকার চিত্রের অন্তর্লিখিত পরিবৃত্ত হলে, বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য বর্গাকার চিত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান।]

17. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i) r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে r একক উচ্চতার একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করা হলো। শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

(a) 2r একক (a) 3r একক (a) r একক (a) 4r একক

(ii) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকে গলিয়ে একই দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো যার উচ্চতা 5 সেমি.। শঙ্কুটির উচ্চতা

(a) 10 সেমি. (b) 15 সেমি. (c) 18 সেমি. (d) 24 সেমি.

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং উচ্চতা 2r একক। চোঙটির মধ্যে সর্ববৃহৎ যে গোলকটি রাখা যাবে তার ব্যাসের দৈর্ঘ্য

(a) r একক (b) 2r একক (c) $\frac{r}{2}$ একক (d) 4r একক

(iv) r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট অর্ধগোলক থেকে সর্ববৃহৎ যে নিরেট শঙ্কু কেটে নেওয়া যাবে তার আয়তন

(a) $4\pi r^3$ ঘন একক (b) $3\pi r^3$ ঘন একক (c) $\frac{\pi r^3}{4}$ ঘন একক (d) $\frac{\pi r^3}{3}$ ঘন একক

(v) x একক দৈর্ঘ্যের ধারবিশিষ্ট একটি নিরেট ঘনক থেকে সর্ববৃহৎ একটি নিরেট গোলক কেটে নেওয়া হলে, গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য

(a) x একক (b) 2x একক (c) $\frac{x}{2}$ একক (d) 4x একক

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) দুটি একই ধরনের নিরেট অর্ধগোলক যাদের ভূমিতলের প্রত্যেকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং তা ভূমি বরাবর জোড়া হলে, মিলিত ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হবে $6\pi r^2$ বর্গ একক।

(ii) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং উচ্চতা h একক এবং তির্যক উচ্চতা ℓ একক। শঙ্কুটির ভূমিতলকে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমিতল বরাবর জুড়ে দেওয়া হলো। যদি চোঙের ও শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা একই হয় তবে মিলিত ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $(\pi r\ell + 2\pi rh + 2\pi r^2)$ বর্গ একক।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ ও দুটি অর্ধগোলকের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান। দুটি অর্ধগোলককে চোঙটির দুটি সমতলে আটকে দেওয়া হলে নতুন ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = একটি অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল + _____ বক্রতলের ক্ষেত্রফল + অপর অর্ধগোলকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল।

(ii) একমুখ কাটা একটি পেনসিলের আকার শঙ্কু ও _____ সমন্বয়।

(iii) একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো। গোলক ও চোঙের আয়তন _____।

18. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকে গলিয়ে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো। উভয়ের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান। যদি শঙ্কুর উচ্চতা 15 সেমি. হয়, তাহলে নিরেট চোঙের উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি।

(ii) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু এবং একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান এবং আয়তন সমান। গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য এবং শঙ্কুর উচ্চতা অনুপাত কত তা হিসাব করে লিখি।

(iii) সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাস এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ, নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু এবং নিরেট গোলকের আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

(iv) একটি ঘনবস্তুর নীচের অংশ অর্ধগোলক আকারের এবং উপরের অংশ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকারের। যদি দুটি অংশের তলের ক্ষেত্রফল সমান হয়, তাহলে ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত হিসাব করে লিখি।

(v) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর, ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান। গোলকের আয়তন শঙ্কুর আয়তনের দ্বিগুণ হলে, শঙ্কুর উচ্চতা এবং ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি।

20 ত্রিকোণমিতি : কোণ পরিমাপের ধারণা

TRIGONOMETRY : CONCEPT OF MEASUREMENT OF ANGLE

প্রতিদিন বিকালে আমরা বন্ধুরা পুকুরের ধারের বড়ো মাঠে নানান ধরনের খেলা খেলি। আমরা ঠিক করেছি আজ বিকালে মাঠে ঘুড়ি

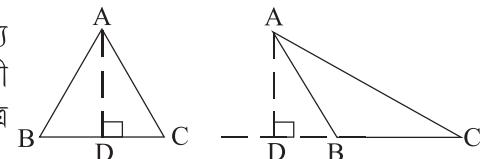
ওড়াব। তাই আজ বিকাল 4টের সময়ে আমরা সকলে কিছু ঘুড়ি ও লাটাই নিয়ে মাঠে জড়ো হয়েছি।

আমি ও শুভ ভালো ঘুড়ি ওড়াতে পারি না। তাই আমরা মাঠের ধারে বসে বন্ধুদের ঘুড়ি ওড়ানো দেখছি।
প্রথমে রীনা অন্য বন্ধুদের সাহায্য নিয়ে ঘুড়ি ওড়াল। দেখছি, রীনার লাল ঘুড়ি ভূমি থেকে অনেক উপরে উঠেছে।

1 কিন্তু রীনার ঘুড়ি ভূমি থেকে কতটা উপরে উঠল কীভাবে পাব?

এমন ধরনের উচ্চতা, উঁচু স্তম্ভের উচ্চতা [স্তম্ভের উপরে না উঠেও], খরস্রোতা নদী কতটা চওড়া ইত্যাদি দূরত্ব সহজে পরিমাপের পদ্ধতি গণিতের একটি বিশেষ শাখায় আলোচনা করা হয়। গণিতের এই বিশেষ শাখাটি হলো 'ত্রিকোণমিতি' [Trigonometry]।

এই ত্রিকোণমিতি শব্দটি এসেছে গ্রিক শব্দ 'Tri' [যার অর্থ তিন], 'gon' [যার অর্থ কোণ] এবং 'metron' [যার অর্থ পরিমাপ] থেকে।

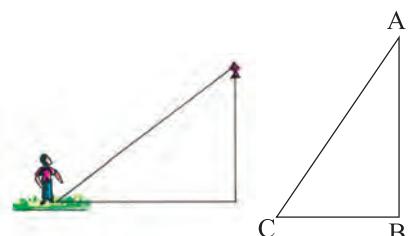
'ত্রিকোণমিতি' হলো সমকোণী ত্রিভুজের কোণ এবং বাহুর মধ্যে সম্পর্কের আলোচনা। এছাড়াও সূক্ষ্মকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজের আলোচনাও ত্রিকোণমিতিতে করা হবে। কিন্তু সেক্ষেত্রে ত্রিভুজগুলিকে সমকোণী ত্রিভুজে ভেঙে নেওয়া হয়। যেমন :

পূর্বে পৃথিবী থেকে গ্রহ এবং নক্ষত্রের দূরত্ব নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করা হতো। কিন্তু এখন ইঞ্জিনিয়ারিং-এ ত্রিকোণমিতির উন্নত কৌশল ব্যবহার করা হয় এবং ভৌতবিজ্ঞানেও ত্রিকোণমিতির ধারণা ব্যবহার করা হয়।

আমি রীনার ঘুড়ির অবস্থান খাতায় আঁকি ও কী পাই দেখি।

ধরি, পাশের ছবির,

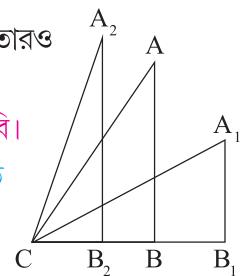
C বিন্দু ভূমিতে রীনার অবস্থান

A বিন্দু রীনার ঘুড়ির অবস্থান

এবং AB ভূমি থেকে ঘুড়ির অবস্থানের লম্ব দূরত্ব বা উচ্চতা।

দেখছি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ পেয়েছি যার $\angle ACB$ একটি ☐ কোণ। [সূক্ষ্ম/স্থূল]

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle ACB$-এর মানের পরিবর্তনের সঙ্গে AB উচ্চতারও পরিবর্তন হচ্ছে।

2 একটি কোণের মান 360^{o}-এর চেয়ে বেশি হতে পারে কি? ছবি এঁকে জানার চেষ্টা করি।

কোনো একটি বিন্দু থেকে যদি দুটি রশ্মি নির্গত হয় তবে রশ্মি দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলকে দুটি অঞ্চলে বিভক্ত করে। ওই রশ্মিদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন অঞ্চলদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে ওই বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ বলা হয়।

পাশের চিত্রে, O বিন্দু থেকে OA এবং OB রশ্মিদুটি নির্গত হওয়ায় O বিন্দুতে $\angle AOB$ ও প্রবৃদ্ধকোণ $\angle BOA$ উৎপন্ন হয়েছে, এদের 'জ্যামিতিক কোণ' বলা হয়। জ্যামিতিক কোণের ক্ষেত্রে দিক ছাড়া কোণের পরিমাণই মূল বিচার্য বিষয়।

বুঝেছি, জ্যামিতিক কোণ 0° থেকে 360° পর্যন্ত যে-কোনো পরিমাপের হতে পারে।

রশ্মির ঘূর্ণনের দ্বারাও কি কোণের ধারণা করা যায়?

রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ও ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরলে কী কী পাব দেখি।

একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দু, যে বিন্দু থেকে রশ্মিটি নির্গত হয় তাকে স্থির রেখে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে যদি একই তলে রশ্মিটি ঘোরাই, তবে সেই রশ্মি ঘূর্ণনের পর প্রথম অবস্থানের সঙ্গে তার পরবর্তী প্রতিটি অবস্থানে সেই প্রান্তবিন্দুতে এক একটি কোণ উৎপন্ন করে।

পাশের চিত্রে, OA রশ্মির প্রান্তবিন্দু O-কে স্থির রেখে একই তলে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়ে রশ্মির OA_1, OA_2, OA_3 ইত্যাদি অবস্থান পেয়েছি যারা O বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle AOA_1$, $\angle AOA_2$, $\angle AOA_3$ ইত্যাদি বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন করেছে। এই কোণগুলিকে **ত্রিকোণমিতিক কোণ** বলা হয়।

ত্রিকোণমিতিক কোণের ক্ষেত্রে ঘূর্ণায়মান রশ্মির দিক ও তার ফলে সৃষ্ট কোণের পরিমাপ উভয়ই বিচার করা হয়। ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরলে উৎপন্ন কোণটিকে রীতি অনুসারে **ধনাত্মক কোণ** বলে এবং রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরলে **ঋণাত্মক কোণ** সৃষ্টি হয়।

পাশের চিত্রে, OA রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle AOA_1 = +\theta^\circ$ (Theta) এবং $\angle AOA_2 = +\alpha^\circ$ (Alpha) কোণ উৎপন্ন করেছে।

$\angle AOA_1 = \theta^\circ$ এবং $\angle AOA_2 = \alpha^\circ$ লেখা হয় [(+) চিহ্ন ব্যবহার করা হয় না]

কিন্তু পাশের চিত্রে, OB রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle BOB_1 = -\theta^\circ$ এবং $\angle BOB_2 = -\alpha^\circ$ কোণ উৎপন্ন করেছে। $(\theta > 0, \alpha > 0)$

কিন্তু কোনো কোণের একটি রশ্মি যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সম্পূর্ণ একবার আবর্তনের পর আবার প্রথম অবস্থানে আসে তখন কী পরিমাণ কোণ পাব দেখি।

কোনো কোণের একটি রশ্মির ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে যতবার পূর্ণ আবর্তন হবে কোণের পরিমাণ ততবার 360° করে বেড়ে যাবে। আবার রশ্মিটির ঘড়ির কাঁটার দিকে যতবার পূর্ণ আবর্তন হবে কোণের পরিমাণ ততবার 360° করে কমে যাবে।

বুঝেছি, পাশের চিত্রে OP_1 রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OP_1 অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে একবার সম্পূর্ণ আবতর্নের পর [অর্থাৎ আরও 360° ঘূর্ণনের পরে] আবার, OP_1 অবস্থানে এসেছে এবং সেক্ষেত্রে পেয়েছি, $\angle POP_2 = 360^\circ + \theta^\circ$ যখন, $\angle POP_1 = \theta^\circ$

[এখানে (ii) নং চিত্রে, OP_2 ও OP_1 রশ্মিদ্বয় সমাপতিত হয়েছে]

একইভাবে পাশের চিত্র থেকে দেখছি, ON_1 রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার দিকে একবার সম্পূর্ণ আবর্তনের পর ON_2 (ON_1 রশ্মির উপর সমাপতিত হয়েছে) অবস্থানে এসেছে এবং এক্ষেত্রে $\angle NON_2 = -(360^\circ + \theta^\circ)$ যখন, $\angle NON_1 = -\theta^\circ$

(3) যে-কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি যদি তার প্রাথমিক অবস্থান থেকে প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে দু-বার সম্পূর্ণ আবর্তনের পর আরও 30° কোণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করে, তবে সেক্ষেত্রে কোণের পরিমাণ কী হবে, হিসাব করি।

নির্ণেয় কোণের পরিমাপ $= 2\times360^\circ+30^\circ = \square$

যদি কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার প্রাথমিক অবস্থান থেকে প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 3 বার সম্পূর্ণ আবর্তনের পর আরও 45° ঘূর্ণন সম্পন্ন করে,সেক্ষেত্রে কোণের পরিমাণ কত হবে হিসাব করি।
[নিজে করি]

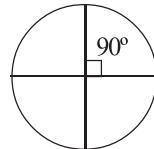
> জ্যামিতিক কোণের সর্বনিম্ন ও সর্বাধিক পরিমাপ হয় যথাক্রম 0° এবং 360°; কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ 0° থেকে 360° ছাড়াও 0°-এর কম যে-কোনো পরিমাপ ও 360°-এর বেশি যে-কোনো পরিমাপ হতে পারে।

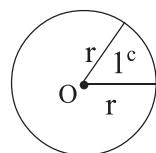
(4) কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণ কী কী পদ্ধতিতে পরিমাপ করা হয় দেখি।

ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের সাধারণভাবে দুটি পদ্ধতি হলো **(i) ষষ্টিক পদ্ধতি (Sexagesimal System), (ii) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)**

ষষ্টিক পদ্ধতি : দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখা একে অপরের উপর লম্বভাবে দাঁড়ালে যে কোণ তৈরি হয় তাকে সমকোণ বলা হয়।

এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে 90টি সমান ভাগে বিভক্ত করা হয় এবং তার প্রতিটি ভাগকে এক ডিগ্রি (1°) বলা হয় এবং এই কারণেই এক সমকোণ $= 90^\circ$; এক ডিগ্রিকে পুনরায় 60 টি সমান ষষ্টিক মিনিটে (Minutes) ও প্রতি মিনিটকে সমান 60টি ষষ্টিক সেকেন্ডে (Seconds) বিভক্ত করা হয়।

$\therefore$ পেলাম, 1 সমকোণ $= 90^\circ$ (ডিগ্রি)
1° (ডিগ্রি) $= 60'$ (মিনিট)
$1'$ (মিনিট) $= 60''$ (সেকেন্ড)

বৃত্তীয় পদ্ধতি : একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ ওই বৃত্তের কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তার পরিমাপকে এক রেডিয়ান [Radian] বলা হয় এবং লেখা হয় 1^c; যে-কোনো একটি বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের দৈর্ঘ্যের অনুপাত ধ্রুবক। এই সম্পর্কটির উপর ভিত্তি করেই এই পদ্ধতির একক নির্ধারিত হয়েছে।

কিন্তু যে-কোনো ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বৃত্তের সাহায্যে রেডিয়ানের সংজ্ঞা প্রকাশ করলে সর্বদা কি এটি একটি ধ্রুবক কোণ হবে? বিভিন্ন ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বৃত্ত এঁকে হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

(1) একটি আর্টপেপারে তিনটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকলাম।

(2) সবচেয়ে ছোটো বৃত্তটির বৃত্ত থেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের একটি বৃত্তচাপ AD বৃত্ত বরাবর সরু তার বসিয়ে কেটে নিলাম এবং O, A ও O, D যোগ করে $\angle AOD$ পেলাম যা ওই ছোটো বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের চাপের দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ।

(3) OA ও OD বর্ধিত করলাম যা অন্য দুটি বৃত্তকে যথাক্রমে B, C ও E, F বিন্দুতে ছেদ করল।

মেপে দেখছি, BE চাপটির দৈর্ঘ্য অর্থাৎ BE চাপ বরাবর রাখা সুতোর দৈর্ঘ্য=OB=সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

আবার CF চাপটির দৈর্ঘ্য = ☐ [নিজে হাতেকলমে যাচাই করে লিখি]

= সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

$\therefore$ পেলাম, $\angle BOE$ এবং $\angle COF$-ও সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপের দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে-কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চাপ সবসময় কেন্দ্রে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণের কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ, রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

আমি যে-কোনো বৃত্ত এঁকে হাতেকলমে যাচাই করে দেখছি রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ। **[নিজে করি]**

5 **আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।**

প্রমাণ : ধরি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং তার ব্যাসার্ধ OA

ধরি, OA = r একক

OA ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের একটি চাপ AB বৃত্তের কেন্দ্র O-তে $\angle AOB$ উৎপন্ন করেছে। সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে, $\angle AOB = 1$ রেডিয়ান।

আমরা জানি যে, বৃত্ত দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ চার সমকোণের সমান।

$\therefore \dfrac{\text{বৃত্তচাপ AB-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \dfrac{r}{2\pi r} = \dfrac{1}{2\pi}$

আবার, $\dfrac{\angle AOB}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{4 \text{ সমকোণ}}$

জ্যামিতি থেকে পাওয়া যায়, যে-কোনো বৃত্তের বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের চাপের দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত সেইসব চাপের দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

সুতরাং, $\dfrac{\angle AOB}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{\text{বৃত্তচাপ AB-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}}$

বা, $\dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{1}{2\pi}$

বা, 1 রেডিয়ান $= \dfrac{4 \text{ সমকোণ}}{2\pi} = \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$ এবং এই মানটি একটি ধ্রুবক সংখ্যা কারণ 2 সমকোণ ও π উভয়েই ধ্রুবক।

$\therefore$ পেলাম, 1 রেডিয়ান $= \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$

বা, $1^c = \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$

অর্থাৎ, π রেডিয়ান = 2 সমকোণ বা 180°

বা, π^c = 2 সমকোণ বা, 180°

6 আমি 1 রেডিয়ানের মান ষষ্ঠিক পদ্ধতিতে কী হবে হিসাব করে লিখি।

π রেডিয়ান = 2 সমকোণ = 180°

$\therefore$ 1 রেডিয়ান $= \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{\frac{22}{7}}$ [গণনার জন্য π-এর আসন্ন মান $\frac{22}{7}$ নেওয়া হয়]

$= \frac{180^\circ \times 7}{22} = 57^\circ 16' 22''$ (প্রায়) $\therefore$ 1 রেডিয়ান = $57^\circ 16' 22''$ (প্রায়)

$\frac{630^\circ}{11} \rightarrow$

```
    57
11 | 630
   – 55
     80
    –77
      3
```

$3^\circ = 3 \times 60' = 180'$

```
    16
11 | 180
   – 11
     70
    –66
      4
```

$4' = 4 \times 60'' = 240''$

```
    21.8
11 | 240
   – 22
     20
    –11
      90
    – 88
       2
```

$\frac{630^\circ}{11} = 57^\circ 16' 22''$ (প্রায়)

$21.8'' \approx 22''$

7 আমি 1°-র মান বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কী হবে হিসাব করে দেখি।

$180^\circ = \pi^c$

বা, $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{22}{7 \times 180}\right)^c$ $\therefore$ দেখছি, $1^\circ < 1^c$ $\left[\because \frac{22}{7 \times 180} < 1\right]$

বুঝেছি, পদ্ধতি দুটির এককাবলির মধ্যে সম্পর্ক পেলাম।

[ফাঁকা ঘরে নিজে লিখি]

ষষ্ঠিক পদ্ধতি	বৃত্তীয় পদ্ধতি
360°	2π রেডিয়ান = $2\pi^c$
180°	☐ = π^c
90°	$\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান = ☐
60°	☐ = $\frac{\pi^c}{3}$
☐	$\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান = $\frac{\pi^c}{4}$
30°	$\frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান = ☐

মনে রাখব : (1) ষষ্ঠিক পদ্ধতির কোণ বোঝানোর জন্য কোণের পরিমাণের উপরে '^{o}' চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়, যেমন 60 ডিগ্রি = 60°; আবার বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কোণ বোঝানোর জন্য কোণের পরিমাণের উপরে '^{c}' -এই চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। যেমন, 1 রেডিয়ান = 1^c

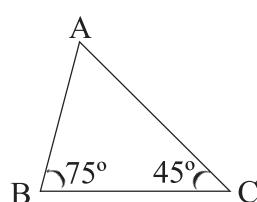
(2) বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কোণের মান প্রকাশ করার সময় আমরা π ও তার অংশ দিয়ে তা প্রকাশ করি। π দিয়ে প্রকাশ করলে সাধারণত আমরা '^{c}' এই চিহ্নটি সর্বদা ব্যবহার করি না। যেমন, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ লেখা হয়।

প্রয়োগ : 1. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের ষষ্ঠিক মান যথাক্রমে 75° ও 45°; তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

ধরি, ΔABC -এর $\angle ABC = 75^\circ$ এবং $\angle ACB = 45^\circ$

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) =$ ☐

আবার, $180^\circ = \pi$ $\therefore 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান $\frac{\pi}{3}$

প্রয়োগ : 2. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের ষষ্টিক মান যথাক্রমে 65° ও 85° হলে, তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 3. একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি কোনো একটি অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে দু-বার পূর্ণ আবর্তনের পরেও আরও 30° কোণ আবর্তন করে। ত্রিকোণমিতিক পরিমাপে কোণটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

যেহেতু রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরছে,

$\therefore$ কোণটি ☐ [ধনাত্মক/ঋণাত্মক] হবে।

ঘূর্ণায়মান রশ্মির একবার পূর্ণ আবর্তনের জন্য ☐ ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন হয়।

$\therefore$ 2 বার পূর্ণ আবর্তনের জন্য কোণ উৎপন্ন করবে $2\times360^\circ = 720^\circ$

যেহেতু 2 বার পূর্ণ আবর্তনের পরেও 30° কোণ আবর্তন করেছে,

সুতরাং, ষষ্টিক পদ্ধতিতে কোণের মান $720^\circ+30^\circ = 750^\circ$

আবার, $180^\circ = \pi \quad \therefore 750^\circ = \left(\frac{750}{180}\pi\right) = 4\frac{1}{6}\pi$

প্রয়োগ : 4. আমি $3750''$ কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করি।

$60'' = 1'$

$$\therefore 60\overline{)3750}\,(62 \qquad 3750 - 360 = 150,\quad 150 - 120 = 30$$

$60' = 1^\circ$

$$\therefore 60\overline{)62}\,(1 \qquad 62 - 60 = 2$$

$\therefore 3750'' = 1^\circ2'30''$

প্রয়োগ : 5. আমি 85.12° কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করি।

$$\begin{aligned}85.12^\circ &= 85^\circ+(0.12)^\circ\\ &= 85^\circ+(0.12\times60') \quad [\because 1^\circ = 60']\\ &= 85^\circ + 7.2'\\ &= 85^\circ+7'+0.2' = 85^\circ+7'+(0.2\times60'') \quad [\because 1' = 60'']\\ &= 85^\circ+7'+12'' = 85^\circ7'12''\end{aligned}$$

প্রয়োগ : 6. $40^\circ16'24''$ -কে রেডিয়ানে প্রকাশ করি।

$$\begin{aligned}40^\circ16'24'' &= 40^\circ+16'+24''\\ &= 40^\circ+16'+\left(\frac{24}{60}\right)' \quad [\because 60'' = 1']\\ &= 40^\circ+16'+\frac{2}{5}' = 40^\circ+\left(16+\frac{2}{5}\right)'\\ &= 40^\circ+\frac{82}{5}' = 40^\circ+\left(\frac{82}{5\times60}\right)^\circ \quad [\because 60' = 1^\circ]\\ &= 40^\circ+\left(\frac{41}{150}\right)^\circ = \square^\circ\end{aligned}$$ **[নিজে লিখি]**

যেহেতু, $180^\circ = \pi$

$$\therefore \frac{6041}{150}^\circ = \frac{\pi}{180}\times\frac{6041}{150} = \frac{6041}{27000}\pi$$

প্রয়োগ : 7. $22^{\circ}30'$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 8. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুটির অন্তর $\frac{2\pi}{5}$ রেডিয়ান। কোণ দুটির মান রেডিয়ান ও ডিগ্রিতে প্রকাশ করি।

মনে করি, সূক্ষ্মকোণ দুটির মান x^c ও y^c এবং $x>y$

শর্তানুসারে, $x+y=\frac{\pi}{2}$ এবং $x-y=\frac{2\pi}{5}$

$$x+y=\frac{\pi}{2}$$
$$x-y=\frac{2\pi}{5}$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}=\frac{9\pi}{10} \qquad \therefore x=\frac{9\pi}{20}$$
$$\therefore y=\frac{\pi}{2}-\frac{9\pi}{20}=\frac{\pi}{20}$$

আবার, $\pi=180^{\circ}$

$$\therefore x=\frac{9\pi}{20}=\frac{9\times180^{\circ}}{20}=81^{\circ}$$

এবং $y=\frac{\pi}{20}=\frac{180^{\circ}}{20}=9^{\circ}$ $\qquad\therefore$ কোণ দুটির মান $\frac{9\pi}{20}$ বা 81° এবং $\frac{\pi}{20}$ বা 9°

প্রয়োগ : 9. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত $2:5:3$; ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণটির বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।

মনে করি, কোণগুলির মান $2x$, $5x$ ও $3x$ রেডিয়ান। যেখানে x সাধারণ গুণিতক এবং $x>0$

$\therefore 2x+5x+3x=\pi$

বা, $10x=\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{10}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম কোণটির বৃত্তীয়মান হবে $2x=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$

প্রয়োগ : 10. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি। A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর মধ্যবিন্দু D-এর সংযোজক সরলরেখাংশ AD; $\angle BAD$-এর বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

উত্তর সংকেত : সমবাহু ত্রিভুজে ABC-এর $\angle BAC=60^{\circ}$ এবং সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা সংশ্লিষ্ট কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয়। $\therefore \angle BAD=30^{\circ}$

আমার বন্ধু শুভ তার খাতায় একটি বৃত্ত এঁকেছে এবং সেই বৃত্তে যে-কোনো একটি দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ XKY এঁকেছে।

(8) ওই XKY দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কেন্দ্রস্থ কোণ উৎপন্ন করবে তার বৃত্তীয় মান কীভাবে পাব দেখি। আমি r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট যে-কোনো একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে s একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে কত রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে হিসাব করি।

পাশের চিত্রে, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OX = r একক

ধরি, চাপ XKY-এর দৈর্ঘ্য s একক

s একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ XKY কেন্দ্রে $\angle XOY$ উৎপন্ন করেছে।

ধরি, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের চাপ XKP কেন্দ্র $\angle XOP$ উৎপন্ন করেছে।

$\therefore \angle XOP = 1$ রেডিয়ান [সংজ্ঞা অনুসারে]

কোনো বৃত্তের বিভিন্ন চাপের দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত সেইসব চাপের দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

সুতরাং, $\dfrac{\angle XOY}{\angle XOP} = \dfrac{\text{চাপ XKY-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{চাপ XKP -এর দৈর্ঘ্য}} = \dfrac{s}{r}$

বা, $\dfrac{\angle XOY}{1 \text{ রেডিয়ান}} = \dfrac{s}{r}$

বা, $\theta = \dfrac{s}{r}$ [ধরি, $\angle XOY = \theta$ রেডিয়ান]

$\therefore s = r\theta$

∴ **পেলাম, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে s একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কেন্দ্রস্থ কোণ উৎপন্ন করে তার বৃত্তীয় মান θ হলে, s = rθ হবে।**

প্রয়োগ : 11. যদি শুভ-র আঁকা বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 7 সেমি. হয়, তবে ওই বৃত্তে 5.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রস্থ কোণটির বৃত্তীয় মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

এখানে, r = 7 সেমি. এবং s = 5.5 সেমি.

ধরি, 5.5 সেমি. বৃত্তচাপ দ্বারা ধৃত কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান = θ

$s = r\theta$

$\therefore\ 5.5 = 7\times\theta$

বা, $\theta = \dfrac{5.5}{7} = \dfrac{55}{70} = \dfrac{11}{14}$

∴ নির্ণেয় কোণের বৃত্তীয় মান $\dfrac{11}{14}$ রেডিয়ান বা $\dfrac{11^c}{14}$ বা $\dfrac{\pi^c}{4}$ $\left(\because \dfrac{22}{7} \approx \pi\right)$

প্রয়োগ : 12. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি. হলে, ওই বৃত্তে 15 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কেন্দ্রস্থ কোণ তৈরি করে, তার বৃত্তীয় মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 13. একটি বৃত্তের অসমান দৈর্ঘ্যের দুটি চাপ কেন্দ্রে যে দুটি কোণ ধারণ করে আছে তাদের অনুপাত 5:3 এবং দ্বিতীয় কোণটির ষষ্টিক মান 45°; প্রথম কোণটির ষষ্টিক মান এবং বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

মনে করি, প্রথম কোণটির ষষ্টিক মান θ°

শর্তানুসারে, $\dfrac{\theta^\circ}{45^\circ} = \dfrac{5}{3}$ বা, $\theta^\circ = \dfrac{5\times45^\circ}{3} = 75^\circ$

যেহেতু, $180^\circ = \pi^c$ সুতরাং, $75^\circ = \dfrac{75}{180}\times\pi^c = \dfrac{5}{12}\pi^c$

∴ প্রথম কোণের ষষ্টিক মান 75° এবং বৃত্তীয় মান = $\dfrac{5}{12}\pi$

প্রয়োগ : 14. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের পরিমাপ $35^\circ57'4''$ এবং $39^\circ2'56''$ হলে, তৃতীয় কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

ত্রিভুজের দুটি কোণের সমষ্টি $= 35^\circ57'4'' + 39^\circ2'56''$
$= 74^\circ59'60''$
$= 74^\circ60'$
$= 75^\circ$

∴ তৃতীয় কোণের পরিমাপ $= 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ = 105\times\dfrac{\pi^c}{180} = \dfrac{7}{12}\pi^c$

সুতরাং, তৃতীয় কোণটির বৃত্তীয় মান $\dfrac{7}{12}\pi$

প্রয়োগ : 15. $65^\circ 35' 25''$ কোণটির পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি।

$$90^\circ = 89^\circ 60' = 89^\circ 59' 60''$$

$$\begin{array}{r} 89^\circ 59' 60'' \\ -65^\circ 35' 25'' \\ \hline 24^\circ 24' 35'' \end{array}$$

$\therefore$ $65^\circ 35' 25''$ কোণটির পূরক কোণের মান $24^\circ 24' 35''$

প্রয়োগ : 16. $27^\circ 27' 27''$ কোণটির পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 17. $75^\circ 36' 24''$ কোণটির সম্পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি।

$$180^\circ = 179^\circ 60' = 179^\circ 59' 60''$$

$$\begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ -\ \ 75^\circ 36' 24'' \\ \hline 104^\circ 23' 36'' \end{array}$$

$\therefore$ $75^\circ 36' 24''$ কোণটির সম্পূরক কোণের মান $104^\circ 23' 36''$

প্রয়োগ : 18. $85^\circ 32' 36''$ কোণটির সম্পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি 20

1. নিম্নলিখিতগুলিকে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করি :
   (i) $832'$ (ii) $6312''$ (iii) $375''$ (iv) $27\frac{1^\circ}{12}$ (v) 72.04°
2. নিম্নলিখিতগুলির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি :
   (i) 60° (ii) 135° (iii) -150° (iv) 72° (v) $22^\circ 30'$ (vi) $-62^\circ 30'$ (vii) $52^\circ 52' 30''$ (viii) $40^\circ 16' 24''$
3. ΔABC-এর $AC = BC$ এবং BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। যদি $\angle ACD = 144^\circ$ হয়, তবে ABC ত্রিভুজের প্রতিটি কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।
4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুটির অন্তর $\frac{2\pi}{5}$ হলে, ষষ্টিক পদ্ধতিতে ওই কোণদ্বয়ের মান লিখি।
5. একটি ত্রিভুজের একটি কোণের পরিমাপ 65° এবং দ্বিতীয়টির পরিমাপ $\frac{\pi}{12}$; তৃতীয় কোণটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
6. দুটি কোণের সমষ্টি 135° এবং তাদের অন্তর $\frac{\pi}{12}$ হলে, কোণ দুটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
7. একটি ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত 2:3:4 হলে, ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
8. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 28 সেমি.। এই বৃত্তে 5.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দ্বারা ধৃত কেন্দ্রীয় কোণটির বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
9. একটি বৃত্তের অসমান দৈর্ঘ্যের দুটি চাপ কেন্দ্রে যে কোণ ধারণ করে আছে তার অনুপাত 5:2 এবং দ্বিতীয় কোণটির ষষ্টিক মান 30° হলে, প্রথম কোণটির ষষ্টিক মান ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।

10. একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি $-5\frac{1}{12}\pi$ কোণ উৎপন্ন করেছে। রশ্মিটি কোনদিকে কতবার পূর্ণ আবর্তন করেছে এবং তারপরে আরও কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করেছে তা হিসাব করে লিখি।
11. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি যার সমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ $\angle ABC = 45^\circ$; $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle ABD$, $\angle BAD$, $\angle CBD$ এবং $\angle BCD$-এর বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।
12. ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC ভূমিকে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যেন CE = BC হয়। A, E যুক্ত করে ACE ত্রিভুজের কোণগুলির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।
13. কোনো চতুর্ভুজের তিনটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ ও 90° হলে, চতুর্থ কোণটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
14. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটার প্রান্তবিন্দু 1 ঘণ্টায় আবর্তন করে (a) $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান (b) $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান (c) π রেডিয়ান (d) 2π রেডিয়ান

(ii) $\frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান সমান (a) 60° (b) 45° (c) 90° (d) 30°

(iii) একটি সুষম ষড়ভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের বৃত্তীয় মান (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

(iv) $s = r\theta$ সম্পর্কে θ-এর পরিমাপ করা হয় (a) ষষ্টিক পদ্ধতিতে (b) বৃত্তীয় পদ্ধতিতে (c) ওই দুই পদ্ধতিতে (d) ওই দুই পদ্ধতির কোনোটিতেই নয়

(v) ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle A=120^\circ$ হলে, $\angle C$-এর বৃত্তীয় মান (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে রশ্মিটির ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরার জন্য উৎপন্ন কোণটি ধনাত্মক।

(ii) একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে রশ্মিটির ঘড়ির কাঁটার দিকে দু-বার পূর্ণ আবর্তনের জন্য 720° কোণ উৎপন্ন হয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) π রেডিয়ান একটি ________ কোণ।

(ii) ষষ্টিক পদ্ধতিতে 1 রেডিয়ান সমান ________ (প্রায়)।

(iii) $\frac{3\pi}{8}$ পরিমাপের কোণটির সম্পূরক কোণের বৃত্তীয় মান ________।

15. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(i) একটি কোণের ডিগ্রিতে মান D এবং ওই কোণের রেডিয়ানে মান R হলে, $\frac{R}{D}$-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $63^\circ 35' 15''$ পরিমাপের কোণটির পূরক কোণের মান লিখি।

(iii) একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের পরিমাপ $65^\circ 56' 55''$ এবং $64^\circ 3' 5''$ হলে, তৃতীয় কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

(iv) একটি বৃত্তে 220 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে 63° পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(v) একটি ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটার প্রান্তবিন্দু 1 ঘণ্টা আবর্তনে যে পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করে তার বৃত্তীয় মান লিখি।

21 সম্পাদ্য: মধ্যসমানুপাতী নির্ণয়
DETERMINATION OF MEAN PROPORTIONAL

আমাদের বাড়ির একতলায় একটি গানের স্কুল আছে। পাড়ার অনেক ছেলেমেয়েরা গান শিখতে আসে। আমিও সেখানে গান শিখি। গানের স্কুলের ঘরের মেঝেতে যে মাদুরটা বিছানো হয় সেটি খারাপ হয়ে গেছে। আমার বন্ধু সুমিত 4 মিটার লম্বা ও 3 মিটার চওড়া একটি আয়তক্ষেত্রাকার মাদুর অর্ডার দিয়ে তৈরি করে এনেছে। গানের স্কুলের ঘরটি বর্গক্ষেত্রাকার। তাই এই মাদুরটি ঠিক মতো বিছানো যাচ্ছে না।

কিন্তু এই আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরটি যদি বর্গক্ষেত্রাকার হতো তবে কি বর্গক্ষেত্রাকার ঘরের মেঝেতে বিছানো যেত? এই আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরের সমান ক্ষেত্রফলের বর্গক্ষেত্রাকার মাদুরের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

4 মিটার লম্বা ও 3 মিটার চওড়া আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরের সমান ক্ষেত্রফলের বর্গক্ষেত্রাকার মাদুরের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{4 \times 3}$ মিটার।

4 ও 3-এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ , 12-এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

কিন্তু জ্যামিতিক উপায়ে কি 4 ও 3-এর মধ্যসমানুপাতী বা $\sqrt{12}$-এর মান নির্ণয় সম্ভব? অঙ্কনের চেষ্টা করি।

সম্পাদ্য :1. জ্যামিতিক উপায়ে a ও b-এর মধ্যসমানুপাতী বা $\sqrt{ab}$-এর মান নির্ণয়।

প্রথম পদ্ধতি a একক ও b একক দৈর্ঘ্যের দুটি সরলরেখাংশ অঙ্কন করলাম। এই দুটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i)যে-কোনো রশ্মি AX অঙ্কন করলাম।

(ii)AX থেকে a একক দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশের সমান করে AB অংশ এবং BX থেকে b একক দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশের সমান করে BC অংশ কেটে নিলাম।

(iii) AC সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, AC সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA বা OC দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করি।

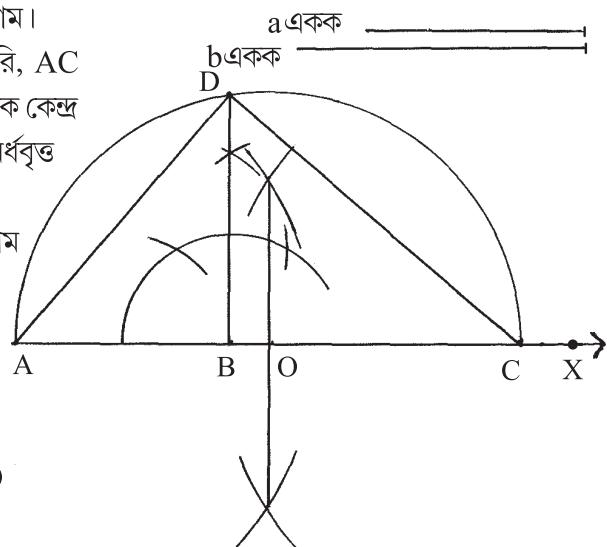
(iv) B বিন্দুতে BC-এর উপর লম্ব অঙ্কন করলাম যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

তাহলে BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য হলো AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।
অর্থাৎ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মান
= (a একক ও b একক-এর মধ্যসমানুপাতীর মান)
= $\sqrt{ab}$ একক

প্রমাণ : A, D ও C, D যুক্ত করলাম। $\angle ADC$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle ADC = 1$ সমকোণ।

ADC সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু D থেকে DB, AC-এর উপর লম্ব।

$\therefore \Delta ABD$ ও ΔCBD সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$ বা, $BD^2 = AB.BC = a.b$

$\therefore BD = \sqrt{ab}$ একক

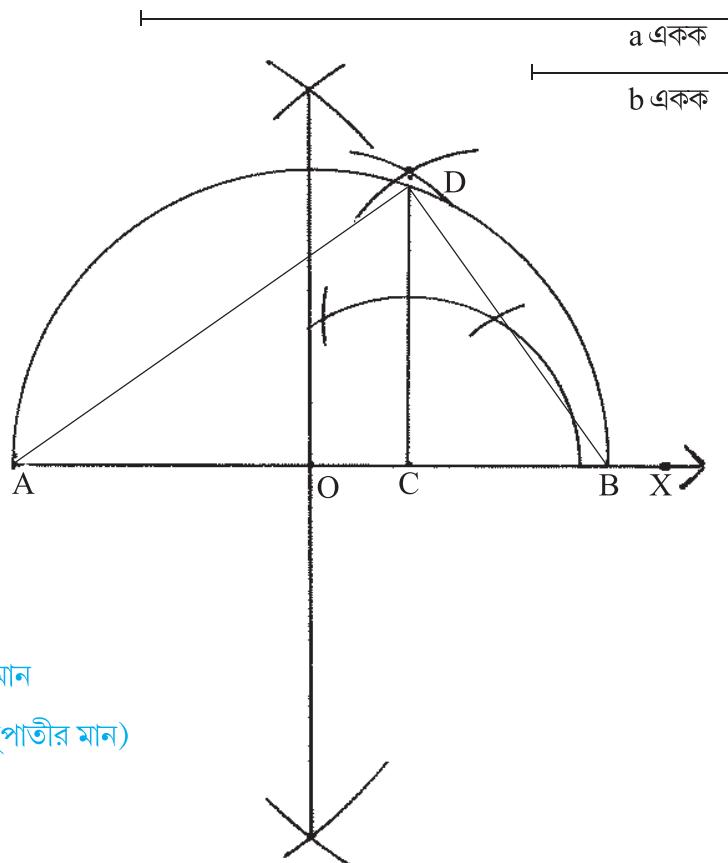
আমি অন্যভাবে দুটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি।

দ্বিতীয় পদ্ধতি a একক ও b একক দৈর্ঘ্যের দুটি সরলরেখাংশ অঙ্কন করলাম। এই দুটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) a একক দৈর্ঘ্যের সমান করে AX রশ্মি থেকে AB একটি সরলরেখাংশ কেটে নিলাম এবং BA থেকে b একক দৈর্ঘ্যের সমান করে BC অংশ কেটে নিলাম।

(ii) AB সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, AB সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। OA বা OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে AB-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলাম।

(iii) C বিন্দুতে AB সরলরেখাংশের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করলাম যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore$ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য হলো AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

অর্থাৎ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মান

= (a একক ও b একক-এর মধ্যসমানুপাতীর মান)

$= \sqrt{ab}$ একক

প্রমাণ : A ও D যুক্ত করলাম।

$\angle ADB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle ADB = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ADB-এর সমকৌণিক বিন্দু D থেকে AB-এর উপর DC লম্ব।

$\therefore \Delta ABD$ ও ΔDBC সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

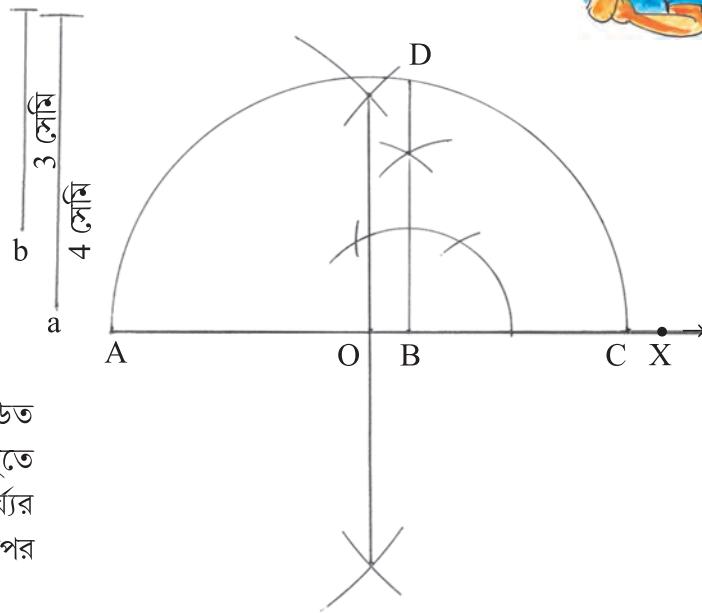
$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$ বা, $BD^2 = AB.BC = a.b$

$\therefore BD = \sqrt{ab}$ একক

প্রয়োগ :1. এবার আমি জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$ -এর মান নির্ণয় করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) a ও b দুটি সরলরেখাংশ নিলাম যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সেমি. ও 3 সেমি.

(ii) AX রশ্মি থেকে 4 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমান করে AB সরলরেখাংশ ও BX রশ্মি থেকে 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমান করে BC সরলরেখাংশ কেটে নিলাম।

(iii) AC সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, AC সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। OA বা OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে O বিন্দুকে কেন্দ্র AC-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করি।

(iv) B বিন্দুতে BC-এর উপর একটি লম্ব অঙ্কন করলাম যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore$ BD হলো AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

$\therefore$ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যই হচ্ছে $\sqrt{12}$ সেমি.

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি,

BD = 3.5 সেমি. (প্রায়)

$\therefore \sqrt{12} = 3.5$ (প্রায়)

প্রমাণ : BD, AB ও BC-এর মধ্যসমানুপাতী

$\therefore BD^2 = AB.BC = a.b = 4.3 = 12$

$\therefore BD = \sqrt{12}$ সেমি.

প্রয়োগ :2. আমি জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{21}$ ও $\sqrt{15}$-এর মান নির্ণয় করি অথবা জ্যামিতিক উপায়ে 21 ও 15-এর বর্গমূল নির্ণয় করি **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : 21 = 7×3 $\therefore$ এক্ষেত্রে a ও b দুটি সরলরেখাংশ নেব যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 একক ও 3 একক এবং একই পদ্ধতিতে a ও b-এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করব। আবার 15 = ☐ × ☐. a ও b সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য ঠিকমতো নিয়ে আঁকি।

প্রয়োগ :3. আমি পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ভিত্তিতে অন্য অঙ্কন পদ্ধতিতে $\sqrt{12}$ -এর মান নির্ণয় করি।

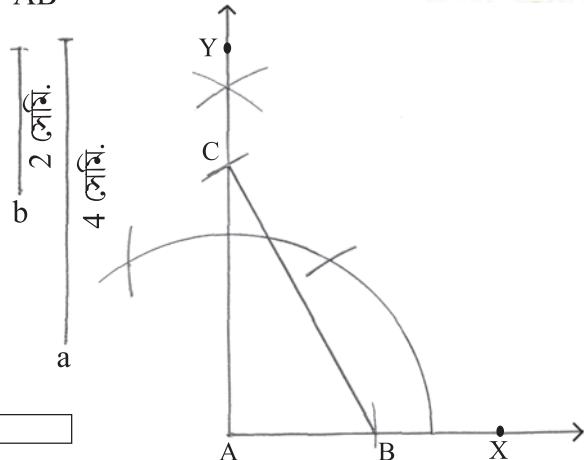
পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ভিত্তিতে অন্য অঙ্কন পদ্ধতি

অঙ্কন প্রণালী :

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম যার AB বাহু = 2 সেমি. এবং অতিভুজ BC = 4 সেমি.

$\therefore$ AC-এর দৈর্ঘ্য হলো $\sqrt{12}$ সেমি.

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি,
AC = 3.5 সেমি. (প্রায়)

$\therefore \sqrt{12} = 3.5$ (প্রায়)

ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ,

$\therefore AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4^2 - 2^2 =$ ☐ [নিজে লিখি]

$\therefore AC = \sqrt{12}$ সেমি.

প্রয়োগ :4. আমি জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{23}$-এর মান নির্ণয় করি।

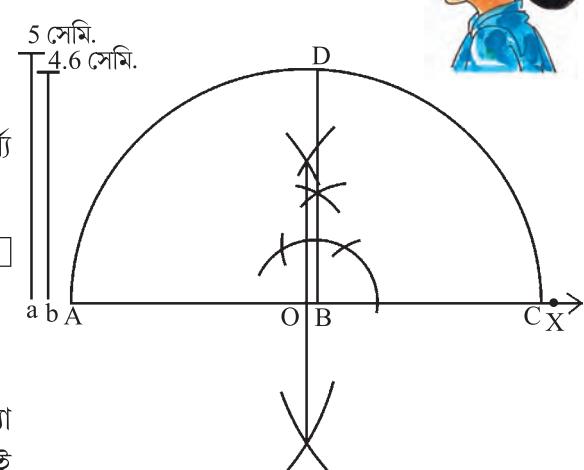
$23 = 5 \times 4.6$

অঙ্কন প্রণালী :

(i) a ও b দুটি সরলরেখাংশ নিলাম যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি. ও 4.6 সেমি.

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি, BD = ☐ সেমি. (প্রায়)

$\therefore \sqrt{23} =$ ☐ [প্রায়]

[বুঝেছি, অর্থাৎ যদি কোনো দুই অঙ্কের মৌলিক সংখ্যা থাকে, যেমন 17, 19, 29, 37 ইত্যাদি, তখন সেই সংখ্যাগুলিকে 5 দিয়ে ভাগ করে নেব। যেমন, 17=5×3.4, 19=5×3.8, 29=5×5.8, 37=5×7.4 ইত্যাদি]

প্রয়োগ :5. 4 মিটার লম্বা ও 3 মিটার চওড়া আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকার মাদুর কীভাবে পাব ? একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কনের চেষ্টা করি।

6 সেমি. দৈর্ঘ্য ও 3 সেমি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) 6 সেমি. দৈর্ঘ্য ও 3 সেমি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তাকার চিত্র ABCD অঙ্কন করলাম।

(ii) DC-কে বর্ধিত করলাম এবং বর্ধিতাংশ থেকে CB-এর সমান করে CE অংশ কেটে নিলাম।

(iii) DE সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, O বিন্দুতে DE সরলরেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত হয়। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OD বা OE দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে DE-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করি।

(iv) BC-কে বর্ধিত করলাম যা অর্ধবৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করল।

(v) CF বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করে CFGH বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করলাম।

∴ CFGH-ই হলো নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র যার ক্ষেত্রফল ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

সুতরাং, CFGH বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ : ABCD আয়তক্ষেত্র।

∴ $\angle BCD = 1$ সমকোণ। সুতরাং CF, DE-এর লম্ব।

∴ অঙ্কনানুসারে CF-এর দৈর্ঘ্য DC ও CE-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

∴ $CF^2 = DC.CE = AB.BC =$ ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রয়োগ : 6. 7 সেমি. দৈর্ঘ্য ও 4 সেমি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 7. আমি একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি., 6 সেমি. ও 3 সেমি.। ওই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি।

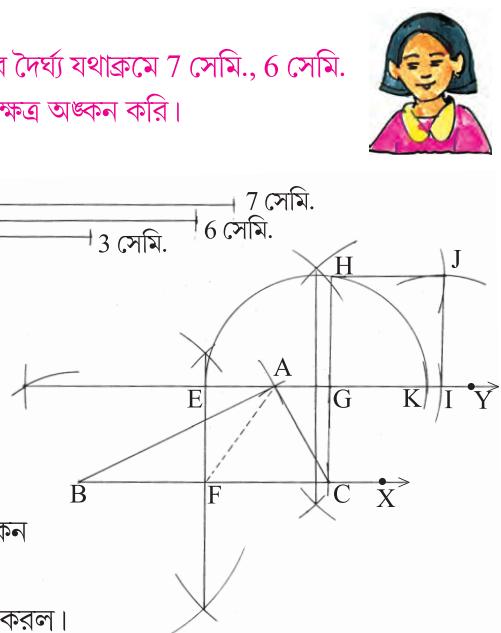
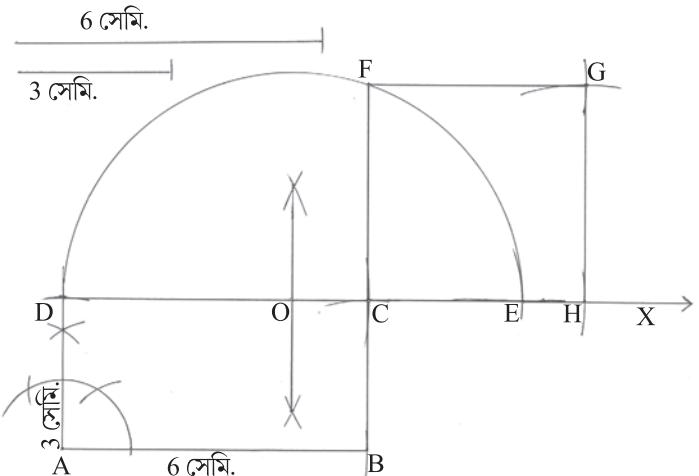
অঙ্কন প্রণালী :

(i) ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম যার AB, BC ও CA-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি., 6 সেমি. ও 3 সেমি.

(ii) Δ ABC-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র EFCG অঙ্কন করলাম।

(iii) এবার EG-এর বর্ধিতাংশ থেকে GC-এর সমান করে GK অংশ কেটে নিলাম।

(iv) এবার EK সরলরেখাংশকে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলাম।

(v) CG -কে বর্ধিত করলাম যা অর্ধবৃত্তকে H বিন্দুতে ছেদ করল।

(vi) GH-কে বাহু করে HGIJ বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করলাম।

∴ HGIJ হলো নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র যার ক্ষেত্রফল Δ ABC-এর ক্ষেত্রফলের সমান।

প্রমাণ : AF যোগ করলাম।

Δ ABC-এর AF মধ্যমা। ∴ Δ AFC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল .... (i)

আবার Δ AFC এবং আয়তক্ষেত্র EFCG-এর একই ভূমি FC এবং একই সমান্তরালযুগল FC এবং EG-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ Δ AFC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র EFCG-এর ক্ষেত্রফল ....(ii)

(i) ও (ii) থেকে পেলাম, Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র EFCG-এর ক্ষেত্রফল।

EFCG আয়তক্ষেত্রের $\angle CGE = 1$ সমকোণ। সুতরাং, $HG \perp EK$.

অঙ্কনানুসারে, HG-এর দৈর্ঘ্য EG ও GK-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

∴ $HG^2 = EG.GK = EG.GC =$ EFCG আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

∴ HGIJ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = EFCG আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

আবার, Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র EFCG-এর ক্ষেত্রফল।

∴ Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল = HGIJ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রয়োগ :8. আমি 7 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। [নিজে করি]

কষে দেখি 21

1. নিম্নলিখিত দৈর্ঘের সরলরেখাংশগুলির মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি এবং প্রতিক্ষেত্রে স্কেলের সাহায্যে মধ্যসমানুপাতীগুলির মান নির্ণয় করি :

   (i) 5 সেমি., 2.5 সেমি. (ii) 4 সেমি., 3 সেমি. (iii) 7.5 সেমি., 4 সেমি.
   (iv) 10 সেমি., 4 সেমি. (v) 9 সেমি., 5 সেমি. (vi) 12 সেমি., 3 সেমি.

2. জ্যামিতিক উপায়ে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির বর্গমূল নির্ণয় করি :

   (i) 7 (ii) 18 (iii) 24 (iv) 28 (v) 13 (vi) 29

3. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করি :

   (i) $\sqrt{14}$ সেমি. (ii) $\sqrt{22}$ সেমি. (iii) $\sqrt{31}$ সেমি. (iv) $\sqrt{33}$ সেমি.

4. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রগুলির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন করি :

   (i) 8 সেমি., 6 সেমি. (ii) 6 সেমি., 4 সেমি.
   (iii) 4.2 সেমি., 3.5 সেমি. (iv) 7.9 সেমি., 4.1 সেমি.

5. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন করি :

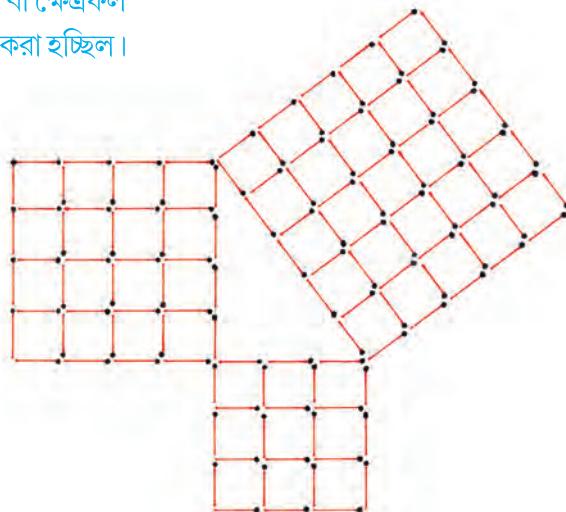
   (i) ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সেমি., 7 সেমি. ও 5 সেমি.।
   (ii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার ভূমির দৈর্ঘ্য 7 সেমি. এবং সমান বাহুদুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 5 সেমি.।
   (iii) একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

22 পিথাগোরাসের উপপাদ্য
PYTHAGORAS THEOREM

গত সপ্তাহে আমাদের স্কুলে একটি বিজ্ঞানের প্রদর্শনী হয়েছিল। আমরা সারাদিন ধরে প্রদর্শনীর বিভিন্ন বিষয়ের বিভাগে ঘুরেছি। গণিতের প্রদর্শনীর ঘরে অনেক কিছু মজার অঙ্ক দেখেছি। তবে তাদের মধ্যে 'দেশলাই কাঠি নিয়ে মজার খেলা' বিষয়টি আমার খুব ভালো লেগেছে। প্রদর্শনীর এই বিষয়টিতে দেশলাই কাঠি বসিয়ে নানান ধরনের সামতলিক চিত্র তৈরি করে তার পরিসীমা বা ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা বা নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলের সামতলিক চিত্র তৈরি করা হচ্ছিল।

 [যেখানে = 1 বর্গ একক ধরা হচ্ছে]

সেখানে অন্য একটি চার্টে দেশলাই কাঠির একটি মজার চিত্র দেখলাম।

সেটি হলো →

চার্টে দেখছি একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজে 5 টি কাঠি, লম্বে 4 টি কাঠি এবং ভূমিতে ☐ টি কাঠি আছে।

আরও দেখছি, অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 25 বর্গ একক = 5^2 বর্গ একক

ভূমির উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 9 বর্গ একক = 3^2 বর্গ একক

লম্বের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 16 বর্গ একক = 4^2 বর্গ একক

দেখছি, $5^2 = 3^2 + 4^2$

∴ (অতিভুজ)^2 = (ভূমি)^2 + (লম্ব)^2

অর্থাৎ, অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

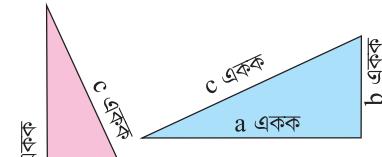
= ভূমির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + লম্বের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

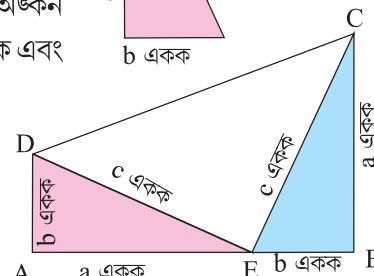
1 **সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ, ভূমি ও লম্বের মধ্যে এই সম্পর্ক কোথা থেকে পেলাম? যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই কি এই সম্পর্ক সম্ভব?**

পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম

পিথাগোরাসের উপপাদ্য : যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

হাতেকলমে যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্য যাচাই করি।

(1) একটি রঙিন আর্টপেপারে একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম, যার ভূমির দৈর্ঘ্য ‘b’ একক এবং উচ্চতা (লম্ব) ‘a’ একক এবং সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।

(2) অন্য একটি রঙিন আর্টপেপারে আর একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম, যার ভূমির দৈর্ঘ্য ‘a’ একক এবং উচ্চতা (লম্ব) ‘b’ একক এবং সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।

(3) ধরি ত্রিভুজ দুটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য ‘c’ একক। এবার একটি সাদা আর্টপেপারে পাশের চিত্রের মতো দুটি সমকোণী ত্রিভুজ আটকে ABCD ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র পেলাম।

(4) ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}(a+b)\times(a+b)$ বর্গএকক

আবার ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ΔDAE-এর ক্ষেত্রফল + ΔCBE-এর ক্ষেত্রফল + ΔDEC-এর ক্ষেত্রফল

$\therefore\ \frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}a\times b + \frac{1}{2}a\times b + \frac{1}{2}c\times c\quad [\because \angle DEC = 90^\circ]$

বা, $(a+b)^2 = ab + ab + c^2$

বা, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

$\therefore\ a^2 + b^2 = \square$

$\therefore$ পেলাম (ভূমি)^2 + (লম্ব)^2 = (অতিভুজ)^2

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 49. পিথাগোরাসের উপপাদ্য: যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

প্রদত্ত : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ সমকোণ

প্রমাণ করতে হবে : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

অঙ্কন : সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব।

$\therefore\ \Delta$ABD ও ΔCBA সদৃশ।

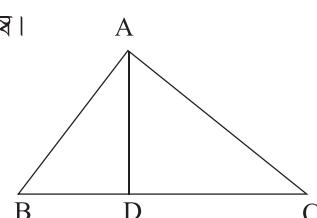
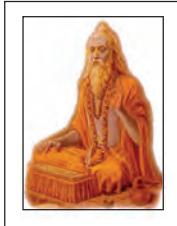
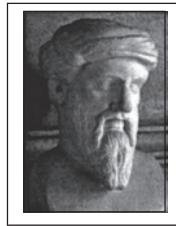
সুতরাং, $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$, $\therefore\ AB^2 = BC.BD$ ....(I)

আবার, ΔCAD ও ΔCBA সদৃশ।

সুতরাং, $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$, $\therefore\ AC^2 = BC.DC$ ....(II)

সুতরাং (I) ও (II) যোগ করে পাই, $AB^2 + AC^2 = BC.BD + BC.DC$

$= BC(BD + DC) = BC.BC = BC^2$

$\therefore\ BC^2 = AB^2 + AC^2$ **[প্রমাণিত]**

আজ থেকে অনেক পূর্বে (প্রায় 800 B.C.) একজন প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞ বৌদ্ধায়ন (Baudhayan) পিথাগোরাসের উপপাদ্যটিকে নিম্নরূপে বলেছিলেন। তিনি বলেছিলেন 'একটি আয়তাকার চিত্রের কর্ণের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উহার উভয় বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান'।

বৌদ্ধায়ান

পিথাগোরাস

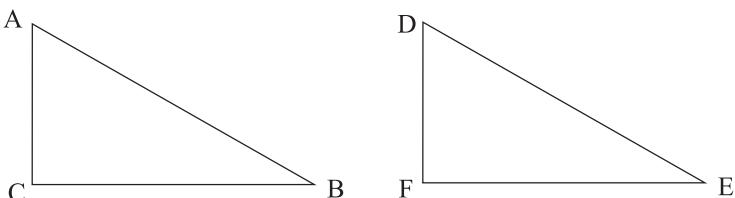
[The diagonal of a rectangle produces by itself the same area as produced by its both sides (i.e. length and breadth)]

এই জন্য এই উপপাদ্যটিকে কখনও কখনও বৌদ্ধায়নের উপপাদ্যও বলা হয়।

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ যে-কোনো ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণ কি সমকোণ হবে? যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :50. পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য : যে-কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণটি সমকোণ হবে।

প্রদত্ত : ΔABC-এর AB বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল BC ও AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

প্রমাণ করতে হবে : $\angle ACB = 1$ সমকোণ

অঙ্কন : CB-এর সমান করে FE সরলরেখাংশ অঙ্কন করলাম। FE বাহুর উপর F বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করলাম এবং সেই লম্ব থেকে CA বাহুর সমান করে FD অংশ কেটে নিলাম এবং D ও E বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : $AB^2 = BC^2 + AC^2$ [প্রদত্ত]

$= EF^2 + DF^2$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে, $EF = BC$ এবং $AC = DF$]

$= DE^2$ [$\because \angle DFE = 1$ সমকোণ]

$\therefore AB = DE$

এখন ΔABC ও ΔDEF -তে, $AB = DE$, $BC = EF$ এবং $AC = DF$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

$\therefore \angle ACB = \angle DFE = 1$ সমকোণ [$\because DF \perp EF$ অঙ্কনানুসারে]

$\therefore \angle ACB = 1$ সমকোণ **[প্রমাণিত]**

বুঝেছি, পিথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে সহজেই কোনো ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ কিনা বুঝতে পারব। যেমন, যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি., 12 সেমি. ও 13 সেমি., সেই ত্রিভুজটি ☐ ত্রিভুজ হবে। যেহেতু, $13^2 = 5^2 + 12^2$ এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য 13 সেমি.।

(2) কিন্তু কোনো সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য কেমন হতে পারে তার কি কোনো সূত্র পাওয়া যায়?

যেহেতু, $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

অতএব যদি কোনো ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $(m^2 - n^2)$ একক, $2mn$ একক এবং $(m^2 + n^2)$ একক হয় তবে সেটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে এবং তার অতিভুজের দৈর্ঘ্য হবে $(m^2 + n^2)$ একক। (যেখানে, $m > n$)

প্রয়োগ :1. m ও n-এর বিভিন্ন উপযুক্ত মান ধরে 2 টি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যগুলি লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :2. আমাদের বাগানে একটি 25 মিটার লম্বা মই পাঁচিলে হেলান দিয়ে এমনভাবে রাখা আছে যে মইটি ভূমি থেকে 24 মিটার উঁচুতে পাঁচিল স্পর্শ করে আছে। মই-এর পাদদেশটি পাঁচিল থেকে কত দূরে আছে হিসাব করে লিখি।

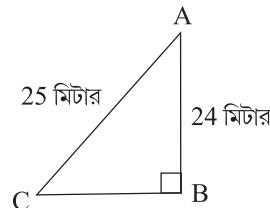
ধরি, AC মই-এর দৈর্ঘ্য = 25 মিটার , AB = 24 মিটার; ABC সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $(24 \text{ মিটার})^2 + (BC)^2 = (25 \text{ মিটার})^2$

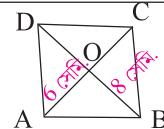
বা, $BC^2 = (25 \text{ মিটার})^2 - (24 \text{ মিটার})^2 =$ ☐

$\therefore$ BC = 7 মিটার

$\therefore$ মই-এর পাদদেশটি পাঁচিল থেকে 7 মিটার দূরে আছে।

প্রয়োগ : 3. কোনো রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 সেমি. ও 16 সেমি. হলে, রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

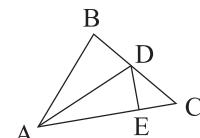
$\therefore$ OA = $\frac{12}{2}$ সেমি. = ☐ সেমি., OB = ☐ সেমি.

AOB সমকোণী ত্রিভুজ। $\therefore$ পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই, $AB^2 = OA^2 + OB^2$

প্রয়োগ : 4 একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করেছি যার $\angle B$ সমকোণ। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করেছি যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $CD^2 = 2BD^2$

প্রদত্ত : ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle B = 1$ সমকোণ। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : $CD^2 = 2BD^2$

অঙ্কন : D বিন্দু থেকে AC-এর উপর DE লম্ব অঙ্কন করলাম যা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। $\therefore \angle ACB = 45^\circ$

$\therefore$ DEC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle DCE = 45^\circ$ ($\because \angle ACB = 45^\circ$);

আবার , $\because \angle DEC = 90^\circ$, সুতরাং, $\angle EDC = 45^\circ$; $\therefore \Delta DEC$-তে, DE = EC

ΔABD ও ΔAED-এর মধ্যে, $\angle BAD = \angle EAD$ [$\because$ AD, $\angle BAE$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\angle ABD = \angle AED$ (প্রত্যেকে 1 সমকোণ) এবং AD উহাদের সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta AED$ (A-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

সুতরাং, BD = DE (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু)

DEC সমকোণী ত্রিভুজে, $DC^2 = DE^2 + CE^2 = 2DE^2$ ($\because$ CE = DE)

$= 2BD^2$ ($\because$ DE = BD) **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ :5. ΔABC -এর $AD \perp BC$ হলে, প্রমাণ করি যে $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ [নিজে করি]

প্রয়োগ :6. ΔABC-এর $\angle A$ সমকোণ এবং BP ও CQ দুটি মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে, $5BC^2 = 4(BP^2 + CQ^2)$

প্রদত্ত : ΔABC-এর $\angle BAC = 1$ সমকোণ। BP ও CQ ত্রিভুজটির দুটি মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে : $5BC^2 = 4(BP^2 + CQ^2)$

প্রমাণ : ΔABC-এর $\angle A$ সমকোণ।

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$

$= (2AQ)^2 + (2AP)^2$ [$\because$ P ও Q যথাক্রমে AC ও AB বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু]

$\therefore BC^2 = 4(AQ^2 + AP^2)$ .... (i)

আবার, ΔBAP ও ΔCAQ সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore BP^2 = AB^2 + AP^2 = (2AQ)^2 + AP^2 = 4AQ^2 + AP^2$

$CQ^2 = AC^2 + AQ^2 = (2AP)^2 + AQ^2 = 4AP^2 + AQ^2$

$\therefore BP^2 + CQ^2 = 4AQ^2 + AP^2 + 4AP^2 + AQ^2 = 5AQ^2 + 5AP^2 = 5(AQ^2 + AP^2)$ ......(ii)

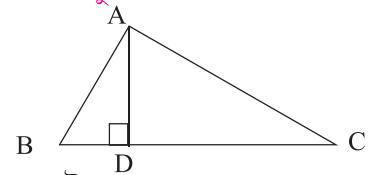
$5BC^2 = 5.4\,(AQ^2 + AP^2)$ [(i) হইতে পাই]

$= 4.5\,(AQ^2 + AP^2) = 4\,(BP^2 + CQ^2)$ [(ii) হইতে পাই] **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ :7. ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করেছি যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং $AD^2 = BD.CD$ হলে, প্রমাণ করি যে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle A = 90^o$

প্রদত্ত : ΔABC-এর $AD \perp BC$ এবং $AD^2 = BD.DC$

প্রমাণ করতে হবে : $\angle BAC = 90^o$

প্রমাণ : ADB একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ADB = 90^o$

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ADC = 90^o$

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ .... (ii) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2 + 2AD^2$

$= BD^2 + CD^2 + 2BD.CD$ [$\because AD^2 = BD.CD$]

$= (BD + CD)^2 = BC^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\therefore$ পিথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle BAC = 90^o$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ :8. প্রমাণ করি যে-কোনো বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ওই বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 9. ABCD একটি আয়তাকার চিত্র অঙ্কন করেছি। O আয়তাকার চিত্রের অভ্যন্তরে যে-কোনো একটি বিন্দু হলে, প্রমাণ করি যে, $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$

প্রদত্ত : ABCD আয়তাকার চিত্রের অভ্যন্তরে O যে-কোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে : $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$

অঙ্কন : O বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা AB ও DC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল।

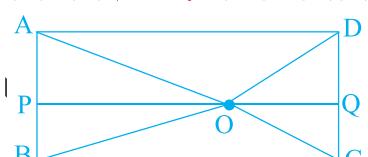
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে PQ || BC

$\therefore$ $PQ \perp AB$ এবং $PQ \perp DC$ ($\because \angle B = 90^\circ$ এবং $\angle C = 90^\circ$)

$\therefore$ ΔAPO, ΔBPO, ΔCQO এবং ΔDQO প্রত্যেকে সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ $OA^2 = AP^2 + OP^2$ $\quad$ $OC^2 = CQ^2 + OQ^2$

$OB^2 = BP^2 + OP^2$ $\quad$ $OD^2 = DQ^2 + OQ^2$

$\therefore$ $OA^2 + OC^2 = AP^2 + OP^2 + CQ^2 + OQ^2$ .... (i)

কিন্তু অঙ্কন অনুসারে, APQD ও BPQC এরা প্রত্যেকে আয়তাকার চিত্র।

সুতরাং, $AP = DQ$ এবং $CQ = BP$

(i) থেকে পাই, $OA^2 + OC^2 = DQ^2 + OP^2 + BP^2 + OQ^2$

$= (DQ^2 + OQ^2) + (BP^2 + OP^2)$

$= OD^2 + OB^2 = OB^2 + OD^2$ [প্রমাণিত]

কষে দেখি 22

1. যদি কোনো ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নিম্নরূপ হয়, তবে কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে হিসাব করে লিখি : (i) 8 সেমি., 15 সেমি. ও 17 সেমি. (ii) 9 সেমি., 11 সেমি. ও 6 সেমি.
2. আমাদের পাড়ার রাস্তায় একটি 15 মিটার লম্বা মই এমনভাবে রাখা আছে যে মইটি ভূমি থেকে 9 মিটার উঁচুতে অবস্থিত মিলিদের জানালা স্পর্শ করেছে। এবার ওই রাস্তার একই বিন্দুতে মইটির পাদদেশ রেখে মইটিকে ঘুরিয়ে এমভাবে রাখা হলো যে মইটি রাস্তার অপর প্রান্তে অবস্থিত আমাদের জানালা স্পর্শ করল। আমাদের জানালা যদি ভূমি থেকে 12 মিটার উপরে থাকে, তবে পাড়ার ওই রাস্তাটি কত চওড়া হিসাব করে লিখি।
3. 10 সেমি. বাহুবিশিষ্ট কোনো রম্বসের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. হলে, রম্বসটির অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. একটি ত্রিভুজ PQR অঙ্কন করেছি যার $\angle Q$ সমকোণ। QR বাহুর উপর S যে-কোনো একটি বিন্দু হলে, প্রমাণ করি যে, $PS^2 + QR^2 = PR^2 + QS^2$
5. প্রমাণ করি, যে-কোনো রম্বসের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টি কর্ণ দুটির উপর অঙ্কিত বর্গ দুটির সমষ্টির সমান হবে।
6. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BC বাহুর উপর লম্ব হলে, প্রমাণ করি যে $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4AD^2$.
7. একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করলাম যার $\angle A$ সমকোণ। AB ও AC বাহুর উপর দুটি বিন্দু যথাক্রমে P ও Q নিলাম। P, Q; B, Q ও C, P যুক্ত করে, প্রমাণ করি যে, $BQ^2 + PC^2 = BC^2 + PQ^2$
8. ABCD চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$
9. একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করেছি যার উচ্চতা AD; $AB > AC$ হলে প্রমাণ করি যে $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$
10. ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু B ও C থেকে AC ও AB ($AC > AB$) বাহুদুটির উপর দুটি লম্ব অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AC^2 + BP^2 = AB^2 + CP^2$
11. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $\angle C$ সমকোণ। D, AB-এর উপর যে-কোনো একটি বিন্দু হলে, প্রমাণ করি যে, $AD^2 + DB^2 = 2CD^2$
12. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। CD মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে, $BC^2 = CD^2 + 3AD^2$
13. ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু O থেকে BC, CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে OX, OY ও OZ লম্ব অঙ্কন করেছি। প্রমাণ করি যে, $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$

14. RST ত্রিভুজের $\angle S$ সমকোণ। RS ও ST বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y; প্রমাণ করি যে, $RY^2 + XT^2 = 5XY^2$

15. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.) :

(i) এক ব্যক্তি একটি স্থান থেকে 24 মিটার পশ্চিমদিকে যান এবং তারপর 10 মিটার উত্তর দিকে যান। যাত্রাস্থান থেকে ব্যক্তির দূরত্ব (a) 34 মিটার, (b) 17 মিটার, (c) 26 মিটার, (d) 25 মিটার।

(ii) ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং $AD \perp BC$ হলে, $AD^2 =$ (a) $\frac{3}{2}DC^2$ (b) $2DC^2$ (c) $3DC^2$ (d) $4DC^2$

(iii) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AC=BC এবং $AB^2=2AC^2$ হলে, $\angle C$-এর পরিমাপ
(a) 30° (b) 90° (c) 45° (d) 60°

(iv) 13 মিটার ও 7 মিটার উচ্চ দুটি দণ্ড ভূমিতলে লম্বভাবে অবস্থিত এবং তাদের পাদদেশের মধ্যে দূরত্ব 8 মিটার। তাদের শীর্ষদেশের মধ্যে দূরত্ব (a) 9 মিটার (b) 10 মিটার (c) 11 মিটার (d) 12 মিটার।

(v) একটি রম্বসের দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 24 সেমি. এবং 10 সেমি. হলে, রম্বসটির পরিসীমা (a) 13 সেমি. (b) 26 সেমি. (c) 52 সেমি. (d) 25 সেমি.।

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হলে, ত্রিভুজটি সর্বদা সমকোণী ত্রিভুজ হবে।

(ii) 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তে কোনো জ্যা কেন্দ্রে সমকোণ উৎপন্ন করলে জ্যাটির দৈর্ঘ্য 5 সেমি. হবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের __________ সমান।

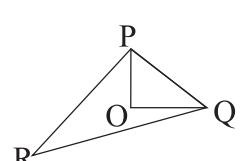
(ii) একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $4\sqrt{2}$ সেমি. হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য __________ সেমি.।

(iii) ABCD আয়তাকার চিত্রের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। AB = 12 সেমি., AO = 6.5 সেমি. হলে, BC-এর দৈর্ঘ্য __________ সেমি.।

16. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S. A.)**

(i) ABC ত্রিভুজের $AB = (2a - 1)$ সেমি., $AC = 2\sqrt{2a}$ সেমি. এবং $BC = (2a+1)$ সেমি. হলে $\angle BAC$-এর মান লিখি।

(ii) পাশের চিত্রে PQR ত্রিভুজের অভ্যন্তরে O বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে $\angle POR = 90^\circ$, OP = 6 সেমি. এবং OR = 8 সেমি.। যদি PR = 24 সেমি. এবং $\angle QPR = 90^\circ$ হয়, তাহলে QR বাহুর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

P
O
Q
R

(iii) ABCD আয়তাকার চিত্রের অভ্যন্তরে O বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে OB = 6 সেমি., OD = 8 সেমি. এবং OA = 5 সেমি.। OC-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iv) ABC ত্রিভুজের A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব BC বাহুর সঙ্গে D বিন্দুতে মিলিত হয়। যদি BD = 8 সেমি., DC = 2 সেমি. এবং AD = 4 সেমি. হয়, তাহলে $\angle BAC$-এর পরিমাপ কত তা লিখি।

(v) ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC = 90^\circ$, AB = 3 সেমি., BC = 4 সেমি. এবং B বিন্দু থেকে AC বাহুর উপর লম্ব BD যা AC বাহুর সঙ্গে D বিন্দুতে মিলিত হয়। BD-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

23 ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি
TRIGONOMETRIC RATIOS AND TRIGOMETRIC IDENTITIES

আমি আমার খাতায় রীনার ঘুড়ির ওড়ানোর ছবিটি এঁকে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC পেয়েছি,

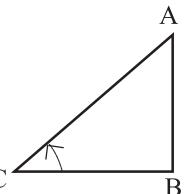
যার, C বিন্দু ভূমিতে রীনার অবস্থান

A বিন্দু রীনার ঘুড়ির অবস্থান

AB ভূমি থেকে ঘুড়ির অবস্থানের উচ্চতা।

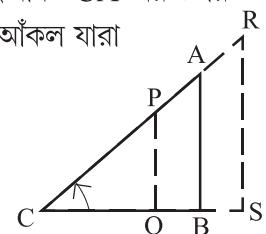
এবং, ∠BCA একটি সূক্ষ্মকোণ।

1 কিন্তু ∠BCA সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে AB ও BC -কে কী বলব?

ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুকে ∠BCA **কোণের বিপরীত বাহু বা লম্ব** এবং BC বাহুকে ∠ACB **কোণের সংলগ্ন বাহু বা ভূমি** বলা হয়।

বুঝেছি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠BAC কোণের বিপরীত বাহু ☐ এবং ∠BAC কোণ সংলগ্ন বাহু AB

শুভ আমার আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC-এর উপরে একটি বিন্দু P এবং বর্ধিত CA-এর উপর একটি বিন্দু R নিল। P ও R বিন্দু থেকে BC ও বর্ধিত CB-এর উপর দুটি লম্ব আঁকল যারা BC-কে এবং CB-এর বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে Q ও S বিন্দুতে ছেদ করল।

এরফলে, PQC ও RSC আরও দুটি সমকোণী ত্রিভুজ পেলাম।

2 PQC, ABC ও RSC সমকোণী ত্রিভুজগুলির বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক জানার চেষ্টা করি ও কী পাই দেখি।

দেখছি, PQC, ABC ও RSC সমকোণী ত্রিভুজগুলি পরস্পর সদৃশ। **[নিজে প্রমাণ করি]**

(i) $\frac{PQ}{CP}=\frac{AB}{CA}=\frac{RS}{CR}$ (ii) $\frac{CQ}{CP}=\frac{CB}{CA}=\frac{CS}{CR}$ (iii) $\frac{PQ}{CQ}=\frac{AB}{CB}=\frac{RS}{CS}$

(iv) $\frac{CP}{PQ}=\frac{CA}{AB}=\frac{CR}{RS}$ (v) $\frac{CP}{CQ}=\frac{CA}{CB}=\frac{CR}{CS}$ (vi) $\frac{CQ}{PQ}=\frac{CB}{AB}=\frac{CS}{RS}$

দেখছি, তিনটি সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে ∠BCA সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে

(i) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ অনুপাতগুলি সমান (ii) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ অনুপাতগুলি সমান এবং (iii) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ অনুপাতগুলিও সমান।

অন্য যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে ও একইভাবে একটি সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে একাধিক সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে দেখছি (i), (ii) ও (iii) নং অনুপাতগুলি সমান। **[নিজে করি]**

বুঝেছি, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত ওই ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভরশীল নয়। অনুপাতগুলি সম্পূর্ণভাবে সূক্ষ্মকোণটির পরিমাণের উপর নির্ভরশীল।

3 কিন্তু একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুটি করে বাহু নিয়ে যে ছয় প্রকারের অনুপাতগুলি পেলাম, তাদের আলাদা আলাদা কী নাম আছে দেখি।

একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দুটি করে বাহু নিয়ে যে ছয় প্রকারের অনুপাত পাওয়া যায় তাদের **ত্রিকোণমিতিক অনুপাত** বলা হয়।

পাশের চিত্রের ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABO$ = এক সমকোণ

$\therefore$ OA অতিভুজ এবং $\angle BOA$ সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে OB = ভূমি এবং AB = লম্ব। ধরি, $\angle AOB = \theta$

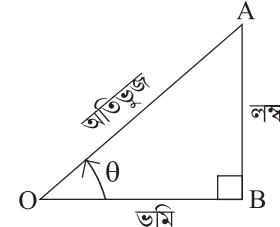
$\angle BOA$ -এর Sine = $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{OA} = \sin\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cosine = $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OB}{OA} = \cos\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Tangent = $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{OB} = \tan\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cosecant = $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OA}{AB} = \text{cosec}\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Secant = $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{OA}{OB} = \sec\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cotangent = $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{OB}{AB} = \cot\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

4 উপরের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি দেখি ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক লেখার চেষ্টা করি।

দেখছি, $\text{cosec}\theta$, $\sec\theta$ ও $\cot\theta$ যথাক্রমে $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ -র অন্যোন্যক।

অর্থাৎ, $\mathbf{cosec\theta = \frac{1}{\sin\theta}}$, $\mathbf{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}$, $\mathbf{\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}}$

আবার, $\tan\theta = \frac{AB}{OB} = \frac{\frac{AB}{OA}}{\frac{OB}{OA}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore$ পেলাম, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

আবার, $\cot\theta = \frac{OB}{AB} = \frac{\frac{OB}{OA}}{\frac{AB}{OA}} = \frac{\square}{\square}$ **[নিজে লিখি]**

$\therefore$ পেলাম, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

দেখছি, সমকোণী ত্রিভুজ ABO-এর সূক্ষ্মকোণ $\angle BOA$-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ওই ত্রিভুজের কোণ ও বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করে এবং কোনো নির্দিষ্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানগুলি সমকোণী ত্রিভুজটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সঙ্গে পরিবর্তনশীল নয়।

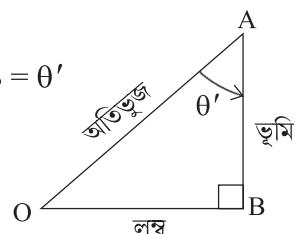
5 কিন্তু ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি কী হবে দেখি।

ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABO$ = 1 সমকোণ। $\therefore$ OA = অতিভুজ

$\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে AB = ভূমি এবং OB = লম্ব। ধরি, $\angle OAB = \theta'$

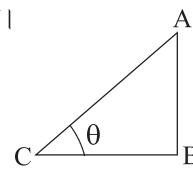
$\therefore \sin\theta' = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OB}{OA}$

$\cos\theta' = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{OA}$

$\tan\theta'$, $\text{cosec}\theta'$, $\sec\theta'$, $\cot\theta'$ **নিজে লিখি।**

বুঝেছি, রীনার ঘুড়ি যদি AC দৈর্ঘ্যের লম্বা সুতো দিয়ে বাঁধা থাকে এবং ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে উড়তে থাকে তবে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান থেকে AB উচ্চতায় থাকবে।

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \therefore AB = AC \times \sin\theta$$

$\therefore$ তখন রীনার ঘুড়ি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে $AC \times \sin\theta$ উচ্চতায় থাকবে।

6 কিন্তু sinθ কি sin এবং θ -এর গুণফল ?

θ কোণের sine-এর সংক্ষিপ্ত রূপ "sinθ"। কিন্তু **sin ও θ-এর গুণফল sinθ নয়**। একইভাবে cosθ , cos এবং θ-এর গুণফল নয় এবং অন্য সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি একই রকমের।

আর্যভট্ট (500 A.D.) প্রথম sin-এর ধারণা ব্যবহার করেন। এরপর আর্যভট্টের কাজ আরবি ও লাতিন ভাষায় অনুবাদ করা হয়। লাতিন ভাষায় (Sinus) শব্দটি ব্যবহৃত হয়। এরপর সমগ্র ইউরোপে গণিতের সর্বক্ষেত্রে 'Sinus' শব্দটি 'Sine' শব্দ হিসাবে ব্যবহৃত হয়। ইংরেজ জ্যোতির্বিজ্ঞানী অধ্যাপক Edmund Gunter (1581–1626) প্রথম সংক্ষিপ্ত আকারে 'Sin' ব্যবহার করেন।

7 Sinθ-এর বর্গ কীভাবে লিখব ?

লেখার সুবিধার জন্য, $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ লেখা হয়, তবে $(\sin\theta)^2 \neq \sin\theta^2$

অনুরূপে, $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$, $(\tan\theta)^3 = \tan^3\theta$ ইত্যাদি।

$\operatorname{cosec}\theta = (\sin\theta)^{-1}$ লেখা যায়। কিন্তু $\operatorname{cosec}\theta \neq \sin^{-1}\theta$ (একে Sin inverse θ বলা হয়।)

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, $\therefore$ sinθ-এর মান কি 1-এর বেশি হতে পারে ?

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$; যেহেতু লম্ব, অতিভুজের থেকে বড়ো হতে পারে না।

সুতরাং, sinθ-এর মান 1-এর বেশি হবে না।

8 cosθ-এর মান কি 1-এর বেশি হতে পারে ? [নিজে করি]

প্রয়োগ : 1. α ও β দুটি এমন সূক্ষ্মকোণ যে $\sin\alpha = \sin\beta$; প্রমাণ করি যে, $\alpha = \beta$

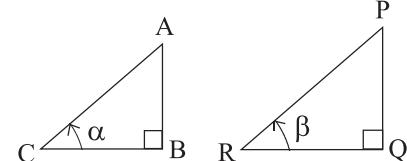
ধরি, ABC এবং PQR দুটি সমকোণী ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজে $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $\angle BCA = \alpha$; PQR ত্রিভুজে $\angle PQR = 90^\circ$ এবং $\angle QRP = \beta$

সমকোণী ΔABC-তে, $\sin\alpha = \frac{AB}{AC}$;

সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\sin\beta = \frac{PQ}{PR}$

যেহেতু, $\sin\alpha = \sin\beta$, সুতরাং, $\frac{AB}{AC} = \frac{PQ}{PR}$ বা, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = k$ (ধরি) $(k>0)$

$\therefore AB = k.PQ$ এবং $AC = k.PR$

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$ এবং $QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$

সুতরাং, $\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{\sqrt{PR^2 - PQ^2}} = \frac{\sqrt{k^2PR^2 - k^2PQ^2}}{\sqrt{PR^2 - PQ^2}} = \frac{k\sqrt{PR^2 - PQ^2}}{\sqrt{PR^2 - PQ^2}} = k \quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ সুতরাং, $\angle BCA = \angle QRP$ $\therefore \alpha = \beta$ [প্রমাণিত]

বুঝেছি, $\sin\alpha = \sin 45^\circ$ হলে, $\alpha = 45^\circ$ [$\sin\alpha = \sin\beta$ হলে উভয়পক্ষে sin দিয়ে ভাগ করতে পারি না। কারণ $\sin\alpha = \sin \times \alpha$ নয়। তাই যখন, $\cancel{\sin}\ \alpha = \cancel{\sin}\ \beta$ তখন $\alpha = \beta$ এভাবে লিখতে পারি না। এটা ভুল]

প্রয়োগ : 2. $\sin(90^\circ - \theta) = \sin 2\theta$ হলে, θ-এর মান হিসাব করে লিখি যখন 2θ সূক্ষ্মকোণ।

$\sin(90^\circ - \theta) = \sin 2\theta$

বা, $90^\circ - \theta = 2\theta$

বা, $3\theta = 90^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ$

প্রয়োগ : 3. 5θ সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan 5\theta = \tan(60^\circ + \theta)$ হলে, θ-এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

> **মনে রাখব :** সাধারণত, (i) $\sin 2\theta \neq 2\sin\theta$
>
> (ii) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \neq \frac{\alpha}{\beta}$
>
> এবং (iii) $\sin\alpha \pm \sin\beta \neq \sin(\alpha \pm \beta)$
>
> কোণের Cosine, tangent ইত্যাদির ক্ষেত্রেও এই নিয়মগুলি প্রযোজ্য।

প্রয়োগ : 4. একটি সমকোণী ত্রিভুজে θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে $\sin\theta = \frac{12}{13}$ হলে, $\tan\theta$ এবং $\cos\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি।

$\sin\theta = \frac{12}{13} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$

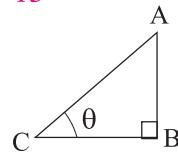
ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $\angle BCA = \theta$

ধরি, লম্ব AB = 12k একক এবং অতিভুজ AC = 13k একক [যেখানে, $k>0$]

$\therefore$ ভূমি $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(13k)^2 - (12k)^2}$ একক $= \sqrt{169k^2 - 144k^2}$ একক

$= 5k$ একক

$\therefore \tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$

$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$

প্রয়োগ : 5. θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta = \frac{8}{15}$ হলে, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র মান নির্ণয় করি ও দেখাই যে $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $\angle ACB = \theta$

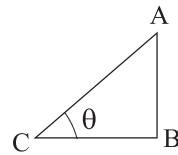
$\therefore \tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{15}$

ধরি, লম্ব AB = 8k একক এবং ভূমি BC = 15k একক [যেখানে, $k>0$]

$\therefore$ অতিভুজ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(8k)^2 + (15k)^2}$ একক $= \sqrt{64k^2 + 225k^2}$ একক

$= \sqrt{289k^2}$ একক $= 17k$ একক

$\therefore \sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}$

$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ [নিজে লিখি]

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{64}{289} + \frac{225}{289} = \square$ [নিজে লিখি]

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ [প্রমাণিত]

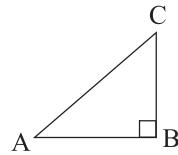
প্রয়োগ : 6. যদি $\tan\theta = \frac{4}{3}$ হয়, তবে দেখাই যে, $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 7. ABC ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য $\sqrt{13}$ একক। ওই ত্রিভুজের অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি 5 একক হলে, $\sin C + \sin A$-এর মান নির্ণয় করি।

ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC

$\angle C$-এর সাপেক্ষে লম্ব AB

এবং $\angle A$-এর সাপেক্ষে লম্ব BC

$$\therefore \sin C + \sin A = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{AB+BC}{AC} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

বিকল্প প্রমাণ : মনে করি, AB = x একক, BC = (5–x) একক

ABC সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$x^2+(5-x)^2 = (\sqrt{13})^2$$

বা, $x^2+25+x^2-10x = 13$

বা, $2x^2-10x+12 = 0$

বা, $x^2-5x+6 = 0$

বা, $x^2-3x-2x+6 = 0$

বা, $x(x-3)-2(x-3) = 0$

বা, $(x-3)(x-2) = 0$

হয়, $x-3 = 0 \quad \therefore x = 3$

অথবা, $x-2 = 0 \quad \therefore x = 2$

যদি, AB = 3 একক হয়, তখন BC = (5–3) একক = 2 একক

সুতরাং, $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ এবং $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$$\therefore \sin C + \sin A = \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

আবার, AB=2 একক হলে BC= ☐ একক এবং তখন sinC+sinA= ☐ [একই ভাবে নিজে হিসাব করে লিখি]

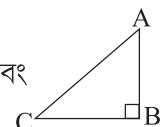
কিন্তু যদি (sinC–sinA)-এর মান নির্ণয় করতে চাই তাহলে কি প্রথম পদ্ধতিতে করব না বিকল্প প্রমাণের সাহায্যে করব তা যুক্তিসহ চিন্তা করে নিজে করি।

কষে দেখি 23.1

1. একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এঁকেছি যার অতিভুজ AB=10 সেমি., ভূমি BC= 8 সেমি. এবং লম্ব AC=6 সেমি.। $\angle ABC$-এর Sine এবং tangent-এর মান নির্ণয় করি।

2. সোমা একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার $\angle ABC=90^\circ$, AB=24 সেমি. এবং BC=7 সেমি.। হিসাব করে sinA, cosA, tanA ও cosecA-এর মান লিখি।

3. যদি ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C=90^\circ$, BC=21 একক এবং AB=29 একক হয়, তাহলে sinA, cosA, sinB ও cosB-এর মান নির্ণয় করি।

4. যদি $\cos\theta = \frac{7}{25}$ হয়, তাহলে θ কোণের সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করি।

5. যদি $\cot\theta=2$ হয়, তাহলে $\tan\theta$ ও $\sec\theta$-এর মান নির্ণয় করি এবং দেখাই যে, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
6. $\cos\theta=0.6$ হলে, দেখাই যে, $(5\sin\theta-3\tan\theta)=0$
7. যদি $\cot A=\frac{4}{7.5}$ হয়, তাহলে $\cos A$ এবং $\operatorname{cosec} A$-এর মান নির্ণয় করি এবং দেখাই যে, $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$
8. যদি $\sin C=\frac{2}{3}$ হয়, তবে $\cos C\times\operatorname{cosec} C$-এর মান হিসাব করে লিখি।
9. নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা তা যুক্তি সহকারে লিখি।
   (i) $\tan A$-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা বড়ো।
   (ii) $\cot A$-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা ছোটো।
   (iii) একটি কোণ θ-এর জন্য $\sin\theta=\frac{4}{3}$ হতে পারে।
   (iv) একটি কোণ α-এর জন্য $\sec\alpha=\frac{12}{5}$ হতে পারে।
   (v) একটি কোণ β(Beta)-এর জন্য $\operatorname{cosec}\beta=\frac{5}{13}$ হতে পারে।
   (vi) একটি কোণ θ-এর জন্য $\cos\theta=\frac{3}{5}$ হতে পারে।

আমাদের বন্ধুরা প্রত্যেকে ঘুড়ি ওড়াল। সবার ঘুড়িই অনেকটা উঁচুতে উড়েছিল। কিন্তু সতীশের ঘুড়ি সবচেয়ে বেশি উচ্চতায় উড়েছিল।

আজ আমরা ঠিক করেছি বাড়ি ফিরে নানা ধরনের সমকোণী ত্রিভুজ আঁকব (পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে) যাদের একটি কোণের পরিমাপ 30° বা 45° বা 60° এবং সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয়ের চেষ্টা করব।

আশা তার খাতায় একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল আর $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA$ -এর মান 45°

(9) আমার আঁকা ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি হিসাব করে লিখি।

ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA=45^\circ$

$\therefore\ \angle CAB=45^\circ$

$\therefore\ \Delta ABC$ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

সুতরাং, $BC=BA$

ধরি, $BA=BC=a$ একক

$\therefore\ AC^2=AB^2+BC^2=a^2+a^2=2a^2$

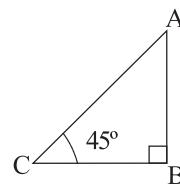
$\therefore\ AC=a\sqrt{2}$ একক

$\sin\angle BCA=\sin45^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{AB}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\angle BCA=\cos45^\circ=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

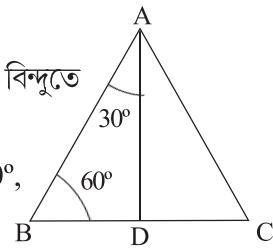
$\tan\angle BCA=\tan45^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{AB}{BC}=\frac{a}{a}=1$

বুঝেছি, $\operatorname{cosec}45^\circ=\frac{1}{\sin45^\circ}=\sqrt{2}$, $\sec45^\circ=\frac{1}{\square}=\sqrt{2}$ এবং $\cot45^\circ=\frac{1}{\tan45^\circ}=\square$

আমি 30° ও 60° কোণদ্বয়ের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করি।

আমি একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC আঁকলাম। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণ ☐ [60°/45°]

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [ΔABD ও ΔACD-তে $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle ABD = \angle ACD = 60^\circ$ এবং $AB = AC$.

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (A-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)]

$\therefore BD = DC$ এবং $\angle BAD = \angle CAD$

আবার, ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ; $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle DBA = 60^\circ$ $\therefore \angle BAD = 30^\circ$

ধরি, $AB = 2a$ একক, $\therefore BC = 2a$ একক

সুতরাং, $BD = \frac{1}{2}BC = a$ একক

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABD থেকে পাই, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$

$= \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ একক

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

বুঝেছি, cosec30° = ☐ , sec30° = ☐ এবং $\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$ **[নিজে লিখি]**

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

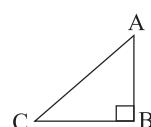
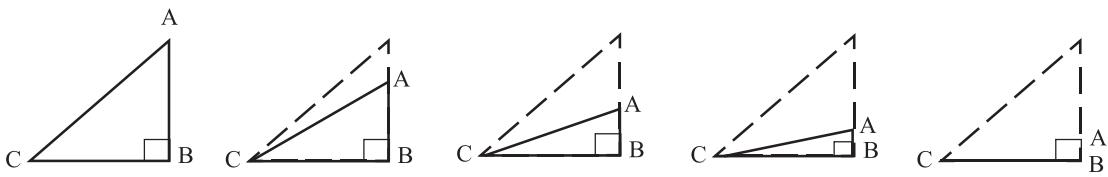
$$\cos 60^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AD}{BD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{\square}{\square}$ **[নিজে লিখি]**

$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$ এবং $\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10 কিন্তু যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ABC-এর সূক্ষ্মকোণটির মান যদি ক্রমশ কমতে থাকে তবে ওই সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের কী পরিবর্তন হবে ছবি এঁকে দেখি।

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ; $\angle BCA$ -এর মান ক্রমশ কমতে থাকল যতক্ষণ না কোণটির মান প্রায় 0°-এর কাছে হয়।

চিত্রে দেখছি, ∠BCA-এর মান যতই কমতে থাকছে A-বিন্দু ততই B বিন্দুর দিকে অগ্রসর হচ্ছে অর্থাৎ ততই AB বাহুর দৈর্ঘ্য কমতে থাকছে এবং A বিন্দু প্রায় B বিন্দুর কাছে এলে ∠BCA-এর মান প্রায় 0^{o} হয় এবং AC ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় সমান হয়। অর্থাৎ ∠BCA-এর মান প্রায় 0^{o}-এর কাছে আসলে AB বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় 0-এর কাছে হয়।

$\therefore\ \sin\angle BCA=\dfrac{AB}{AC}$ -এর মান প্রায় 0-এর কাছে হবে যখন ∠BCA-এর মান প্রায় 0^{o}-এর কাছে হয়।

আবার ∠BCA-এর মান যখন প্রায় 0^{o}-এর কাছে হয় তখন AC ও BC বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য প্রায় সমান হয়।

সুতরাং $\cos\angle BCA=\dfrac{BC}{AC}$ -এর মান প্রায় 1-এর কাছে হয় যখন ∠BCA-এর মান 0^{o}-এর কাছে হয়।

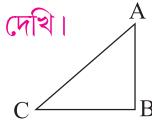
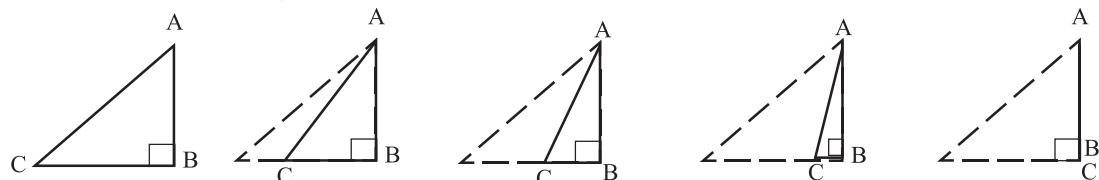
সুতরাং, এই ক্ষেত্রে নীচের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়।

$\sin 0^{o}=0$ এবং $\cos 0^{o}=1$

$\therefore\ \tan 0^{o}=\dfrac{\sin 0^{o}}{\cos 0^{o}}=0$ এবং $\cot 0^{o}=\dfrac{1}{\tan 0^{o}}$, যা অসংজ্ঞাত

বুঝেছি, $\operatorname{cosec}0^{o}=\dfrac{1}{\sin 0^{o}}$, যা অসংজ্ঞাত এবং $\sec 0^{o}=\dfrac{1}{\cos 0^{o}}=1$

যদি উপরের ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠BCA সূক্ষ্মকোণের মান ক্রমশ বৃদ্ধি পায় এবং প্রায় 90^{o} কোণের কাছাকাছি যায়, তখন ∠BCA কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান কী হবে দেখি।

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার ∠B সমকোণ,

∠BCA-এর মান ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকল যতক্ষণ না কোণটির মান প্রায় 90^{o}-এর কাছাকাছি হয়।

চিত্রে দেখছি, ∠BCA-এর মান বৃদ্ধি পেয়ে যতই প্রায় 90^{o}-এর দিকে কাছাকাছি যাচ্ছে ∠CAB-এর মান ততই কমে প্রায় 0^{o} কোণের কাছাকাছি যাচ্ছে এবং C বিন্দু B বিন্দুর দিকে ক্রমশ সরে যাওয়ায় CB বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ প্রায় শূন্যের কাছে যাচ্ছে।

আবার, AC বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ প্রায় AB বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান হচ্ছে।

সুতরাং, সেক্ষেত্রে $\sin\angle ACB=\dfrac{AB}{AC}$ -এর মান প্রায় 1-এর কাছাকাছি যাবে যখন ∠BCAএর মান 90^{o}-এর কাছাকাছি যাবে।

আবার, $\cos\angle BCA=\dfrac{BC}{AC}$ -এর মান প্রায় 0-এর কাছাকাছি যাবে যখন ∠BCA-এর মান প্রায় 90^{o}-এর কাছাকাছি যাবে।

সুতরাং, এক্ষেত্রে নীচের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়।

$\sin 90^{o}=1$ এবং $\cos 90^{o}=0$

$\therefore\ \tan 90^{o}=\dfrac{\sin 90^{o}}{\cos 90^{o}}$ যা অসংজ্ঞাত এবং $\cot 90^{o}=\dfrac{\cos 90^{o}}{\sin 90^{o}}=0$

$\operatorname{cosec}90^{o}$ ও $\sec 90^{o}$-এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

পেলাম,

θ কোণের কোণানুপাত	0° বা 0	30° বা $\frac{\pi}{6}$	45° বা $\frac{\pi}{4}$	60° বা $\frac{\pi}{3}$	90° বা $\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞাত
$\operatorname{cosec}\theta$	অসংজ্ঞাত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞাত
$\cot\theta$	অসংজ্ঞাত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

উপরের ছক থেকে দেখছি, θ কোণের মান 0° থেকে 90° বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $\sin\theta$-এর মান 0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 1 হয় এবং $\cos\theta$-এর মান 1 থেকে হ্রাস পেয়ে 0 হয়।

আরও দেখছি, 0° থেকে 90° পর্যন্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি শূন্য, ধনাত্মক বা অসংজ্ঞাত হয়। কিন্তু ঋণাত্মক হয় না।

যেহেতু দশম শ্রেণির পাঠ্যসূচিতে θ সর্বদা ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি ঋণাত্মক হবে না।

প্রয়োগ : 8. রীনার ঘুড়িটি যদি 150 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে ওড়ানো হয় এবং ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে থাকে, তবে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে কত উঁচুতে আছে হিসাব করে দেখি।

নীচের ছবিতে, ABC সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ABC=90^\circ$, AC=150 মিটার লম্বা সুতোসমেত ঘুড়ি

এবং $\angle BCA = 60^\circ$

AB = রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে ঘুড়ির উচ্চতা

ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB নির্ণয়ের জন্য সেই কোণানুপাতটি নেব যেখানে AB ও AC আছে। [∵ AC-এর দৈর্ঘ্য জানা]

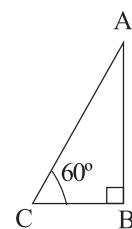
A
60°
C B

ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin 60^\circ = \frac{AB}{AC}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{150 \text{ মিটার}}$

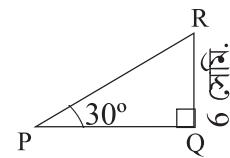
বা, $2AB = 150\sqrt{3}$ মিটার

বা, $AB = \frac{150\sqrt{3}}{2}$ মিটার $= 75\sqrt{3}$ মিটার

∴ ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে $75\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে আছে।

প্রয়োগ : 9. যদি ঘুড়িটি 120 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে ওড়ানো হতো এবং ঘুড়িটি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 30° কোণ করে থাকে, তাহলে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে কত উচ্চতায় থাকবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 10. PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle Q$ সমকোণ এবং $\angle P=30^\circ$; RQ=6 সেমি. হলে, PQ ও PR বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\tan 30^\circ = \frac{RQ}{PQ}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6\text{সেমি.}}{PQ}$ $\therefore PQ = 6\sqrt{3}$ সেমি.

সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\sin 30^\circ = \frac{RQ}{PR}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{6\text{সেমি.}}{PR}$ $\therefore PR = 12$ সেমি.

অন্যভাবে, পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই, $PR^2 = PQ^2+RQ^2$

$= (6\sqrt{3}\text{ সেমি.})^2 + (6\text{ সেমি.})^2$

$= 108\text{ সেমি.}^2 + 36\text{ সেমি.}^2$

$= 144\text{ সেমি.}^2$

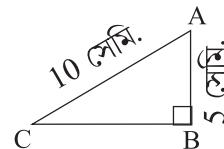
$\therefore PR = 12$ সেমি.

প্রয়োগ : 11. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। AB=5 সেমি. এবং AC=10 সেমি. হলে, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ -এর মান নির্ণয় করি।

ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ

AB=5 সেমি. এবং AC=10 সেমি.

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-তে, $\sin\angle BCA = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

$\therefore \angle BCA = 30^\circ$

$\therefore \angle CAB = 90^\circ - 30^\circ =$ ☐

প্রয়োগ : 12. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। AB=7 সেমি. এবং $AC=7\sqrt{2}$ সেমি. হলে, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ -এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 13. দেখাই যে, $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 14. দেখাই যে, $\tan^2 60^\circ + 1 = \sec^2 60^\circ$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 15. ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে $\sin\angle BAD = \cos\angle DBA$.

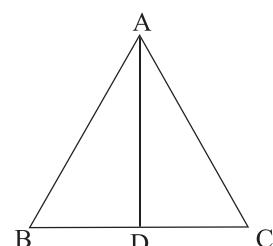
ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা।

$\therefore AD \perp BC$ এবং $\angle BAD = \angle DAC$

ABD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle DBA = 60^\circ$ [$\because$ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

$\therefore \angle BAD = 30^\circ$

$\therefore \sin\angle BAD = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ এবং $\cos\angle DBA = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\therefore \sin\angle BAD = \cos\angle DBA$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 16. প্রমাণ করি যে, $\frac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \cos 60^\circ$

$$\frac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

প্রয়োগ : 17. প্রমাণ করি যে, $\tan^2 60^\circ - 2\sin 60^\circ = 3 - \cot 30^\circ$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 18. মান নির্ণয় করি : $\dfrac{5\cos^2\frac{\pi}{3}+4\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}}$

$$\frac{5\cos^2\frac{\pi}{3}+4\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{4}{4}} = \frac{67}{12} = 5\frac{7}{12}$$

প্রয়োগ : 19. $\sin(A+B)=1$ এবং $\cos(A-B)=1$ যেখানে, $0^\circ \le (A+B) \le 90^\circ$ এবং $A>B$; A ও B কোণের মান নির্ণয় করি।

$\sin(A+B)=1=\sin 90^\circ$

$\therefore A+B=90^\circ$

আবার, $\cos(A-B)=1=\cos 0^\circ$

$\therefore A-B=0^\circ$

$A+B=90^\circ$

$A-B=0^\circ$

$2A \quad = 90^\circ$

$\therefore A=45^\circ$ এবং $B=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

প্রয়োগ : 20. θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$ -এর কোন মানের জন্য $\sin^2\theta-3\sin\theta+2=0$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

$\sin^2\theta-3\sin\theta+2=0$

বা, $\sin^2\theta-2\sin\theta-\sin\theta+2=0$

বা, $\sin\theta(\sin\theta-2)-1(\sin\theta-2)=0$

বা, $(\sin\theta-1)(\sin\theta-2)=0$

হয়, $\sin\theta-1=0 \quad \therefore \sin\theta=1$;

অথবা, $\sin\theta-2=0 \quad \therefore \sin\theta=2$

যেহেতু, $\sin\theta$ -এর মান 1-এর বেশি হতে পারে না, সুতরাং $\sin\theta=1=\sin 90^\circ \quad \therefore \theta=90^\circ$

প্রয়োগ : 21. θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)-এর কোন মান/মানগুলির জন্য $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

বা, $\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = 0$ হলে, $\cos\theta = 0 = \cos 90^\circ$ $\therefore \theta = 90^\circ$

আবার, $2\sin\theta - 1 = 0$ হলে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ $\therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore \theta = 90^\circ$ বা $\theta = 30^\circ$ মানের জন্য $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ হবে।

কিন্তু $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দিয়ে ভাগ করলে শুধু পাই $\theta = 30^\circ$, θ-এর অন্য মানটি পাওয়া গেল না কেন দেখি।

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$-এর উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দিয়ে ভাগ করলে পাই, $2\sin\theta = 1$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ $\therefore \theta = 30^\circ$

কিন্তু এখানে $\cos\theta \neq 0$ নয়। তাই $\cos\theta$ দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করা যায় না। এর জন্য θ-এর দুটি মানের পরিবর্তে একটি মান পাওয়া গেল।

কষে দেখি 23.2

1. আমাদের বাড়ির জানালায় একটি মই ভূমির সঙ্গে 60° কোণে রাখা আছে। মইটি $2\sqrt{3}$ মিটার লম্বা হলে আমাদের ওই জানালাটি ভূমি থেকে কত উপরে আছে ছবি এঁকে হিসাব করে লিখি।
2. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। $AB = 8\sqrt{3}$ সেমি. এবং $BC = 8$সেমি. হলে, $\angle ACB$ ও $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।
3. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ এবং $AC = 20$ সেমি.। BC এবং AB বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = 45^\circ$; যদি $PR = 3\sqrt{2}$ মিটার হয়, তাহলে PQ ও QR বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।
5. **মান নির্ণয় করি :**

(i) $\sin^2 45^\circ - \text{cosec}^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ$ (ii) $\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{3}\cot^2 30^\circ - \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$

(iv) $\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\text{cosec}^2 60^\circ - \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ$

(v) $\dfrac{\frac{1}{3}\cos 30^\circ}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ} + \dfrac{\tan 60^\circ}{\cos 30^\circ}$ (vi) $\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \frac{3}{4}\sec^2 45^\circ - 4\sin^2 30^\circ$

(vii) $\sec^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ - \dfrac{2\tan 30^\circ \text{cosec} 60^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

(viii) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 30^\circ} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

(ix) $\dfrac{1-\sin^2 30^\circ}{1+\sin^2 45^\circ} \times \dfrac{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ}{\text{cosec}^2 90^\circ - \cot^2 90^\circ} \div (\sin 60^\circ \tan 30^\circ)$

6. দেখাই যে,

(i) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$ (ii) $\cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ (iii) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} = \sqrt{3}$

(iv) $\sqrt{\dfrac{1+\cos30^\circ}{1-\cos30^\circ}} = \sec 60^\circ + \tan 60^\circ$ (v) $\dfrac{2\tan^2 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} + \sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ = \sec 60^\circ$

(vi) $\tan^2\frac{\pi}{4}\ \sin\frac{\pi}{3}\ \tan\frac{\pi}{6}\ \tan^2\frac{\pi}{3} = 1\frac{1}{2}$ (vii) $\sin\frac{\pi}{3}\ \tan\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} = 2\sin^2\frac{\pi}{4}$

7. (i) $x\sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = \tan^2 45^\circ - \cos 60^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $x \sin 60^\circ \cos^2 30^\circ = \dfrac{\tan^2 45^\circ \sec 60^\circ}{\operatorname{cosec} 60^\circ}$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $x^2 = \sin^2 30^\circ + 4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

8. $x \tan 30^\circ + y \cot 60^\circ = 0$ এবং $2x - y \tan 45^\circ = 1$ হলে, x ও y-এর মান হিসাব করে লিখি।

9. যদি $A = B = 45^\circ$ হয়, তবে যাচাই করি যে,

(i) $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

10. (i) ABC সমবাহু ত্রিভুজের BD একটি মধ্যমা। প্রমাণ করি যে, $\tan\angle ABD = \cot\angle BAD$

(ii) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB=AC এবং $\angle BAC=90^\circ$; $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করি যে, $\dfrac{\sec\angle ACD}{\sin\angle CAD} = \operatorname{cosec}^2 \angle CAD$

11. $\theta\ (0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$ - এর কোন মান/মানগুলির জন্য $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

আমাদের বন্ধু বিশাখ বোর্ডে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল যার $\angle B$ সমকোণ।

11 আজ আমরা বিশাখের আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের যে-কোনো সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মধ্যে সম্পর্ক খোঁজার চেষ্টা করব।

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ।

∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই, $AB^2+BC^2 = AC^2$ ——— (i)

(i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে AC^2 দ্বারা ভাগ করে পাই,

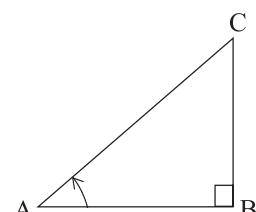
$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

বা, $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 = 1$

$\therefore\ \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ——— (I)

দেখছি, (I) নং সম্পর্কটি A কোণের সকল মানের জন্য প্রযোজ্য যখন $0^\circ \le A \le 90^\circ$

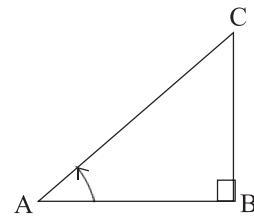
কিন্তু (I) নং সম্পর্কটিকে কী বলা হয়?

(I) নং সম্পর্কটি একটি **অভেদ**।

(i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে AB^2 দ্বারা ভাগ করি ও কী পাই দেখি।

$AB^2+BC^2=AC^2$

বা, $\frac{AB^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$

$\therefore\ 1+\tan^2A=\sec^2A$ ________ (II)

(II) নং অভেদে $A=0^o$ ও $A=90^o$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$A=0^o$ হলে II নং অভেদটি সত্য। কিন্তু $A=90^o$ হলে $\tan A$ অসংজ্ঞাত।

$\therefore$ **পেলাম,** A-এর সকল মানের জন্য যেখানে $0^o\leq A<90^o$

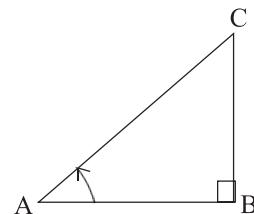
$1+\tan^2A=\sec^2A$ ________ (II)

কিন্তু (i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে BC^2 দ্বারা ভাগ করি ও কী পাই দেখি।

$AB^2+BC^2=AC^2$

বা, $\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{BC^2}{BC^2}=\frac{AC^2}{BC^2}$

বা, $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+1=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

$\therefore\ \cot^2A+1=\text{cosec}^2A$ ________ (III)

(III) নং অভেদে $A=90^o$ ও $A=0^o$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$A=90^o$ হলে (III) নং অভেদটি সত্য। কিন্তু $A=0^o$ হলে $\cot A$ অসংজ্ঞাত।

$\therefore$ **পেলাম,** A-এর সকল মানের জন্য যেখানে $0^o<A\leq 90^o$

$1+\cot^2A=\text{cosec}^2A$ ________ (III)

12 আমি (I), (II) ও (III) নং অভেদের সাহায্যে প্রতিটি ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতকে অন্য ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ করার চেষ্টা করি।

(I) নং থেকে পাই, $\sin^2A+\cos^2A=1$

$\therefore\ \sin A=\sqrt{1-\cos^2A}$ এবং $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^o\leq A\leq 90^o$

(II) নং থেকে পাই, $1+\tan^2A=\sec^2A$

$\therefore\ \sec A=\sqrt{1+\tan^2A}$ এবং $\tan A=\sqrt{\sec^2A-1}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^o\leq A<90^o$

(III) নং থেকে পাই, $1+\cot^2A=\text{cosec}^2A$

$\therefore\ \text{cosec}A=\sqrt{1+\cot^2A}$ এবং $\cot A=\sqrt{\text{cosec}^2A-1}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^o<A\leq 90^o$

প্রয়োগ : 22. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ হলে, $\sin\theta = 0.5$ এবং $\cos\theta = 0.6$ হওয়া সম্ভব কিনা যুক্তিসহ লিখি।

$\sin\theta = 0.5 \qquad \therefore \sin^2\theta = 0.25$

$\cos\theta = 0.6 \qquad \therefore \cos^2\theta = 0.36$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 0.25 + 0.36 = 0.61$

কিন্তু $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ হলে $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore$ $\sin\theta = 0.5$ এবং $\cos\theta = 0.6$ হওয়া সম্ভব নয়।

প্রয়োগ : 23. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ হলে, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\cos\theta = \frac{1}{3}$ হওয়া সম্ভব কিনা যুক্তিসহ লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 24. $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হলে, দেখাই যে, $\sin\theta + \cos\theta > 1$

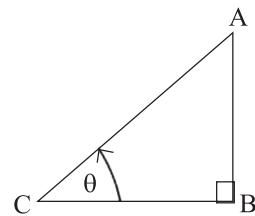
ধরি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ।

ধরি, $\angle BCA = \theta$ [যেখানে $0^\circ < \theta < 90^\circ$]

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$ এবং $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{AB+BC}{AC}$

কিন্তু ABC ত্রিভুজে, $AB + BC > AC$ সুতরাং, $\frac{AB+BC}{AC} > 1$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta > 1$

(i) $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ (a) যদি লম্ব > ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} > 1$

(b) আবার যদি লম্ব < ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} < 1$ হয়,

(c) যখন লম্ব = ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = 1$ হয়।

তাই $\tan\theta$-এর মান 1-এর বেশি, 1-এর কম এবং 1-এর সমান হতে পারে।

$\tan\theta = \sqrt{2}$ হওয়া সম্ভব কি?

যেহেতু $\sqrt{2} > 1$, তাই, $\tan\theta = \sqrt{2}$ হতে পারে।

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$ যেহেতু, অতিভুজ > লম্ব, সুতরাং, $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} > 1$

$\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$ হওয়া সম্ভব কি?

যেহেতু, $\sqrt{3} > 1$ সুতরাং $\operatorname{cosec}\theta$-এর মান $\sqrt{3}$ হওয়া সম্ভব।

প্রয়োগ : 25. আমি $\cot\theta$ ও $\sec\theta$ কে, $\sin\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

সুতরাং, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

প্রয়োগ : 26. আমি $\cot\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ কে, $\cos\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 27. যদি $\tan\theta = \frac{8}{15}$ হয়, তাহলে $\sin\theta$ -এর মান কী হবে হিসাব করে লিখি।

$$\tan\theta = \frac{8}{15}$$

আমরা জানি, $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\left(\frac{8}{15}\right)^2 = 1+\frac{64}{225} = \frac{289}{225}$

$$\therefore \sec\theta = \frac{17}{15}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{15}{17}$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{289-225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

অন্যভাবে পাই, $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{17}{15}} = \frac{8}{17}$

বিকল্প প্রমাণ : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ। ধরি, $\angle ACB=\theta$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{8}{15}$$

ধরি, AB=8k একক এবং BC=15k একক (যেখানে $k > 0$)

ABC ত্রিভুজে, $AC^2=AB^2+BC^2 = (8k \text{ একক})^2+(15k \text{ একক})^2$

$= 64k^2$ বর্গএকক $+225k^2$ বর্গএকক $= 289k^2$ বর্গএকক

$\therefore AC=17k$ একক

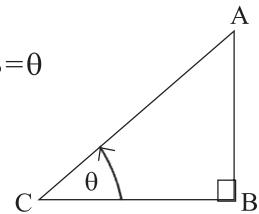
$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{8k}{17k}$ $\quad \therefore \sin\theta = \frac{8}{17}$

প্রয়োগ : 28. যদি $\tan\theta = \frac{4}{3}$ হয়, তাহলে $(\sin\theta+\cos\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 29. $\sin A = \frac{p}{q}$ হলে, $\tan A$, $\cot A$ ও $\sec A$-এর প্রত্যেকটি কত হবে নির্ণয় করি।

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{\frac{q^2-p^2}{q^2}}} = \frac{p}{q}\times\frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}}{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}\times\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

বিকল্প প্রমাণ : PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle Q$ সমকোণ।

ধরি, $\angle PRQ = A$

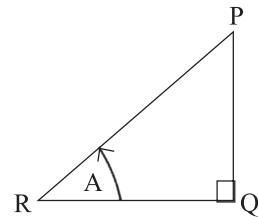
$$\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{p}{q}$$

ধরি, PQ = pk একক এবং PR=qk একক, যেখানে $k > 0$,

PQR ত্রিভুজে, $QR^2 = PR^2 - PQ^2 = q^2k^2 - p^2k^2 = k^2(q^2-p^2)$

$\therefore QR = k\sqrt{q^2-p^2}$

$$\tan A = \frac{PQ}{QR} = \frac{pk}{k\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\sec A = \frac{PR}{QR} = \frac{qk}{k\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$$

প্রয়োগ : 30. যদি $\cot\theta = \frac{x}{y}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $\frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{x\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{y\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{x\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{y\sin\theta}{\sin\theta}} \quad \text{[লব ও হরকে } \sin\theta \text{ দিয়ে ভাগ করে পাই]}$$

$$= \frac{x\cot\theta - y}{x\cot\theta + y} = \frac{x\times\frac{x}{y} - y}{x\times\frac{x}{y} + y} = \frac{\frac{x^2-y^2}{y}}{\frac{x^2+y^2}{y}} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \text{ডানপক্ষ}$$

বিকল্প পদ্ধতি : (I) $\cot\theta = \frac{x}{y}$ বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$

$\therefore \frac{\cos\theta}{x} = \frac{\sin\theta}{y} = k$ (ধরি) যেখানে $k>0$

$\therefore \cos\theta = xk$ এবং $\sin\theta = yk$

$$\therefore \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x\times xk - y\times yk}{x\times xk + y\times yk} = \frac{k(x^2-y^2)}{k(x^2+y^2)} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

> **মনে রাখতে হবে :** $\cot\theta = \frac{x}{y}$ থেকে $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$ পাই,
> কিন্তু $\cos\theta = x$ এবং $\sin\theta = y$ লেখা ভুল। $\cos\theta = xk$ এবং $\sin\theta = yk$ নিতে পারি, যেখানে $k > 0$.

বিকল্প পদ্ধতি : (II) $\cot\theta = \frac{x}{y}$ বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{x\cos\theta}{y\sin\theta} = \frac{x^2}{y^2}$ (উভয়পক্ষে $\frac{x}{y}$ দ্বারা গুণ করে পাই)

বা, $\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{x\cos\theta - y\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই)

$\therefore \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

প্রয়োগ : 31. যদি $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$ এবং $\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$ হয়, তাহলে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{7}{5}-\sin\theta$ ―――― (i)

$\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$, সমীকরণে $\cos\theta=\frac{7}{5}-\sin\theta$ বসিয়ে পাই,

$$\sin\theta\times\left(\frac{7}{5}-\sin\theta\right)=\frac{12}{25}$$

বা, $\frac{7\sin\theta}{5}-\sin^2\theta=\frac{12}{25}$

বা, $7\sin\theta-5\sin^2\theta=\frac{12}{5}$

বা, $35\sin\theta-25\sin^2\theta=12$

বা, $25\sin^2\theta-35\sin\theta+12=0$

বা, $25\sin^2\theta-20\sin\theta-15\sin\theta+12=0$

বা, $5\sin\theta(5\sin\theta-4)-3(5\sin\theta-4)=0$

বা, $(5\sin\theta-4)(5\sin\theta-3)=0$ [উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পেলাম]

হয়, $5\sin\theta-4=0 \quad \therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$

অথবা, $5\sin\theta-3=0 \quad \therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{5}$ হলে, $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

আবার, $\sin\theta=\frac{3}{5}$ হলে, $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \left.\begin{array}{l}\sin\theta=\frac{4}{5}\\ \cos\theta=\frac{3}{5}\end{array}\right\}$ অথবা $\begin{array}{l}\sin\theta=\frac{3}{5}\\ \cos\theta=\frac{4}{5}\end{array}$

বিকল্প প্রমাণ : $(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$

$$=\left(\frac{7}{5}\right)^2-4\times\frac{12}{25}=\frac{49}{25}-\frac{48}{25}=\frac{1}{25}$$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{1}{5}$$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$

যোগ করে পাই, $2\sin\theta=\frac{8}{5}$

$\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$ এবং $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

আবার, $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{5}$

$2\sin\theta=\frac{6}{5}$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$ এবং $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{4}{5}, \cos\theta=\frac{3}{5}$ অথবা, $\sin\theta=\frac{3}{5}, \cos\theta=\frac{4}{5}$

প্রয়োগ : 32. $1+2\sin\theta\cos\theta$ -কে পূর্ণবর্গ রাশি হিসাবে প্রকাশ করি।

$$1+2\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta \quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$$
$$= (\sin\theta+\cos\theta)^2$$

প্রয়োগ : 33. $\dfrac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = 2\dfrac{51}{79}$ হলে, $\sin\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

$$\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = 2\frac{51}{79} = \frac{209}{79}$$

বা, $\dfrac{\sec\theta+\tan\theta+\sec\theta-\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta-\sec\theta+\tan\theta} = \dfrac{209+79}{209-79}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই)

বা, $\dfrac{2\sec\theta}{2\tan\theta} = \dfrac{288}{130}$

বা, $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta} = \dfrac{130}{288} = \dfrac{65}{144}$

বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos\theta = \dfrac{65}{144}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{65}{144}$

প্রয়োগ : 34. $\dfrac{5\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta}{5\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta} = \dfrac{7}{3}$ হলে, $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 35. $x=a\cos\theta$ এবং $y=b\sin\theta$ হলে, সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করি ও কী পাই দেখি।

$x=a\cos\theta \quad \therefore \cos\theta = \dfrac{x}{a}$

আবার, $y=b\sin\theta \quad \therefore \sin\theta = \dfrac{y}{b}$

যেহেতু, $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$\therefore \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = 1$

সুতরাং, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

প্রয়োগ : 36. $2x=3\sin\theta$ এবং $5y=3\cos\theta$ সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করে x ও y -এর সম্পর্ক লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 37. $x\cos\theta=3$ এবং $4\tan\theta=y$ সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করি ও x এবং y -এর সম্পর্ক লিখি।

$x\cos\theta=3$ বা, $\cos\theta = \dfrac{3}{x} \quad \therefore \sec\theta = \dfrac{x}{3}$

$4\tan\theta=y \quad \therefore \tan\theta = \dfrac{y}{4}$

যেহেতু, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

সুতরাং, $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1$

$\therefore \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

প্রয়োগ : 38. $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$ সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 39. $x=a\cos\theta+b\sin\theta$, $y=b\cos\theta-a\sin\theta$ হলে, সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করি।

$$x^2+y^2 = (a\cos\theta+b\sin\theta)^2+(b\cos\theta-a\sin\theta)^2$$
$$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta$$
$$= a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$= a^2+b^2 \quad [\because \sin^2\theta+\sin^2\theta=1]$$
$$\therefore x^2+y^2 = a^2+b^2$$

প্রয়োগ : 40. যদি $\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta=2$ হয়, তাহলে $(\sin^{10}\theta+\operatorname{cosec}^{10}\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

$\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta=2$

বা, $\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}=2$

বা, $\dfrac{\sin^2\theta+1}{\sin\theta}=2$

বা, $\sin^2\theta+1=2\sin\theta$

বা, $\sin^2\theta-2\sin\theta+1=0$

বা, $(\sin\theta-1)^2=0$

বা, $\sin\theta-1=0$

$\therefore$ $\sin\theta=1$

সুতরাং, $\operatorname{cosec}\theta=1$

$$\sin^{10}\theta+\operatorname{cosec}^{10}\theta = (1)^{10}+(1)^{10}$$
$$= 1+1$$
$$= 2$$

প্রয়োগ : 41. যদি $\cos\theta+\sec\theta=2$ হয়, তাহলে $(\cos^{11}\theta+\sec^{11}\theta)$-এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 42. যদি $0^\circ<\alpha\leq 90^\circ$ হয়, তাহলে $(4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha)$ -এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

$$4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha)^2+(3\sin\alpha)^2$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2+2\times2\operatorname{cosec}\alpha\times3\sin\alpha$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2+12\times\frac{1}{\sin\alpha}\times\sin\alpha$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2+12$$

যে-কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যামালার সর্বনিম্ন মান 0 (শূন্য)। সুতরাং $(2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2$-এর ন্যূনতম মান শূন্য।

$\therefore$ $(4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha)$-এর সর্বনিম্ন মান 12

$$4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha = (2\operatorname{cosec}\alpha+3\sin\alpha)^2-2\times2\operatorname{cosec}\alpha\times3\sin\alpha$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha+3\sin\alpha)^2-12$$

$(2\operatorname{cosec}\alpha+3\sin\alpha)^2$-এর ন্যূনতম মান 0 (শূন্য)। সুতরাং $(4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha)$-এর ন্যূনতম মান -12

তাহলে কোনটি ন্যূনতম মান হবে?

দুটি বর্গ সংখ্যামালার সমষ্টি ঋণাত্মক হতে পারে না। তাই $(4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha)$ -এর মান 12।

কষে দেখি 23.3

1. (i) $\sin\theta=\frac{4}{5}$ হলে, $\frac{\text{cosec}\theta}{1+\cot\theta}$ -এর মান নির্ণয় করে লিখি।

   (ii) যদি $\tan\theta=\frac{3}{4}$ হয়, তবে দেখাই যে $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{2}$

   (iii) $\tan\theta=1$ হলে, $\frac{8\sin\theta+5\cos\theta}{\sin^3\theta-2\cos^3\theta+7\cos\theta}$ -এর মান নির্ণয় করি।

2. (i) $\text{cosec}\theta$ এবং $\tan\theta$-কে $\sin\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

   (ii) $\text{cosec}\theta$ এবং $\tan\theta$-কে $\cos\theta$-এর মাধ্যমে লিখি।

3. (i) $\sec\theta+\tan\theta=2$ হলে, $(\sec\theta-\tan\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

   (ii) $\text{cosec}\theta-\cot\theta=\sqrt{2}-1$ হলে, $(\text{cosec}\theta+\cot\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (iii) $\sin\theta+\cos\theta=1$ হলে, $\sin\theta\times\cos\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

   (iv) $\tan\theta+\cot\theta=2$ হলে, $(\tan\theta-\cot\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

   (v) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{13}$ হলে, $\sin\theta+\cos\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

   (vi) $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ হলে, $(\sin\theta+\cos\theta)$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (vii) $\sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sec\theta$ এবং $\tan\theta$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

   (viii) $\text{cosec}\theta+\cot\theta=\sqrt{3}$ হলে, $\text{cosec}\theta$ এবং $\cot\theta$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

   (ix) $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=7$ হলে, $\tan\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (x) $\frac{\text{cosec}\theta+\sin\theta}{\text{cosec}\theta-\sin\theta}=\frac{5}{2}$ হলে, $\sin\theta$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (xi) $\sec\theta+\cos\theta=\frac{5}{2}$ হলে, $(\sec\theta-\cos\theta)$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (xii) $5\sin^2\theta+4\cos^2\theta=\frac{9}{2}$ সম্পর্কটি থেকে $\tan\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

   (xiii) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\frac{10}{3}$ হলে, $\tan\theta+\cot\theta$ এবং $\tan\theta-\cot\theta$ -এর মান নির্ণয় করি এবং সেখান থেকে $\tan\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (xiv) $\sec^2\theta+\tan^2\theta=\frac{13}{12}$ হলে, $(\sec^4\theta-\tan^4\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

4. (i) PQR ত্রিভুজে $\angle Q$ সমকোণ। $PR=\sqrt{5}$ একক এবং $PQ-RQ=1$ একক হলে, $\cos P-\cos R$-এর মান নির্ণয় করি।

   (ii) XYZ ত্রিভুজে $\angle Y$ সমকোণ। $XY=2\sqrt{3}$ একক এবং $XZ-YZ=2$ একক হলে, $(\sec X-\tan X)$-এর মান নির্ণয় করি।

5. সম্পর্কগুলি থেকে 'θ' অপনয়ন করি :

   (i) $x=2\sin\theta$, $y=3\cos\theta$ (ii) $5x=3\sec\theta$, $y=3\tan\theta$

6. (i) যদি $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ হয়, তাহলে দেখাই যে $\tan\alpha+\sec\alpha=1.5$

   (ii) যদি $\tan A=\frac{n}{m}$ হয়, তাহলে $\sin A$ ও $\sec A$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

(iii) যদি $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x\sin\theta=y\cos\theta$

(iv) যদি $\sin\alpha=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\cot\alpha=\frac{2ab}{a^2-b^2}$

(v) যদি $\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\sin\theta-\cos\theta=\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(vi) যদি $(1+4x^2)\cos A=4x$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\operatorname{cosec}A+\cot A=\frac{1+2x}{1-2x}$

7. যদি $x=a\sin\theta$ এবং $y=b\tan\theta$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{y^2}=1$

8. যদি $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$

9. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) যদি $3x=\operatorname{cosec}\alpha$ এবং $\frac{3}{x}=\cot\alpha$ হয়, তাহলে $3(x^2-\frac{1}{x^2})$-এর মান (a) $\frac{1}{27}$ (b) $\frac{1}{81}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{9}$

(ii) যদি $2x=\sec A$ এবং $\frac{2}{x}=\tan A$ হয়, তাহলে $2(x^2-\frac{1}{x^2})$-এর মান (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{16}$

(iii) $\tan\alpha+\cot\alpha=2$ হলে, $(\tan^{13}\alpha+\cot^{13}\alpha)$-এর মান (a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) কোনটিই নয়

(iv) যদি $\sin\theta-\cos\theta=0$ $(0^\circ\leq\theta\leq90^\circ)$ এবং $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=x$ হয়, তাহলে x-এর মান
(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

(v) $2\cos3\theta=1$ হলে, θ-এর মান (a) 10° (b) 15° (c) 20° (d) 30°

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) যদি, $0^\circ\leq\alpha<90^\circ$ হয়, তাহলে $(\sec^2\alpha+\cos^2\alpha)$-এর সর্বনিম্ন মান 2

(ii) $(\cos0^\circ\times\cos1^\circ\times\cos2^\circ\times\cos3^\circ\times$.............. $\cos90^\circ)$ -এর মান 1

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $\left(\frac{4}{\sec^2\theta}+\frac{1}{1+\cot^2\theta}+3\sin^2\theta\right)$ -এর মান ________

(ii) $\sin(\theta-30^\circ)=\frac{1}{2}$ হলে, $\cos\theta$ -এর মান ________

(iii) $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{2}$ হলে, $\cos^4\theta-\sin^4\theta$ -এর মান ________

10. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) যদি $r\cos\theta=2\sqrt{3}$, $r\sin\theta=2$ এবং $0^\circ<\theta<90^\circ$ হয়, তাহলে r এবং θ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

(ii) যদি $\sin A+\sin B=2$ হয়, যেখানে $0^\circ\leq A\leq90^\circ$ এবং $0^\circ\leq B\leq90^\circ$, তাহলে $(\cos A+\cos B)$-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) যদি $0^\circ<\theta<90^\circ$ হয়, তাহলে $(9\tan^2\theta+4\cot^2\theta)$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

(iv) $(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$-এর মান নির্ণয় করি।

(v) যদি $\operatorname{cosec}^2\theta=2\cot\theta$ এবং $0^\circ<\theta<90^\circ$ হয়, তাহলে θ-এর মান নির্ণয় করি।

24 পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

TRIGONOMETRIC RATIOS OF COMPLEMENTARY ANGLE

আমরা যে বড়ো মাঠে রোজ খেলা করি, তার পাশেই রামুদের বাগান বাড়ি। প্রায়ই আমাদের খেলার বল ওদের বাগানে পড়ে যায়। আজ আমরা ওদের বাগানের পাঁচিলের দেয়ালে হেলান দিয়ে একটি মই রেখে দিয়েছি। আমরা ঠিক করেছি বাগানে বল পড়লে ওই মই-এর সাহায্যে বাগানে গিয়ে বল আনতে পারব।

(1) কিন্তু দেখছি মইটি ওইভাবে রাখায় মই, ভূমি ও বাগানের পাঁচিলের ধার সমকোণী ত্রিভুজ আকারে আছে। এই সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণগুলির মধ্যে সম্পর্ক লিখি।

ধরি, পাশের ছবির AB পাঁচিল BC ভূমির উপর লম্ব এবং AC মই-এর দৈর্ঘ্য; AC , BC-এর সঙ্গে θ কোণ করে আছে।

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি হয়েছে যার $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $\angle BCA = \theta$

(2) কিন্তু $\angle CAB$-এর মান কত হবে?

$\angle BCA = \theta$ হলে $\angle CAB = 90^\circ - \theta$

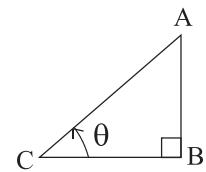
বুঝেছি, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ পরস্পর $\square$ [পূরক/সম্পূরক]

$\angle BCA$ ও $\angle CAB$ দুটি পরস্পর পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত কী হবে ছবি এঁকে হিসাব করি।

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B = 90^\circ$

ধরি, $\angle BCA = \theta \quad \therefore \angle CAB = 90^\circ - \theta$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{AB}{AC}, \cos\theta = \dfrac{BC}{AC}, \tan\theta = \dfrac{\square}{\square}, \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{AC}{AB}, \sec\theta = \dfrac{\square}{\square}$

এবং $\cot\theta = \dfrac{BC}{AB}$

(3) আমি সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $(90^\circ - \theta)$ সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি লিখি।

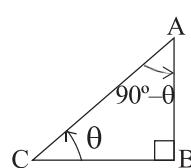
$\sin(90^\circ - \theta) = \sin\angle CAB = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BC}{AC}$

$\cos(90^\circ - \theta) = \cos\angle CAB = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\tan(90^\circ - \theta) = \tan\angle CAB = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{\square}{\square}$

$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\angle CAB = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{AC}{BC}$

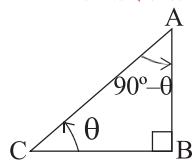
$\sec(90^\circ - \theta) = \sec\angle CAB = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$

$\cot(90^\circ - \theta) = \cot\angle CAB = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{AB}{BC}$

4 সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ ও $\angle CAB$-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি তুলনা করে কী পাই লিখি।

দেখছি, $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ | $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$ | $\cot(90^\circ-\theta)=$ ☐ [নিজে করি]

$\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$ | $\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=$ ☐ [নিজে করি]

A, $90^\circ-\theta$, C, θ, B

বুঝেছি, যদি মইটি ভূমির সঙ্গে 60° কোণ করে, অর্থাৎ যদি $\theta=60^\circ$ হয়, $\sin\theta=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

আবার, $\cos(90^\circ-\theta)=\cos(90^\circ-60^\circ)$

$=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ পেলাম, $\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$

যদি $\theta=45^\circ$ হয় $\tan\theta=\cot(90^\circ-\theta)$ **[নিজে যাচাই করি]**

দেখছি, 0° এবং 90°-এর মধ্যে সকল কোণের জন্য পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের অভেদগুলি সত্য।

5 কিন্তু $\theta=0^\circ$ এবং $\theta=90^\circ$ হলে কী পাব দেখি।

$\theta=0^\circ$ হলে, $\tan0^\circ=0=\cot(90^\circ-0^\circ)$

এবং $\sec0^\circ=1=\operatorname{cosec}(90^\circ-0^\circ)$

$\theta=90^\circ$ হলে, $\tan 90^\circ$, $\sec 90^\circ$ অসংজ্ঞাত।

এবং $\theta=0^\circ$ হলে, $\cot 0^\circ$, $\operatorname{cosec} 0^\circ$ অসংজ্ঞাত।

প্রয়োগ : 1. $\frac{\cos 53^\circ}{\sin 37^\circ}$ -এর মান নির্ণয় করি।

আমরা জানি, $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\cos 53^\circ=\cos(90^\circ-37^\circ)=\sin37^\circ$

$\therefore \frac{\cos 53^\circ}{\sin 37^\circ}=\frac{\sin 37^\circ}{\sin 37^\circ}=1$

প্রয়োগ : 2. $\frac{\sec 49^\circ}{\operatorname{cosec} 41^\circ}$ -এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 3. দেখাই যে, $\cos 55^\circ\cos 35^\circ-\sin 55^\circ\sin 35^\circ=0$

$\cos 55^\circ\cos 35^\circ-\sin 55^\circ\sin 35^\circ$

$=\cos(90^\circ-35^\circ)\cos 35^\circ-\sin(90^\circ-35^\circ)\sin 35^\circ$

$=\sin 35^\circ\cos 35^\circ-\cos 35^\circ\sin 35^\circ=0$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 4. দেখাই যে, $\sin 43^\circ\cos 47^\circ+\cos 43^\circ\sin 47^\circ=1$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5. প্রমাণ করি যে, $\tan 7^\circ\tan 23^\circ\tan 60^\circ\tan 67^\circ\tan 83^\circ=\sqrt{3}$

$\tan 7^\circ\tan 23^\circ\tan 60^\circ\tan 67^\circ\tan 83^\circ$

$=(\tan 7^\circ\tan 83^\circ)\tan 60^\circ(\tan 23^\circ\tan 67^\circ)$

$=\{\tan 7^\circ\times(\tan(90^\circ-7^\circ)\}\tan 60^\circ\{\tan 23^\circ\times\tan(90^\circ-23^\circ)\}$

$=(\tan 7^\circ\cot 7^\circ)\tan60^\circ(\tan 23^\circ\cot 23^\circ)=1\times\sqrt{3}\times1$ $(\because \tan\theta\times\cot\theta=1)$

$=\sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 6. দেখাই যে, $\sin^2 21^\circ+\sin^2 69^\circ=1$

$\sin 69^\circ=\sin(90^\circ-21^\circ)=\cos 21^\circ$

$\therefore \sin^2 21^\circ+\sin^2 69^\circ=\sin^2 21^\circ+\cos^2 21^\circ=1$ $[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

প্রয়োগ : 7. দেখাই যে, $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = \dfrac{\sec^2 15^0}{\sqrt{\sec^2 15^0 - 1}}$

$\tan 15^\circ + \tan 75^\circ$
$= \tan 15^\circ + \tan(90^\circ - 15^\circ)$
$= \tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \tan 15^\circ + \dfrac{1}{\tan 15^\circ}$
$= \dfrac{\tan^2 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ} = \dfrac{\sec^2 15^\circ}{\sqrt{\sec^2 15^\circ - 1}}$

[$\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ এবং $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$]

(প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 8. A ও B দুটি পরস্পর পূরক কোণ হলে, দেখাই যে, $(\sin A + \sin B)^2 = 1 + 2\sin A \sin B$

A ও B দুটি পরস্পর পূরক কোণ।
সুতরাং, $A + B = 90^\circ$
$\therefore B = 90^\circ - A$
$\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A$

$(\sin A + \sin B)^2$
$= (\sin A + \cos A)^2$
$= \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \cos A$
$= 1 + 2\sin A \cos A$
$= 1 + 2\sin A \cos(90^\circ - B)$
$= 1 + 2\sin A \sin B$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 9. যদি $\sec\theta = \operatorname{cosec}\varphi$ হয় এবং $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ তাহলে $\sin(\theta + \varphi)$-এর মান নির্ণয় করি।

$\sec\theta = \operatorname{cosec}\varphi$
বা, $\sec\theta = \sec(90^\circ - \varphi)$
বা, $\theta = 90^\circ - \varphi$ $\quad \therefore \theta + \varphi = 90^\circ$ $\quad \therefore \sin(\theta + \varphi) = \sin 90^\circ = 1$

প্রয়োগ : 10. যদি $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$ হয়, যেখানে 2A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, তাহলে A-এর মান নির্ণয় করি।

$\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$
বা, $\cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$ [$\because \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$]
বা, $90^\circ - 2A = A - 18^\circ$
বা, $-2A - A = -90^\circ - 18^\circ$
বা, $-3A = -108^\circ$ $\quad \therefore A = 36^\circ$

প্রয়োগ : 11. যদি $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ হয়, যেখানে 4A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, তাহলে A-এর মান নির্ণয় করি।

$\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$
বা, $\operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ [$\because \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$]
বা, $90^\circ - 4A = A - 20^\circ$
বা, $-4A - A = -20^\circ - 90^\circ$
বা, $-5A = -110^\circ$ $\quad \therefore A = 22^\circ$

প্রয়োগ : 12. $\cos 43^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ হলে, $\tan 47^\circ$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

$\cos 43^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\sin^2 43^\circ = 1 - \cos^2 43^\circ = 1 - \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{x^2 + y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$

$\therefore \sin 43^\circ = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ [যেহেতু 43° ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, সুতরাং $\sin 43^\circ$-এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না]

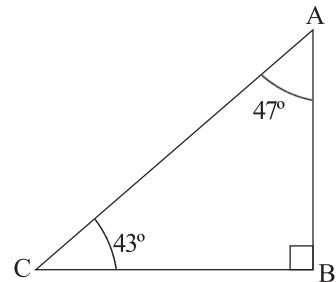
$$\therefore \tan 47^\circ = \tan(90^\circ - 43^\circ) = \cot 43^\circ = \frac{\cos 43^\circ}{\sin 43^\circ} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{x}{y}$$

বিকল্প পদ্ধতি :

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B = 90^\circ$

ধরি, $\angle BCA = 43^\circ$; সুতরাং, $\angle CAB = 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$

$\cos 43^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{BC}{AC}$

ধরি, $BC = kx$ একক এবং $AC = k\sqrt{x^2-y^2}$ একক। যেখানে $k > 0$.

সমকোণী ΔABC -তে, $AB^2 = AC^2 - BC^2 = \left(k\sqrt{x^2+y^2} \text{ একক}\right)^2 - (kx \text{ একক})^2$

$= (k^2x^2 + k^2y^2 - k^2x^2)$ বর্গ একক $= k^2y^2$ বর্গ একক

$\therefore AB = ky$ একক

$\therefore \tan 47^\circ = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{kx}{ky} = \dfrac{x}{y}$

প্রয়োগ : 13. $\tan 50^\circ = \dfrac{p}{q}$ হলে, $\cos 40^\circ$ -এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

কষে দেখি 24

1. মান নির্ণয় করি : (i) $\dfrac{\sin 38^\circ}{\cos 52^\circ}$ (ii) $\dfrac{\operatorname{cosec} 79^\circ}{\sec 11^\circ}$ (iii) $\dfrac{\tan 27^\circ}{\cot 63^\circ}$

2. দেখাই যে : (i) $\sin 66^\circ - \cos 24^\circ = 0$ (ii) $\cos^2 57^\circ + \cos^2 33^\circ = 1$
   (iii) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 15^\circ = 0$ (iv) $\operatorname{cosec}^2 48^\circ - \tan^2 42^\circ = 1$
   (v) $\sec 70^\circ \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \operatorname{cosec} 70^\circ = 2$

3. যদি α ও β কোণ দুটি পরস্পর পূরক কোণ হয়, তাহলে দেখাই যে,
   (i) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ (ii) $\cot\beta + \cos\beta = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}(1+\sin\beta)$ (iii) $\dfrac{\sec\alpha}{\cos\alpha} - \cot^2\beta = 1$

4. যদি $\sin 17^\circ = \dfrac{x}{y}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\sec 17^\circ - \sin 73^\circ = \dfrac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^2}}$

5. দেখাই যে, $\sec^2 12^\circ - \dfrac{1}{\tan^2 78^\circ} = 1$

6. $\angle A + \angle B = 90^\circ$ হলে, দেখাই যে, $1 + \dfrac{\tan A}{\tan B} = \sec^2 A$

7. দেখাই যে, $\operatorname{cosec}^2 22^\circ \cot^2 68^\circ = \sin^2 22^\circ + \sin^2 68^\circ + \cot^2 68^\circ$

8. যদি $\angle P + \angle Q = 90^\circ$ হয়, তবে দেখাই যে, $\sqrt{\dfrac{\sin P}{\cos Q} - \sin P \cos Q} = \cos P$

9. প্রমাণ করি যে, $\cot 12^\circ \cot 38^\circ \cot 52^\circ \cot 78^\circ \cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

10. O কেন্দ্রীয় যে-কোনো একটি বৃত্তের AOB একটি ব্যাস এবং বৃত্তের উপর C যে-কোনো একটি বিন্দু। এবার A, C; B, C এবং O, C যুক্ত করে দেখাই যে,
    (i) $\tan\angle ABC = \cot\angle ACO$ (ii) $\sin^2\angle BCO + \sin^2\angle ACO = 1$
    (iii) $\operatorname{cosec}^2\angle CAB - 1 = \tan^2\angle ABC$

11. ABCD একটি আয়তাকার চিত্র। A, C যুক্ত করে প্রমাণ করি যে,
    (i) $\tan\angle ACD = \cot\angle ACB$ (ii) $\tan^2\angle CAD + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\angle BAC}$

12. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) $(\sin 43^\circ \cos 47^\circ + \cos 43^\circ \sin 47^\circ)$ -এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $\sin 4^\circ$ (d) $\cos 4^\circ$

(ii) $\left(\frac{\tan 35^\circ}{\cot 55^\circ} + \frac{\cot 78^\circ}{\tan 12^\circ}\right)$ -এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) কোনোটিই নয়

(iii) $\{\cos(40^\circ+\theta) - \sin(50^\circ-\theta)\}$-এর মান

(a) $2\cos\theta$ (b) $7\sin\theta$ (c) 0 (d) 1

(iv) ABC একটি ত্রিভুজ। $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) =$

(a) $\sin\frac{A}{2}$ (b) $\cos\frac{A}{2}$ (c) $\sin A$ (d) $\cos A$

(v) $A+B=90^\circ$ এবং $\tan A = \frac{3}{4}$ হলে, $\cot B$-এর মান

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{5}$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $\cos 54^\circ$ এবং $\sin 36^\circ$ -এর মান সমান।

(ii) $(\sin 12^\circ - \cos 78^\circ)$ -এর সরলতম মান 1.

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $(\tan 15^\circ \times \tan 45^\circ \times \tan 60^\circ \times \tan 75^\circ)$-এর মান ________

(ii) $(\sin 12^\circ \times \cos 18^\circ \times \sec 78^\circ \times \operatorname{cosec} 72^\circ)$-এর মান ________

(iii) A এবং B পরস্পর পূরক কোণ হলে, $\sin A =$ ________

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) $\sin 10\theta = \cos 8\theta$ এবং 10θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, $\tan 9\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $\tan 4\theta \times \tan 6\theta = 1$ এবং 6θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, θ-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $\dfrac{2\sin^2 63^\circ + 1 + 2\sin^2 27^\circ}{3\cos^2 17^\circ - 2 + 3\cos^2 73^\circ}$ -এর মান নির্ণয় করি।

(iv) $(\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots \tan 89^\circ)$ -এর মান নির্ণয় করি।

(v) $\sec 5A = \operatorname{cosec}(A+36^\circ)$ এবং $5A$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, A-এর মান নির্ণয় করি।

25 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব

APPLICATION OF TRIGONOMETRIC RATIOS : HEIGHTS & DISTANCES

আমরা যে বড়ো মাঠে রোজ বিকালে খেলা করি সেই মাঠের একদিকে রামুদের বাগানবাড়ি। কিছু দূরে ওই এলাকার জলের ট্যাঙ্ক অনেক উঁচু থামের উপর রাখা আছে। আমরা মাঝে মাঝে ওই মাঠে ঘুড়ি ওড়াই। প্রায় প্রতিদিনই সতীশের ঘুড়ি ভূমি থেকে সবচেয়ে উঁচুতে ওঠে এবং ওই উঁচুতে রাখা জলের ট্যাঙ্কের উপরে উঠে যায়।

1 কিন্তু ওই এলাকার জলের ট্যাঙ্কটি ভূমি থেকে কত উপরে আছে কীভাবে পাব ছবি এঁকে দেখি।

ধরি, CE জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা এবং জলের ট্যাঙ্কটি ভূমিতলে লম্বভাবে আছে।

AB আমার উচ্চতা এবং আমি ভূমিতলে লম্বভাবে দাঁড়িয়ে আছি।

জলের ট্যাঙ্ক থেকে আমি BE দূরত্বে আছি, AD ও BE সরলরেখাংশ পরস্পর সমান্তরাল। আমি জলের ট্যাঙ্কের শীর্ষবিন্দু AC রেখা বরাবর দেখছি।

2 এই AC রেখাকে কী বলা হয়?

এই AC রেখাকে **দৃষ্টির রেখা [Line of Sight]** বলা হয়।

বুঝেছি, কোনো পর্যবেক্ষক যখন কোনো বস্তু দেখেন পর্যবেক্ষকের চোখ ও ওই বস্তুর ওপর কোনো বিন্দুর সংযোজক রেখাই হলো দৃষ্টির রেখা। [Line of Sight]

চিত্র (i)

দেখছি ট্যাঙ্কের চূড়া দেখার জন্য আমার দৃষ্টিররেখা AC অনুভূমিক রেখা AD-এর সঙ্গে একটি কোণ (θ) করে আছে।

3 এই θ কোণটিকে কী বলা হয়?

এই কোণকে **উন্নতি কোণ [Angle of Elevation]** বলা হয়।

বুঝেছি, যখন পর্যবেক্ষক ভূমিতে দাঁড়িয়ে ভূমি থেকে উপরে অবস্থিত কোনো বস্তু দেখেন, তখন পর্যবেক্ষকের দৃষ্টির রেখা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যে কোণ করে থাকে তাকে উন্নতি কোণ বলা হয় এবং উন্নতি কোণের ক্ষেত্রে পর্যবেক্ষকের মাথা উপরের দিকে উঠে থাকে।

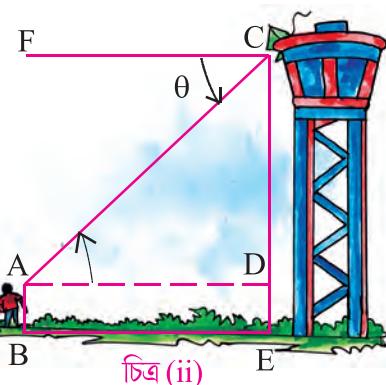
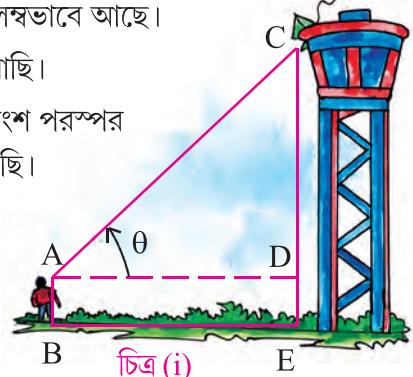
4 কিন্তু আমি যদি ট্যাঙ্কের উপরে C বিন্দুতে থাকতাম এবং সেখান থেকে ভূমিতে AB অবস্থানে দাঁড়ানো আমার বন্ধুর মাথার দিকে তাকাতাম তখন কী ধরনের কোণ পেতাম ছবি এঁকে দেখি।

ধরি, আমার বন্ধু ভূমিতে AB অবস্থানে আছে। আমি জলের ট্যাঙ্কের চূড়ার C বিন্দু থেকে A বিন্দু দেখছি।

সেক্ষেত্রে আমার দৃষ্টি রেখা CA অনুভূমিক রেখার সমান্তরাল রেখা CF-এর সঙ্গে θ কোণ করে আছে। [$\because \angle DAC=\theta$, $CF \parallel AD$, সুতরাং একান্তর $\angle DAC = \angle FCA$]

5 এইরকম θ কোণকে কী বলা হয়?

এই কোণকে **অবনতি কোণ [Angle of Depression]** বলা হয়।

চিত্র (ii)

বুঝেছি, যখন পর্যবেক্ষক তার অবস্থানের নীচের দিকে অবস্থিত কোনো বস্তু দেখে তখন তার দৃষ্টির রেখা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যে কোণ করে সেই কোণকে অবনতি কোণ বলা হয় এবং অবনতি কোণের ক্ষেত্রে পর্যবেক্ষকের মাথা নীচু হয়ে থাকে।

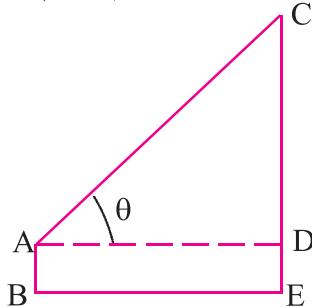
6 চিত্র (i) থেকে জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা কীভাবে পাব দেখি।

জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা CE = CD+DE

= CD+AB

সমকোণী ত্রিভুজ ADC-এর $\angle D = 90^\circ$

উন্নতি কোণ $\angle DAC = \theta$

$\therefore$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে নির্ণয়ের জন্য AC অথবা AD-র মান জানা প্রয়োজন।

7 যদি $\theta = 30^\circ$, অর্থাৎ A বিন্দু থেকে ট্যাঙ্কের চূড়ার উন্নতি কোণ 30° এবং AD = 120 মিটার অর্থাৎ জলের ট্যাঙ্ক থেকে আমার দূরত্ব 120 মিটার হয়, তবে জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা কী হবে হিসাব করে লিখি।

সমকোণী ত্রিভুজ ACD-এর ($\angle D = 90^\circ$) ; CD নির্ণয় করতে হবে। এক্ষেত্রে এমন একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নেব যেখানে CD ও AD আছে।

সমকোণী ত্রিভুজ ACD-তে, $\tan\theta = \frac{CD}{AD}$ বা, $\tan 30^\circ = \frac{CD}{120 \text{ মি.}}$

বা, $\frac{CD}{120 \text{ মি.}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore CD = \frac{120 \text{ মি.}}{\sqrt{3}} = \frac{40 \times 3 \text{ মি.}}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$ মি.

$\therefore$ সেক্ষেত্রে ট্যাঙ্কের উচ্চতা = [$40\sqrt{3}$ মিটার + আমার উচ্চতা (AB)]

কোনো উচ্চতা নির্ণয়ের জন্য আমরা কী কী করলাম লিখি।

(i) আমার অবস্থান থেকে যার উচ্চতা নির্ণয় করব তার দূরত্ব নির্ণয় করলাম।

(ii) যার উচ্চতা নির্ণয় করব তার শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ নির্ণয় করলাম।

(iii) এবার ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে উচ্চতা নির্ণয় করলাম।

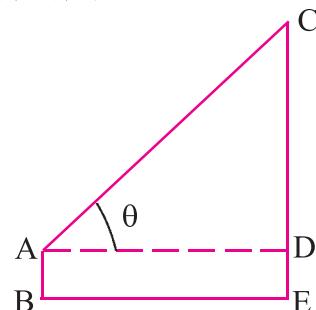
8 কিন্তু যদি $\theta = 30^\circ$ এবং AC = 150 মিটার হয়, তবে উচ্চতা কী হবে নির্ণয় করি।

সমকোণী ত্রিভুজ ACD-এর $\angle D = 90^\circ$; CD নির্ণয় করতে হবে।

এমন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নেব যেখানে CD ও AC আছে,

সমকোণী ΔACD-তে; $\sin 30^\circ = \frac{CD}{AC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{CD}{150 \text{ মি.}}$

বা, $CD = \frac{150 \text{ মি.}}{2} = 75$ মি.

$\therefore$ সেক্ষেত্রে জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা = [75 মিটার + AB]

মনে রাখতে হবে : বিশেষভাবে কিছু বলা না থাকলে এই ধরনের সমস্যায় যে ব্যক্তির সাপেক্ষে উন্নতি বা অবনতি কোণ সংক্রান্ত তথ্য দেওয়া থাকবে, ওই ব্যক্তির উচ্চতাকে অগ্রাহ্য করে ছবি আঁকতে হবে। অর্থাৎ এই সমস্যাগুলিতে ব্যক্তিকে একটি বিন্দু হিসাব ধরে নিতে হবে। গাছ, স্তম্ভ, লাইট-পোস্ট ইত্যাদি ভূমিতলের উপর লম্বভাবে আছে ধরে নিতে হবে।

প্রয়োগ : 1. রীতাদের পুকুরের পাড়ে একটি নারকেল গাছ আছে। পুকুরের পাড় ধরে 12 মিটার দূরে একটি বিন্দুর সাপেক্ষে ওই গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 60° হলে, রীতাদের পুকুর পাড়ের ওই নারকেল গাছটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{3}$ =1.732 (প্রায়)]

ধরি, AB নারকেল গাছের উচ্চতা যা ভূমিতলের উপর লম্বভাবে আছে। B বিন্দু থেকে পুকুরের পাড় ধরে C বিন্দুতে গিয়ে C বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর উন্নতি কোণ 60° হয়েছে।

A ও C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করে ABC সমকোণী ত্রিভুজ পেয়েছি যার $\angle B=90^\circ$ এবং $\angle ACB=60^\circ$

$\therefore$ $\angle ACB$-এর পরিপ্রেক্ষিতে ভূমি BC=12 মিটার। সমকোণী ΔABC-তে, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে পাই,

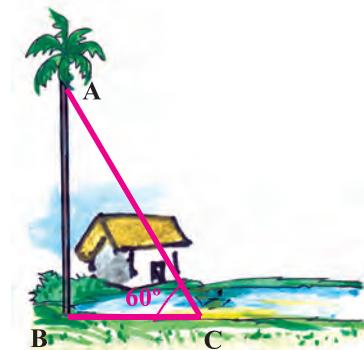
$$\tan\angle ACB = \tan 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{12 \text{ মি.}}$$

বা, $\tan 60^\circ = \dfrac{AB}{12 \text{ মি.}}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{AB}{12 \text{ মি.}}$

বা, $AB = 12\sqrt{3}$ মি. $= 12\times 1.732$ মি. (প্রায়)

$= 20.784$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ নারকেল গাছটির উচ্চতা = 20.784 মিটার (প্রায়)।

প্রয়োগ : 2. যদি একটি নারকেল গাছের গোড়া থেকে অনুভূমিক তলে 20 মিটার দূরের একটি বিন্দুর সাপেক্ষে গাছটির অগ্রভাগের উন্নতি কোণ 60° হয়, তবে গাছটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 3. গতকাল ঝড়ে একটি লাইটপোস্ট মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ পাদবিন্দু থেকে 4 মিটার দূরে ভূমি স্পর্শ করেছে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করেছে। লাইটপোস্টটি কত লম্বা ছিল হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{2}$ =1.414 (প্রায়)]

ধরি, AB দৈর্ঘ্যের লাইটপোস্টটি O বিন্দুতে মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ C বিন্দুতে ভূমি স্পর্শ করেছে।

$\therefore$ AO = OC = x মি. (ধরি)

$\therefore$ AB = AO+OB = CO+OB

$\therefore$ OBC একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি হয়েছে যার $\angle B=90^\circ$, BC=4 মিটার ও OC=x মি.

সমকোণী ΔOBC -তে, $\cos 45^\circ = \dfrac{BC}{OC} = \dfrac{4}{x}$

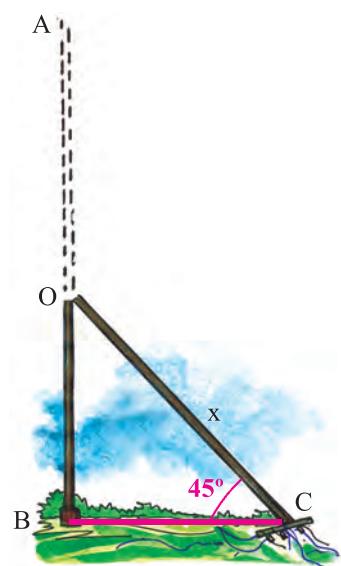
বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{x} \quad \therefore x = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ OC = $4\sqrt{2}$ মি. $= 4\times 1.414$ মি. $= 5.656$ মি. (প্রায়)

ΔOBC -এর, $\angle OCB=45^\circ \quad \therefore \angle BOC=90^\circ-45^\circ = 45^\circ$

$\therefore$ BO = CO = 4 মি.

$\therefore$ লাইটপোস্টের দৈর্ঘ্য = (4+5.656) মিটার (প্রায়)

= 9.656 মিটার (প্রায়)

প্রয়োগ : 4. সূর্যের উন্নতি কোণ 60° হলে একটি তালগাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য 12 মিটার হয়। তালগাছটির উচ্চতা নির্ণয় করি।

পাশের চিত্রে, AB তালগাছের উচ্চতা এবং BC তালগাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য যখন $\angle ACB=60^\circ$

সমকোণী ΔABC-তে, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{AB}{12 \text{ মি.}}$

বা, $AB = 12\sqrt{3}$ মি.

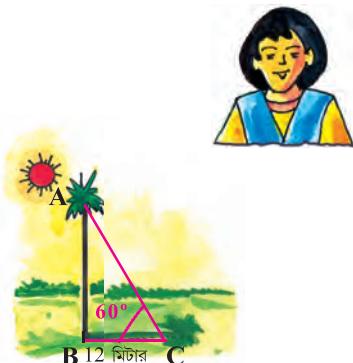
$\therefore$ তালগাছের উচ্চতা $12\sqrt{3}$ মিটার।

কিন্তু ওই তালগাছটির (যার উচ্চতা $12\sqrt{3}$ মিটার) ছায়ার দৈর্ঘ্য যখন 36 মিটার হবে তখন সূর্যের উন্নতি কোণ কী হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, $12\sqrt{3}$ মিটার দৈর্ঘ্যের AB তালগাছটির ছায়ার দৈর্ঘ্য BC যখন 36 মিটার তখন সূর্যের উন্নতি কোণ θ

সমকোণী ΔABC-তে, $\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12\sqrt{3}}{36} = \frac{12\sqrt{3}}{12\times 3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

সুতরাং, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore$ তখন সূর্যের উন্নতি কোণ 30°

প্রয়োগ : 5. সূর্যের উন্নতি কোণ কত হলে 20 মিটার লম্বা লাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য $20\sqrt{3}$ মিটার হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 6. হাঁসখালি পোলের বড়ো খালের ঠিক পাড়ে অবস্থিত সমীরণদের তিনতলা বাড়ির ছাদ থেকে সে সোজাসুজি খালের ঠিক অপর পারের একটি লাইটপোস্ট দেখছিল। সমীরণের চোখ থেকে সেই পোস্টের পাদবিন্দুর অবনতি কোণ যদি 30° হয় এবং বাড়িটির উচ্চতা যদি 10 মিটার হয়, তাহলে ছবি এঁকে ওই খালটি কত চওড়া হিসাব করি। [$\sqrt{3}=1.732$ (প্রায়)]

ধরি, AB তিনতলা বাড়িটি এবং CD পোস্টটি BC চওড়া খালের দুই পারে এবং ঠিক বিপরীত দিকে অবস্থিত।

সমীরণ A বিন্দু থেকে CD পোস্টের পাদবিন্দু C-কে 30° অবনতি কোণে দেখছিল।

$\therefore \angle EAC = 30^\circ$ [ধরি, $AE \parallel BC$]

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ পেলাম যার $\angle B=90^\circ$, AB=10 মিটার

এবং $\angle ACB =$ একান্তর $\angle EAC$ [$\because AE \parallel BC$]

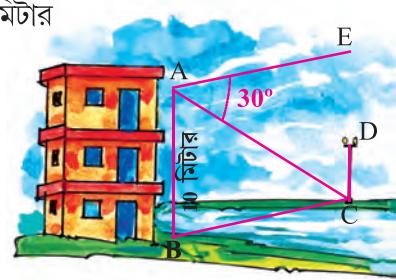
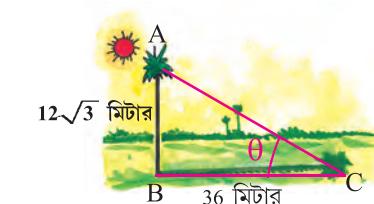
$\therefore \angle ACB = 30^\circ$

সমকোণী ΔABC-তে, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{10 \text{ মি.}}{BC}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10 \text{ মি.}}{BC}$

$\therefore BC = 10\sqrt{3}$ মি. $= 10\times 1.732$ মি. (প্রায়)

$= 17.32$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ খালটি 17.32 মি. (প্রায়) চওড়া।

প্রয়োগ : 7. কিন্তু কোনো নদীর পাড়ে যদি উঁচু অট্টালিকা থাকে তবে নদীর অপর পারে দাঁড়িয়ে ওই অট্টালিকার উচ্চতা কীভাবে মাপব দেখি।

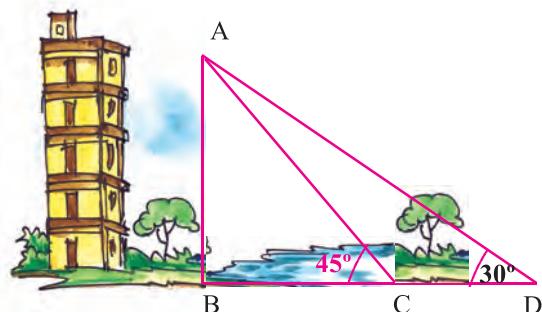
ধরি, AB অট্টালিকার উচ্চতা = x মিটার

যদি নদীর অপর পারে অট্টালিকার B বিন্দুর ঠিক বিপরীত দিকে নদীর ধার বরাবর C বিন্দু থেকে অট্টালিকার চূড়ার উন্নতি কোণ 45° এবং C বিন্দু থেকে 14 মিটার বর্ধিত BC সরলরেখাংশ বরাবর দূরে সরে গিয়ে D বিন্দু থেকে অট্টালিকার চূড়ার উন্নতি কোণ 30° হয়, তবে অট্টালিকার উচ্চতা x নির্ণয় করি।

ধরি, নদীর প্রস্থ (BC) = y মিটার

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে পাই, $\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$

বা, $1 = \frac{x}{y}$

$\therefore x = y$

আবার সমকোণী ত্রিভুজ ABD থেকে পাই, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC+CD}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{y+14}$

বা, $y+14 = x\sqrt{3}$

বা, $x+14 = x\sqrt{3}$ $[\because x=y]$

বা, $x(\sqrt{3}-1) = 14$

$\therefore x = \frac{14}{\sqrt{3}-1} = \frac{14(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \frac{14(1.732+1)}{3-1}$

$= 7\times2.732$ (প্রায়) $= 19.124$ (প্রায়)

$\therefore$ অট্টালিকার উচ্চতা 19.124 মিটার (প্রায়)।

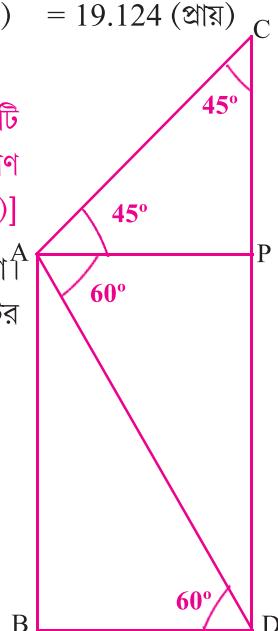
প্রয়োগ : 8. যদি একটি 18 মিটার উঁচু পাঁচতলা বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে একটি মনুমেন্টের চূড়ার উন্নতি কোণ 45° এবং মনুমেন্টের পাদদেশের অবনতি কোণ 60° হয়, তাহলে মনুমেন্টের উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{3} = 1.732$ (প্রায়)]

ধরি, পাশের চিত্রে, AB 18 মিটার উঁচু পাঁচতলা বাড়ি এবং CD মনুমেন্টের উচ্চতা। AB-এর A বিন্দু থেকে মনুমেন্টের চূড়ার C বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° ও মনুমেন্টের পাদদেশ D বিন্দুর অবনতি কোণ 60°.

$\therefore$ $\angle PAC = 45^\circ$ এবং $\angle PAD = 60^\circ$ [ধরি, $AP \parallel BD$]

$\angle PAD =$ একান্তর $\angle ADB$ $[\because AP \parallel BD]$ $\therefore \angle ADB = 60^\circ$

ধরি, মনুমেন্টের উচ্চতা CD=x মিটার এবং BD=y মিটার = AP

AB = 18 মিটার। সুতরাং, CP = (x–18) মি.

সমকোণী ΔABD থেকে পাই, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BD}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{18}{y}$ $\quad \therefore y = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

সমকোণী ΔAPC থেকে পাই, $\tan \angle PAC = \frac{CP}{AP}$

বা, $\tan 45^\circ = \frac{x-18}{y} = \frac{x-18}{6\sqrt{3}}$

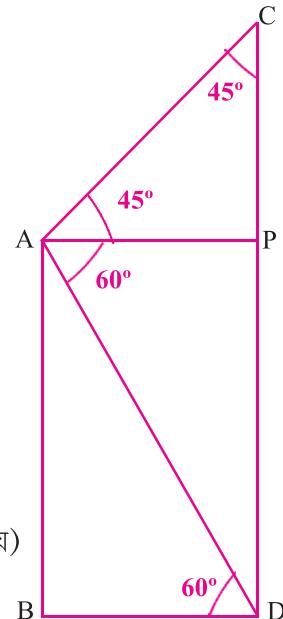
বা, $1 = \frac{x-18}{6\sqrt{3}}$

বা, $x-18 = 6\sqrt{3}$

বা, $x = 18+6\sqrt{3} = 6(3+\sqrt{3})$

বা, $x = 6(3+1.732)$ (প্রায়)

বা, $x = 6 \times 4.732$ (প্রায়) $\quad \therefore x = 28.392$ (প্রায়)

$\therefore$ মনুমেন্টের উচ্চতা 28.392 মি. (প্রায়)

প্রয়োগ : 9. 11 মিটার উঁচু একটি বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে একটি ল্যাম্পপোস্টের চূড়া ও পাদবিন্দুর অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° এবং 60°; ল্যাম্পপোস্টটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

ধরি, পাশের চিত্রের, AB = 11 মিটার উঁচু একটি বাড়ি

CD = ল্যাম্পপোস্টের উচ্চতা = x মিটার (ধরি)

AB-এর A বিন্দু থেকে ল্যাম্পপোস্টের চূড়া C বিন্দুর অবনতি কোণ 30° এবং A বিন্দু থেকে ল্যাম্পপোস্টের পাদদেশ D বিন্দুর অবনতি কোণ 60°

$\therefore \angle PAC = 30^\circ$ এবং $\angle PAD = 60^\circ$ [ধরি, AP||BD এবং DC-এর বর্ধিতাংশ CP]

AB=PD=11 মি., CD=x মি. $\therefore$ PC=(11−x) মি.

ধরি, BD=y মি. = AP

সমকোণী ত্রিভুজ APD থেকে পাই, $\tan 60^\circ = \frac{PD}{AP} = \frac{11}{y}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{11}{y}$ $\quad \therefore y = \frac{11}{\sqrt{3}}$ ———— (i)

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ APC থেকে পাই, $\tan 30^\circ = \frac{PC}{AP}$

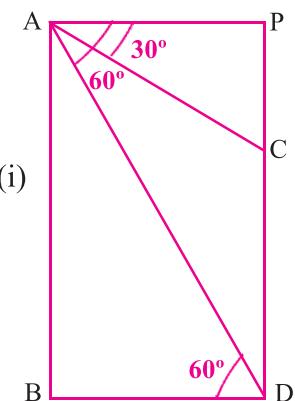
বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{11-x}{y}$

বা, $y = 11\sqrt{3} - x\sqrt{3}$

বা, $\frac{11}{\sqrt{3}} = 11\sqrt{3} - x\sqrt{3}$ [(1) থেকে পাই]

বা, $11 = 33-3x$

বা, $3x = 22$ $\quad \therefore x = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$

$\therefore$ ল্যাম্পপোস্টটির উচ্চতা $7\frac{1}{3}$ মিটার।

প্রয়োগ : 10. 60 মিটার উঁচু একটি অট্টালিকার চূড়া থেকে কোনো টাওয়ারের চূড়া ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° হলে, টাওয়ারের উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

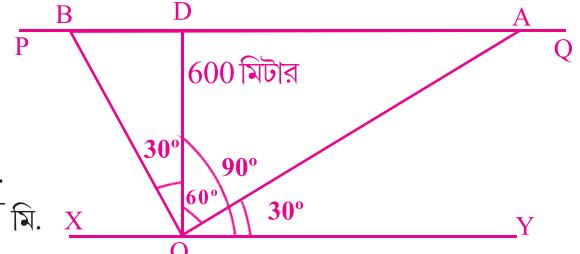
প্রয়োগ : 11. 600 মিটার চওড়া কোনো নদীর একটি ঘাট থেকে দুটি নৌকা দুটি আলাদা অভিমুখে নদীর ওপারে যাওয়ার জন্য রওনা দিল। যদি প্রথম নৌকাটি নদীর এপারের সঙ্গে 30° কোণে এবং দ্বিতীয় নৌকাটি প্রথম নৌকার গতিপথের সঙ্গে 90° কোণ করে চলে ওপারে পৌঁছায়, তাহলে ওপারে পৌছানোর পরে নৌকাদুটির মধ্যে দূরত্ব কত হবে নির্ণয় করি। [$\sqrt{3}$ =1.732 (প্রায়)]

ধরি, পাশের ছবিতে নদীর XY পাড়ের O বিন্দুতে অবস্থিত ঘাট থেকে প্রথম নৌকা OA বরাবর গিয়ে নদীর অপর পাড় PQ-এর A বিন্দুতে এবং অপর নৌকা OB বরাবর গিয়ে B বিন্দুতে ওপারে পৌঁছায়।

$\therefore \angle YOA=30^\circ$, $\angle AOB=90^\circ$; O বিন্দু থেকে AB-এর উপর OD লম্ব অঙ্কন করি।

$\therefore \angle AOD=60^\circ$ এবং $\angle DOB=30^\circ$

সমকোণী ত্রিভুজ AOD থেকে পাই, $\tan 60^\circ = \frac{AD}{OD}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{AD}{600 \text{ মি.}}$

$\therefore AD = 600\sqrt{3}$ মি.

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ BOD থেকে পাই, $\tan 30^\circ = \frac{BD}{OD}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{600 \text{ মি.}}$

বা, $BD = \frac{600 \text{ মি.}}{\sqrt{3}} = \frac{600\sqrt{3} \text{ মি.}}{3}$

$= 200\sqrt{3}$ মি.

$AD+BD = (600\sqrt{3}+200\sqrt{3})$ মি.

$AB = 800\sqrt{3}$ মি. $= 800\times1.732$ মি. (প্রায়) $= 1385.6$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ ওপারে পৌঁছালে নৌকা দুটির মধ্যে দূরত্ব হবে 1385.6 মিটার (প্রায়)

প্রয়োগ : 12. একটি 150 মিটার চওড়া রাস্তার দু-পাশে ঠিক বিপরীতে দুটি সমান উচ্চতার স্তম্ভ আছে। স্তম্ভ দুটির মাঝখানে রাস্তার উপর কোনো এক নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে স্তম্ভ দুটির চূড়ার উন্নতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° হলে, প্রতিটি স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় করি।

ধরি, AB ও CD দুটি সমান উচ্চতার স্তম্ভ।

ধরি, AB=CD=h মিটার।

ধরি, AC রাস্তার উপর নির্দিষ্ট বিন্দু O

ধরি, OA=x মি. $\therefore$ OC=(150−x) মি.

$\therefore \angle AOB=60^\circ$ এবং $\angle COD=30^\circ$

সমকোণী ত্রিভুজ AOB থেকে পাই, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{AO} = \frac{h}{x}$

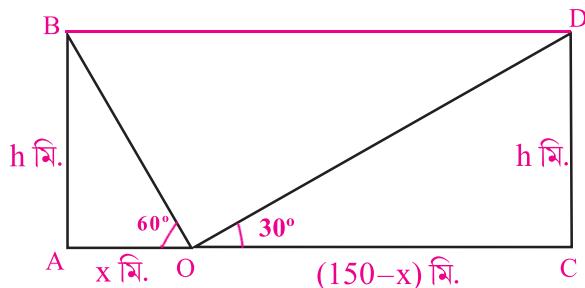
বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ $\quad \therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ———— (i)

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ COD থেকে পাই,

$\tan 30^\circ = \frac{CD}{OC} = \frac{h}{150-x}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{150-x}$

বা, $150-x = h\sqrt{3}$

$\therefore \quad x = 150 - h\sqrt{3}$ ——— (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) নং তুলনা করে পাই, $\frac{h}{\sqrt{3}} = 150 - h\sqrt{3}$

বা, $h = 150\sqrt{3} - 3h$

বা, $4h = 150\sqrt{3} \quad \therefore h = \frac{150\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ প্রতিটি স্তম্ভের উচ্চতা $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ মিটার।

প্রয়োগ : 13. একটি পাখি ভূমিতলের সঙ্গে সমান্তরাল রেখায় 200 মিটার উঁচু দিয়ে উত্তর থেকে দক্ষিণদিকে যাচ্ছিল। মাঠের মাঝখানে দাঁড়িয়ে সুশোভন প্রথমে পাখিটিকে উত্তরদিকে 30° কোণে দেখতে পেল। 3 মিনিট পরে আবার দক্ষিণদিকে 45° কোণে দেখতে পেল। আসন্ন পূর্ণসংখ্যায় কিলোমিটারে পাখিটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত ছিল হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{3} = 1.732$ (প্রায়)]

মনে করি, P বিন্দু থেকে সুশোভন প্রথমে পাখিটিকে 30° কোণে A বিন্দুতে দেখতে পেল এবং 3 মিনিট পরে 45° কোণে B বিন্দুতে দেখতে পেল।

ধরি, AO = x মি. এবং BO = y মি.

P বিন্দু থেকে AB-এর উপর PO লম্ব। $\therefore$ PO = 200 মি.

$\because \angle XPA = 30^\circ, \therefore \angle APO = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$;

$\because \angle BPY = 45^\circ, \therefore \angle BPO = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

সমকোণী ত্রিভুজ APO-তে

$\tan \angle APO = \tan 60^\circ = \frac{x}{200}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{x}{200} \quad \therefore x = 200\sqrt{3}$

সমকোণী ত্রিভুজ BPO-তে

$\tan \angle BPO = \tan 45^\circ = \frac{y}{200}$

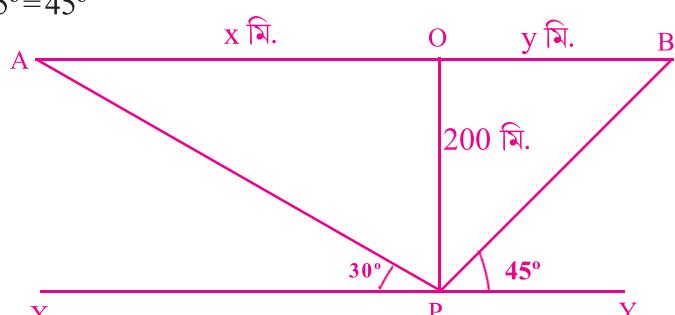
বা, $1 = \frac{y}{200} \quad \therefore y = 200$

সুতরাং, $x + y = 200\sqrt{3} + 200 = 200(\sqrt{3}+1) = 200 \times 2.732 = 546.4$

3 মিনিটে পাখিটি যায় 546.4 মিটার

1 মিনিটে পাখিটি যায় $\frac{546.4 \text{ মি.}}{3}$

60 মিনিটে পাখিটি যায় $\frac{546.4}{3} \times 60$ মিটার $= 10928$ মিটার $= 10.928$ কিমি.

$\therefore$ আসন্ন পূর্ণসংখ্যায় পাখিটির গতিবেগ ঘণ্টায় 11 কিলোমিটার।

কষে দেখি 25

1. একটি নারকেল গাছের গোড়া থেকে অনুভূমিক তলে 20 মিটার দূরের একটি বিন্দুর সাপেক্ষে গাছটির অগ্রভাগের উন্নতি কোণ যদি 60° হয়, তাহলে গাছটির উচ্চতা নির্ণয় করি।

2. সূর্যের উন্নতি কোণ যখন 30° তখন একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য 9 মিটার হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

3. 150 মি. লম্বা সুতো দিয়ে একটি মাঠ থেকে ঘুড়ি ওড়ানো হয়েছে। ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে উড়তে থাকে, তাহলে ঘুড়িটি মাঠ থেকে কত উঁচুতে রয়েছে হিসাব করে লিখি।

4. একটি নদীর একটি পাড়ের একটি তালগাছের সোজাসুজি অপর পাড়ে একটি খুঁটি পুঁতলাম। এবার নদীর পাড় ধরে ওই খুঁটি থেকে $7\sqrt{3}$ মিটার সরে গিয়ে দেখছি নদীর পাড়ের পরিপ্রেক্ষিতে গাছটির পাদদেশ 60° কোণে রয়েছে। নদীটি কত মিটার চওড়া নির্ণয় করি।

5. ঝড়ে একটি টেলিগ্রাফপোস্ট মাটি থেকে কিছু উপরে মচকে যাওয়ায় তার অগ্রভাগ গোড়া থেকে $8\sqrt{3}$ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করেছে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 30° কোণ উৎপন্ন করেছে। পোস্টটি মাটি থেকে কত উপরে মচকে ছিল এবং পোস্টটির উচ্চতা কত ছিল হিসাব করে লিখি।

6. আমাদের পাড়ায় রাস্তার দু-পাশে পরস্পর বিপরীত দিকে দুটি বাড়ি আছে। প্রথম বাড়ির দেয়ালের গোড়া থেকে 6 মিটার দূরে একটি মই-এর গোড়া রেখে যদি মইটিকে দেয়ালে ঠেকানো যায়, তবে তা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 30° কোণ উৎপন্ন করে। কিন্তু মইটিকে যদি একই জায়গায় রেখে দ্বিতীয় বাড়ির দেয়ালে লাগানো যায়, তাহলে অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে।
   (i) মইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।
   (ii) দ্বিতীয় বাড়ির দেয়ালের গোড়া থেকে মইটির গোড়া কত দূরে রয়েছে হিসাব করে লিখি।
   (iii) রাস্তাটি কত চওড়া নির্ণয় করি।
   (iv) দ্বিতীয় বাড়ির কত উঁচুতে মইটির অগ্রভাগ স্পর্শ করবে নির্ণয় করি।

7. যদি একটি চিমনির গোড়ার সঙ্গে সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দরু সাপেক্ষে চিমনির চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হয় এবং সেই বিন্দু ও চিমনির গোড়ার সঙ্গে একই সরলরেখায় অবস্থিত ওই বিন্দু থেকে আরও 24 মিটার দূরের অপর একটি বিন্দুর সাপেক্ষে চিমনির চূড়ার উন্নতি কোণ 30° হয়, তাহলে চিমনির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
   [$\sqrt{3}$ -এর আসন্ন মান 1.732 ধরে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করি]

8. সূর্যের উন্নতি কোণ 45° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 60° হলে, একটি খুঁটির ছায়ায় দৈর্ঘ্য 3 মিটার কমে যায়। খুঁটিটির উচ্চতা নির্ণয় করি।
   [$\sqrt{3} = 1.732$ ধরে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করি]

9. $9\sqrt{3}$ মিটার উঁচু তিনতলা বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে 30 মিটার দূরে অবস্থিত একটি কারখানার চিমনির উন্নতি কোণ 30° হয়। চিমনির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

10. একটি লাইট হাউস থেকে তার সঙ্গে একই সরলরেখায় অবস্থিত দুটি জাহাজের মাস্তুলের গোড়ার অবনতি কোণ যদি যথাক্রমে 60° ও 30° হয় এবং কাছের জাহাজের মাস্তুল যদি লাইট হাউস থেকে 150 মিটার দূরত্বে থাকে, তাহলে দূরের জাহাজের মাস্তুল লাইটি হাউস থেকে কত দূরত্বে রয়েছে এবং লাইট হাউসটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

11. একটি পাঁচতলা বাড়ির ছাদের কোনো বিন্দু থেকে দেখলে মনুমেন্টের চূড়ার উন্নতি কোণ ও গোড়ার অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° ; বাড়িটির উচ্চতা 16 মিটার হলে, মনুমেন্টের উচ্চতা এবং বাড়িটি মনুমেন্ট থেকে কত দূরে অবস্থিত হিসাব করে লিখি।

12. 250 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে একটি ঘুড়ি ওড়াচ্ছি। সুতোটি যখন অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে থাকে এবং সুতোটি যখন অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 45° কোণ করে তখন প্রতিক্ষেত্রে ঘুড়িটি আমার থেকে কত উপরে থাকবে হিসাব করে লিখি। এদের মধ্যে কোন ক্ষেত্রে ঘুড়িটি বেশি উঁচুতে থাকবে নির্ণয় করি।

13. উড়ো জাহাজের একজন যাত্রী কোনো এক সময় তাঁর এক পাশে হাওড়া স্টেশনটি এবং ঠিক বিপরীত পাশে শহিদ মিনারটি যথাক্রমে 60° ও 30° অবনতি কোণে দেখতে পান। ওই সময়ে উড়োজাহাজটি যদি $545\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে থাকে, তাহলে হাওড়া স্টেশন ও শহিদ মিনারের দূরত্ব নির্ণয় করি।

14. একটি তিনতলা বাড়ির ছাদে 3.3 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি পতাকা আছে। রাস্তার কোনো এক স্থান থেকে দেখলে পতাকা দণ্ডটির চূড়া ও পাদদেশের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 50° ও 45° হয়। তিনতলা বাড়িটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [ধরি, $\tan 50^\circ = 1.192$]

15. দুটি স্তম্ভের উচ্চতা যথাক্রমে 180 মিটার ও 60 মিটার। দ্বিতীয় স্তম্ভটির গোড়া থেকে প্রথমটির চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, প্রথমটির গোড়া থেকে দ্বিতীয়টির চূড়ার উন্নতি কোণ হিসাব করে লিখি।

16. সূর্যের উন্নতি কোণ 45° হলে, কোনো সমতলে অবস্থিত একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য যা হয়, উন্নতি কোণ 30° হলে, ছায়ার দৈর্ঘ্য তার চেয়ে 60 মিটার বেশি হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় করি।

17. একটি চিমনির সঙ্গে একই সমতলে অবস্থিত অনুভূমিক সরলরেখায় কোনো এক বিন্দু থেকে চিমনির দিকে 50 মিটার এগিয়ে যাওয়ায় তার চূড়ার উন্নতি কোণ 30° থেকে 60° হলো। চিমনির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

18. 126 ডেসিমি উঁচু একটি উল্লম্ব খুঁটি মাটি থেকে কিছু উপরে দুমড়ে গিয়ে উপরের অংশ কাত হয়ে পড়ায় তার অগ্রভাগ মাটি স্পর্শ করে ভূমির সঙ্গে 30° কোণ উৎপন্ন করেছে। খুঁটিটি কত উপরে দুমড়ে গিয়েছিল এবং তার অগ্রভাগ গোড়া থেকে কত দূরে মাটি স্পর্শ করেছিল হিসাব করে লিখি।

19. মাঠের মাঝখানে দাঁড়িয়ে মোহিত একটি উড়ন্ত পাখিকে প্রথমে উত্তরদিকে 30° উন্নতি কোণে এবং 2 মিনিট পরে দক্ষিণদিকে 60° উন্নতি কোণে দেখতে পেল। পাখিটি যদি একই সরলরেখা বরাবর $50\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে উড়ে থাকে, তবে তার গতিবেগ কিলোমিটার প্রতি ঘন্টায় নির্ণয় করি।

20. $5\sqrt{3}$ মিটার উঁচু একটি রেলওয়ে ওভারব্রিজে দাঁড়িয়ে অমিতাদিদি প্রথমে একটি ট্রেনের ইঞ্জিনকে ব্রিজের এপারে 30° অবনতি কোণে দেখলেন। কিন্তু 2 সেকেন্ড পরই ওই ইঞ্জিনকে ব্রিজের ওপারে 45° অবনতি কোণে দেখলেন। ট্রেনটির গতিবেগ মিটার প্রতি সেকেন্ডে হিসাব করে লিখি।

21. একটি নদীর পাড়ের সঙ্গে লম্বভাবে একটি সেতু আছে। সেতুটির একটি পাড়ের প্রান্ত থেকে নদীর পাড় ধরে কিছু দূর গেলে সেতুর অপর প্রান্তটি 45° কোণে দেখা যায় এবং পাড় ধরে আরও 400 মিটার দূরে সরে গেলে সেই প্রান্তটি 30° কোণে দেখা যায়। সেতুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

22. একটি পার্কের একপ্রান্তে অবস্থিত 15 মিটার উঁচু একটি বাড়ির ছাদ থেকে পার্কের অপর পারে অবস্থিত একটি ইটভাটার চিমনির পাদদেশ ও অগ্রভাগ যথাক্রমে 30° অবনতি কোণ ও 60° উন্নতি কোণে দেখা যায়। ইটভাটার চিমনির উচ্চতা এবং ইটভাটা ও বাড়ির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করি।

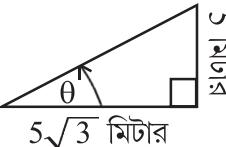
23. একটি উড়োজাহাজ থেকে রাস্তায় পরপর দুটি কিলোমিটার ফলকের অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° হলে, উড়োজাহাজটির উচ্চতা নির্ণয় করি, (i) যখন ফলক দুটি উড়োজাহাজের বিপরীত পাশে অবস্থিত, (ii) যখন ফলক দুটি উড়োজাহাজের একই পাশে অবস্থিত।

24. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) মাঠের উপর একটি বিন্দু থেকে মোবাইল টাওয়ারের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° এবং টাওয়ারের গোড়া থেকে ওই বিন্দুর দূরত্ব 10 মিটার। টাওয়ারের উচ্চতা

(a) 10 মিটার (b) $10\sqrt{3}$ মিটার (c) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ মিটার (d) 100 মিটার

(ii)

θ-এর মান - (a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 75°

(iii) তিনতলা বাড়ির ছাদ থেকে মাটিতে পড়ে থাকা একটি বাক্সকে যত কোণে দেখলে বাড়ির উচ্চতা ও বাড়ি থেকে বাক্সটির দূরত্ব সমান হয় তা হলো,

(a) 15° (b) 30° (c) 45° (d) 60°

(iv) একটি টাওয়ারের উচ্চতা $100\sqrt{3}$ মিটার। টাওয়ারের পাদবিন্দু থেকে 100 মিটার দূরে একটি বিন্দু থেকে টাওয়ারের চূড়ার উন্নতি কোণ

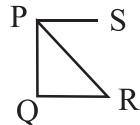
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) কোনোটিই নয়

(v) একটি পোস্টের ভূমিতলে ছায়ার দৈর্ঘ্য পোস্টের উচ্চতার $\sqrt{3}$ গুণ হলে, সূর্যের উন্নতি কোণ

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) কোনোটিই নয়

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) ΔABC এর $\angle B=90^\circ$, $AB=BC$ হলে, $\angle C=60^\circ$.

(ii) PQ একটি বাড়ির উচ্চতা, QR ভূমি। P বিন্দু থেকে R বিন্দুর অবনতি কোণ $\angle SPR$; সুতরাং, $\angle SPR = \angle PRQ$.

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) সূর্যের উন্নতি কোণ 30° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 60° হলে, একটি পোস্টের ছায়ার দৈর্ঘ্য_____ পায়। (হ্রাস/বৃদ্ধি)

(ii) সূর্যের উন্নতি কোণ 45° হলে, একটি পোস্টের দৈর্ঘ্য ও তার ছায়ার দৈর্ঘ্য__________ হবে।

(iii) যখন সূর্যের উন্নতি কোণ 45°-এর __________ তখন একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য স্তম্ভের উচ্চতা থেকে কম।

25. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) একটি ঘুড়ির উন্নতি কোণ 60° এবং সুতোর দৈর্ঘ্য $20\sqrt{3}$ মিটার হলে, ঘুড়িটি মাটি থেকে কত উচ্চতায় আছে হিসাব করি।

(ii) একটি সমকোণী ত্রিভুজাকারক্ষেত্র ABC-এর অতিভুজ AC-এর দৈর্ঘ্য 100 মিটার এবং $AB=50\sqrt{3}$ মিটার হলে, $\angle C$ এর মান নির্ণয় করি।

(iii) ঝড়ে একটি গাছ মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ এমনভাবে ভূমি স্পর্শ করেছে যে গাছটির অগ্রভাগ থেকে গোড়ার দূরত্ব এবং বর্তমান উচ্চতা সমান। গাছটির অগ্রভাগ ভূমির সাথে কত কোণ করেছে হিসাব করি।

(iv) ABC সমকোণী ত্রিভুজ $\angle B=90^\circ$, AB র উপর D এমন একটি বিন্দু যে $AB : BC : BD = \sqrt{3} : 1 : 1$, $\angle ACD$ -এর মান নির্ণয় করি।

(v) একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য এবং স্তম্ভের উচ্চতার অনুপাত $\sqrt{3} : 1$ হলে, সূর্যের উন্নতি কোণ নির্ণয় করি।

26 রাশিবিজ্ঞান : গড় , মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান

STATISTICS : MEAN, MEDIAN, OGIVE, MODE

আমাদের বিরামপুর গ্রামের চৌরাস্তার মোড়ে দুটি চায়ের দোকানে খুব ভালো মানের চা পাওয়া যায়। একটি বিমলকাকার চা-এর দোকান এবং অন্যটি আশাকাকিমার চা-এর দোকান। দিনের প্রায় সকল সময়ে ওই দুটি দোকানে খরিদ্দারদের ভিড় লেগেই থাকে।

সুতপা ওই দুটি চা-এর দোকানের প্রত্যেকটির গতমাসের প্রতিদিন কত টাকা লাভ হয়েছে তার একটা হিসাবের ছক তৈরি করেছে।

সুতপার তৈরি সেই হিসাবের ছক দুটি হলো,

গতমাসে বিমলকাকার দোকানের প্রতিদিন লাভের (টাকায়) ছক,

321,	352,	388,	410,	480,	400,	475,	415,	345,	360
445,	390,	552,	495,	570,	530,	436,	580,	510,	462
437,	491,	498,	460,	372,	463,	458,	515,	464,	428

গতমাসে আশাকাকিমার দোকানের প্রতিদিন লাভের (টাকায়) ছক,

315,	420,	480,	530,	580,	315,	360,	440,	480,	465
530,	465,	580,	360,	420,	360,	480,	530,	580,	360
440,	420,	360,	480,	530,	420,	580,	530,	465,	420

(1) কিন্তু উপরের তথ্য থেকে গতমাসে কোন দোকানে গড় লাভ বেশি হয়েছে কীভাবে বুঝব? অর্থাৎ দুটি দোকানের পাওয়া তথ্যের তুলনা কীভাবে করতে পারব দেখি।

আমরা প্রতিটি তথ্যের জন্য এমন কোনো কোনো বিশেষ সংখ্যা নির্ণয় করব যা সম্পূর্ণ তথ্যটির প্রতিনিধিত্ব (Representative) করবে।

(2) প্রতিটি তথ্যের জন্য এই কোনো কোনো বিশেষ সংখ্যাকে কী বলা হয়?

কোনো তথ্যের কোনো কোনো বিশেষ সংখ্যা যেগুলি সম্পূর্ণ তথ্যের প্রতিনিধিত্ব করে, সেগুলি সাধারণত তথ্যের কেন্দ্রীয় অবস্থান (Central position)-এর কাছাকাছি থাকে। তাই ওই বিশেষ সংখ্যাগুলিকে তথ্যের **মধ্যগামিতার মাপক** (Measure of Central tendency) বলা হয়।

(3) কেন্দ্রীয় অবস্থান বলতে কী বুঝি?

তথ্যের সংখ্যা গুলিকে ঊর্ধ্বক্রমানুসারে সাজালে মাঝের সংখ্যা / সংখ্যাগুলির কাছাকাছি অবস্থানকে কেন্দ্রীয় অবস্থান বলা হয়।

মধ্যগামিতার মাপক তিনটি— (i) গড় (Mean) (ii) মধ্যমা (Median) (iii) ভূয়িষ্ঠক বা সংখ্যাগুরুমান (Mode)

(4) সুতপার পাওয়া বিমলকাকার চা-এর দোকানের লাভের তথ্যের গড় (Mean)নির্ণয় করি ও কী পাই দেখি।

গতমাসে 30 দিনে বিমলকাকার মোট লাভ হয় = $x_1+x_2+x_3+ \dots\dots\dots +x_{30}$

যেখানে x_1=321 টাকা, x_2=352 টাকা, x_3=388 টাকা , ..., x_{30}=428 টাকা

$\therefore$ মোট লাভ = (321+352+388+........+428) টাকা

= 13502 টাকা

$\therefore$ বিমলকাকার দোকানের গড় লাভ = $\frac{13502 \text{ টাকা}}{30}$ = 450.06 টাকা = 450 টাকা(প্রায়)।

এই পদ্ধতিতে পাওয়া গড়কে **যৌগিক গড় (Arithmetic mean)** বলা হয়। শুধু গড় বলতে আমরা সাধারণত যৌগিক গড়কেই বুঝি।

x চলের n টি বিভিন্ন মান $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ -এর যৌগিক গড় $\bar{x}$ হলে,

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n}{n}$$

$\bar{x}$ কে পড়ি x -bar.

5 কিন্তু সংক্ষেপে কীভাবে লিখব?

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

এখানে $\sum$ চিহ্নটি গ্রিক বর্ণ এবং বলা হয় Capital Sigma , যার অর্থ সমষ্টি।

তাহলে $\sum_{i=1}^{10} x_i$ কী হবে?

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}.$$

$\sum_{i=1}^{10}(10\times i)$ কী হবে?

$$\sum_{i=1}^{10}(10\times i) = (10\times1)+(10\times2)+\ldots\ldots+(10\times10)$$
$$= 10\times(1+2+3+\ldots\ldots+10)$$
$$= 10\times55 = 550$$

আমি সুতপার পাওয়া আশাকাকিমার চা-এর দোকানের লাভের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

সারণি-1 (Table – 1)

লাভের পরিমাণ (টাকায়) (x_i)	315	360	420	440	465	480	530	580	মোট
দিনসংখ্যা (f_i)	2	5	5	2	3	4	5	4	30

এক্ষেত্রে আশাকাকিমার চা-এর দোকানের গতমাসের গড় লাভ কীভাবে পাব? অর্থাৎ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে গড় মান কীভাবে নির্ণয় করব দেখি। অর্থাৎ অবিন্যস্ত (Ungrouped) তথ্যের যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

লাভের পরিমাণ টাকা (x_i)	দিন সংখ্যা (f_i)	$x_i f_i$
315	2	630
360	5	1800
420	5	2100
440	2	880
465	3	1395
480	4	1920
530	5	2650
580	4	2320
মোট	$\sum f_i=30$	$\sum f_i x_i=13695$

∴ গতমাসে আশাকাকিমার চা-এর দোকানের গড়লাভ $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{13695}{30}$ টাকা = 456.50 টাকা

∴ দেখছি, সুতপার পাওয়া তথ্য অনুযায়ী গতমাসে আশাকাকিমার দোকানে লাভের গড় বেশি ছিল।

কিন্তু পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে যে যৌগিক গড় নির্ণয় করলাম তাকে কী বলা হয়?

x চলের **ভারযুক্ত গড় (Weighted mean)** বলা হয়।

বুঝেছি, যদি x চলের $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ মানের পরিসংখ্যাগুলি যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots f_n$ হয়, তাহলে $\overline{x}$ উহাদের ভারযুক্ত গড় হবে যদি, $\overline{x} = \dfrac{x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + \ldots\ldots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$ হয়।

প্রয়োগ : 1. আমাদের গ্রামের উচ্চমাধ্যমিক বিদ্যালয়ে শাকিলদের শ্রেণির 40 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতার তালিকা তৈরি করেছি। ওদের গড় উচ্চতা নির্ণয় করি।

শিক্ষার্থীর সংখ্যা	2	6	8	12	7	3	2
শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সেমি.)	90	97	110	125	134	140	148

শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সেমি.) (x_i)	শিক্ষার্থীর সংখ্যা (f_i)	$x_i f_i$
90	2	$90 \times 2 = 180$
97	6	$97 \times 6 =$ ☐
110	8	$110 \times 8 =$ ☐
125	12	☐
134	7	☐
140	3	☐
148	2	☐
মোট	$\sum f_i = 40$	$\sum f_ix_i = 4796$

$\therefore$ শিক্ষার্থীর গড় উচ্চতা $= \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \dfrac{4796}{40}$ সেমি. $= 119.9$ সেমি.

প্রয়োগ : 2. বিশাখের শ্রেণির 30 জন ছাত্রের ভূগোল পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর হলো,

61, 78, 80, 77, 80, 69, 73, 61, 82, 78, 79, 72, 78, 62, 80
71, 82, 73, 66, 73, 62, 80, 74, 78, 62, 80, 66, 70, 79, 75

ভূগোল পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের যৌগিক গড় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

আমি সারণি-1 (Table-1)-এর সুতপার তৈরি আশাকাকিমার চা-এর দোকানের লাভের অবিন্যস্ত (Ungrouped) তথ্যটি বিন্যস্ত (Grouped) তথ্যে লিখি যেখানে শ্রেণি দৈর্ঘ্য 50.

আমি পাশের বিন্যস্ত তথ্যটি থেকে লাভের যৌগিক গড় নির্ণয় করি ও কী পাই দেখি।

পাশের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকায় প্রতিটি শ্রেণি অন্তরের প্রতিনিধিত্ব করবে এমন সংখ্যা কীভাবে পাব?

সারণি-2 (Table – 2)

লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিনসংখ্যা (f_i)
300 - 350	2
350 - 400	5
400 - 450	7
450 - 500	7
500 - 550	5
550 - 600	4
মোট	30

ধরে নেওয়া হয় যে, বিন্যস্ত তথ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার প্রতিটি শ্রেণির পরিসংখ্যার বেশিরভাগ সংখ্যাগুলি সেই **শ্রেণির মধ্যমান বা শ্রেণি মধ্যকের** কাছাকাছি কেন্দ্রীভূত হয়ে থাকে। তাই প্রতিটি শ্রেণির শ্রেণি মধ্যককে ওই শ্রেণির প্রতিনিধি ধরা হয়, যেখানে

শ্রেণি মধ্যক $= \dfrac{\text{নিম্ন শ্রেণি সীমানা + উচ্চ শ্রেণি সীমানা}}{2}$

প্রয়োগ : 3. আমি Table-2 থেকে গতমাসে আশাকাকিমার দোকানের লাভের যৌগিক গড় নির্ণয় করি ও কী পাই দেখি।

সারণি-3 (Table – 3)

লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিনসংখ্যা (পরিসংখ্যা f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$x_i f_i$
300 - 350	2	325	650
350 - 400	5	375	1875
400 - 450	7	425	2975
450 - 500	7	475	3325
500 - 550	5	525	2625
550 - 600	4	575	2300
মোট	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 13750$

$\therefore$ লাভের যৌগিক গড় $= \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{13750}{30}$ টাকা = 458.33 টাকা (প্রায়)

6 যৌগিক গড় নির্ণয়ের এই নতুন পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

যৌগিক গড় নির্ণয়ের এই নতুন পদ্ধতিকে **প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method)** বলা হয়।

দেখছি, আশাকাকিমার দোকানের লাভের অবিন্যস্ত তথ্য থেকে গড় লাভ পেয়েছি 456.50 টাকা এবং বিন্যস্ত তথ্য থেকে গড় লাভ পেলাম 458.33 টাকা (প্রায়)।

7 কিন্তু এমন আলাদা মান কেন পেলাম এবং কোনটি ঠিক?

Table-2-এর বিন্যস্ত তথ্যে শ্রেণি মধ্যক ধরে নিয়েছি, তাই বিন্যস্ত তথ্য থেকে আসন্ন মানে (approximate) গড় 458.33 পেয়েছি।

কিন্তু অবিন্যস্ত তথ্যের গড় মান 456.50 ঠিক।

8 কিন্তু x_i এবং f_i-এর মান খুব বড়ো হলে তখন x_i এবং f_i-এর গুণফল নিয়ে হিসাব করা জটিল ও সময়সাপেক্ষ হয়ে পড়বে এবং ভুল হওয়ার সম্ভবনা থাকবে। তাই আরও সহজে এবং কম সময়ে কীভাবে হিসাব করব দেখি।

f_i-এর মানের পরিবর্তন করা যাবে না। কিন্তু প্রতিটি x_i থেকে একটি নির্দিষ্ট মান বিয়োগ করে যে নতুন x_i পাব তাদের সাহায্যে যৌগিক গড় নির্ণয় করতে পারব।

তাই প্রথমে x_i থেকে একটি নির্দিষ্ট x_i বেছে নিয়ে প্রতিটি x_i থেকে বিয়োগ করে যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

9 কিন্তু ওই নির্দিষ্ট x_i-কে কী বলা হয়?

ওই নির্দিষ্ট x_i যা প্রতিটি x_i থেকে বিয়োগ করা হয়, তাকে **কল্পিত গড় (Assumed mean)** বলা হয় এবং সাধারণত "a" চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

আবার, এই যৌগিক গড় নির্ণয়ের হিসাব আরও সহজ করার জন্য এই কল্পিত গড় (Assumed mean)-a -কে সাধারণত $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$-এর মধ্য থেকে যে x_i কেন্দ্রে আছে তাকে নেওয়া হয়।

$\therefore$ Table-3-এ ধরি, a=425 বা a=475

প্রয়োগ : 4. আমি $a=425$ ধরে, $d_i=x_i-a=x_i-425$ লিখে Table – 1 থেকে প্রাপ্ত তথ্যের যৌগিক গড় নির্ণয় করি ।

সারণি-4 (Table – 4)

লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিনসংখ্যা (পরিসংখ্যা f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	($d_i=x_i-a$) $d_i=(x_i-425)$	$d_i f_i$
300 - 350	2	325	–100	–200
350 - 400	5	375	–50	–250
400 - 450	7	425 = a	0	0
450 - 500	7	475	50	350
500 - 550	5	525	100	500
550 - 600	4	575	150	600
মোট	$\sum f_i=30$			$\sum f_i d_i=1000$

$\therefore$ উপরের ছক থেকে পাই, $\bar{d}=\dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}=\dfrac{1000}{30}=33.33$ (প্রায়)

10 এই $\bar{d}$ কে কী বলা হয়?

d_i হলো প্রতিটি x_i থেকে a -এর **বিচ্যুতি [Deviation]** এবং $\bar{d}$ হলো **বিচ্যুতির গড় [Mean of the Deviation]**।

11 এখন আমরা $\bar{x}$ ও $\bar{d}$ -এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

$$\bar{d}=\frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}=\frac{\sum f_i(x_i-a)}{\sum f_i}$$

$$=\frac{\sum f_i x_i-\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}-\frac{\sum f_i a}{\sum f_i}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}-\frac{a\sum f_i}{\sum f_i}\quad [\because a \text{ ধ্রুবক}]$$

$$\bar{d}=\bar{x}-a$$

বা, $\bar{x}=a+\bar{d}$

বা, $\bar{x}=a+\dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

লাভের যৌগিক গড় $=a+\bar{d}$ = (425+33.33) (প্রায়) = 458.33 (প্রায়)

$\therefore$ গতমাসে আশাকাকিমার চা-এর দোকানে গড় লাভ হয়েছিল 458.33 টাকা (প্রায়)।

12 তুলনামূলকভাবে সহজে যৌগিক গড় নির্ণয়ের এই পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

যৌগিক গড় নির্ণয়ের উপরের পদ্ধতিকে **কল্পিত গড় পদ্ধতি (Asumed Mean Method)** বা **সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (Short Method)** বা **বিচ্যুতি পদ্ধতি (Deviation Method)** বলা হয়।

যৌগিক গড় নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method) বা কল্পিত গড় পদ্ধতি (Asumed Mean Method) যে-কোনো একটি পদ্ধতি ব্যবহার করা যায়। তবে তথ্যের সাংখ্যমান বড়ো হলে কল্পিত গড় পদ্ধতি (Asumed Mean Method)-তে যৌগিক গড় নির্ণয় করা সুবিধাজনক।

আমি সারণি 3-এর a=325; [অথবা a=375 বা a=475 বা a=525 বা a=575] নিয়ে কল্পিত গড় (Asumed Mean) পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় করে হাতেকলমে যাচাই করি যে প্রতিক্ষেত্রে যৌগিক গড়ের মান একই হবে। [নিজে করি]

কিন্তু কল্পিত গড় পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয়ের সময়ে দেখছি Table-4-এর চতুর্থ স্তম্ভের প্রতিটি সংখ্যা 50-এর গুণিতক। তাই প্রতিটি d_i-কে 50 দিয়ে ভাগ করে হিসাব করলে হিসাবটি আগের তুলনায় অনেক সহজ হয়। অর্থাৎ প্রতিটি d_i-কে শ্রেণি দৈর্ঘ্য (h) দিয়ে ভাগ করলে সহজে হিসাব করা সম্ভব হয়।

প্রয়োগ : 4. Table-4-থেকে $\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ নির্ণয় করি যেখানে $u_i = \frac{x_i - a}{h}$, এখানে a=425 এবং h=50

লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিনসংখ্যা (পরিসংখ্যা f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$(d_i = x_i - a)$ $d_i = x_i - 425$	$u_i = \frac{x_i - a}{50}$	$f_i u_i$
300 - 350	2	325	−100	−2	−4
350 - 400	5	375	−50	−1	−5
400 - 450	7	425	0	0	0
450 - 500	7	475	50	1	7
500 - 550	5	525	100	2	10
550 - 600	4	575	150	3	12
মোট	$\sum f_i = 30$				$\sum f_i u_i = 20$

$\therefore$ পেলাম, $\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

(13) আমি $\bar{u}$ ও $\bar{x}$ -এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i \left(\frac{x_i - a}{h}\right)}{\sum f_i} \qquad \left[\because u_i = \frac{x_i - a}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{h} \times \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h} \times \left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{a \sum f_i}{\sum f_i}\right]$$

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \times (\bar{x} - a)$$

বা, $h\bar{u} = \bar{x} - a$

সুতরাং, $\bar{x} = a + h\bar{u}$

$$\therefore \bar{x} = a + h \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$

বুঝেছি, এই পদ্ধতিতে গতমাসে আশাকাকিমার চা-এর দোকানের গড় লাভ $= (425 + 50 \times \frac{2}{3})$ টাকা
$= 458.33$ টাকা (প্রায়)

$\therefore$ যৌগিক গড়ের একই মান পেলাম।

(14) তুলনামূলকভাবে আরও সহজে যৌগিক গড় নির্ণয়ের উপরের পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

যৌগিক গড় নির্ণয়ের উপরের পদ্ধতিকে **ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি (Step-deviation method)** বলা হয়।

(15) ক্রম-বিচ্যুতি (Step-deviation) পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় কি সর্বদা সুবিধাজনক?

যদি সকল শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য সমান হয় অথবা সকল d_i-এর একটি সাধারণ উৎপাদক থাকে তবেই ক্রম-বিচ্যুতি

পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় সুবিধাজনক।

∴ **পেলাম,** (i) প্রত্যক্ষ পদ্ধতি, কল্পিত গড় পদ্ধতি ও ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতির প্রতিক্ষেত্রে প্রাপ্ত যৌগিক গড়ের মান সমান।

(ii) কল্পিত গড় পদ্ধতি এবং ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি উভয়েই প্রত্যক্ষ পদ্ধতির একটি সরলতর রূপ।

(iii) যদি শ্রেণি দৈর্ঘ্য সমান হয় তাহলে যৌগিক গড় নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতিতে গণনা সহজ হবে।

(iv) আবার, শ্রেণি দৈর্ঘ্য অসমান হলে যৌগিক গড় নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি করা যাবে যদি সকল $\mathbf{d_i}$-এর একটি সাধারণ উৎপাদক থাকে।

প্রয়োগ : 5. আমি ও সতীশ আমাদের পাড়ার 50 টি পরিবারের এক সপ্তাহে বিদ্যুৎ খরচের তথ্যটি একটি ছকে লিখেছি, সেই ছকটি হলো —

বিদ্যুৎ খরচের পরিমাণ (ইউনিট)	85–105	105–125	125–145	145–165	165–185	185–205
পরিবারের সংখ্যা	3	12	18	10	5	2

আমি যৌগিক গড় নির্ণয়ের তিনটি পদ্ধতিতে 50 টি পরিবারের এক সপ্তাহের বিদ্যুৎ খরচের যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

প্রথমে শ্রেণি মধ্যক নির্ণয় করে প্রদত্ত তথ্যটি লিখি,

বিদ্যুৎ খরচের পরিমাণ (ইউনিট)	পরিবারের সংখ্যা (পরিসংখ্যা f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)
85 - 105	3	95
105 -125	12	115
125 - 145	18	135
145 - 165	10	155
165 - 185	5	175
185 - 205	2	195
মোট	$\sum f_i=50$	

ধরি, $a=155$ এবং এখানে শ্রেনি দৈর্ঘ্য $h=20$

∴ $d_i= x_i-155$ এবং $u_i=\frac{x_i-155}{20}$ ধরে নীচের ছকে লিখি।

বিদ্যুৎ খরচের পরিমাণ (ইউনিট)	পরিবারের সংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$d_i=x_i-155$	$u_i=\frac{x_i-155}{20}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
85 - 105	3	95	–60	–3	285	–180	–9
105 -125	12	115	–40	–2	1380	–480	–24
125 - 145	18	135	–20	–1	2430	–360	–18
145 - 165	10	155	0	0	1550	0	0
165 - 185	5	175	20	1	875	100	5
185 - 205	2	195	40	2	390	80	4
মোট	50				6910	–840	–42

∴ উপরের ছক থেকে পেলাম, $\sum f_i=50, \sum f_i x_i=6910, \sum f_i d_i=-840$ এবং $\sum f_i u_i=-42$

$\therefore$ প্রত্যক্ষ পদ্ধতি থেকে পাই, যৌগিক গড় $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6910}{50}$ ইউনিট $= 138.2$ ইউনিট

কল্পিত গড় পদ্ধতি থেকে পাই, যৌগিক গড় $= a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 155 + \frac{(-840)}{50}$ ইউনিট

$= 155 - 16.8 = 138.2$ ইউনিট

আবার, ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি থেকে পাই, যৌগিক গড় $= a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 155 + \left(\frac{-42}{50}\right) \times 20$ ইউনিট

$= 155 - 16.8 = 138.2$ ইউনিট

$\therefore$ তিনটি পদ্ধতির সাহায্যে দেখছি, পাড়ার 50 টি পরিবারের এক সপ্তাহের বিদ্যুৎ খরচের যৌগিক গড় 138.2 ইউনিট।

প্রয়োগ : 6. রমেশ তাঁতির অনেকগুলি তাঁত আছে। সেখানে 35 জন তাঁতির সাপ্তাহিক আয়ের (টাকার) পরিমাণের তথ্যটি নীচের ছকে লিখেছি।

আয় (টাকায়)	2500 - 3000	3000 - 3500	3500 - 4000	4000 - 4500	4500 - 5000
পরিসংখ্যা	3	6	9	12	5

আয়ের যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

$a = 3750$ এবং $h = 500$ ধরে ক্রম-বিচ্যুতি[Step-deviation]পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

আয় (টাকায়) (শ্রেণি অন্তর)	পরিসংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 3750}{500}$	$f_i u_i$
2500 - 3000	3	2750	-2	-6
3000 - 3500	6	3250	-1	-6
3500 - 4000	9	3750	0	0
4000 - 4500	12	4250	1	12
4500 - 5000	5	4750	2	10
মোট	$\sum f_i = 35$			$\sum f_i u_i = 10$

$\therefore$ আয়ের যৌগিক গড় $= 3750$ টাকা $+ 500 \times \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ টাকা

$= 3750$ টাকা $+ \left[500 \times \frac{10}{35}\right]$ টাকা $= \square$ টাকা

প্রয়োগ : 7. যে-কোনো পদ্ধতির সাহায্যে নীচের তথ্যের যৌগিক গড় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

শ্রেণি	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
পরিসংখ্যা	7	5	6	12	8	2

হাতেকলমে

আমি আমার শ্রেণির 40 জন বন্ধুর ওজনের একটি বিন্যস্ত তথ্যের ছক তৈরি করি ও ওই তথ্য থেকে যৌগিক গড়ের তিনটি পদ্ধতির সাহায্যে আমার শ্রেণির ওই 40 জন বন্ধুর ওজনের যৌগিক গড় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 8. যদি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার যৌগিক গড় 54 হয়, তবে k-এর মান নির্ণয় করি।

শ্রেণি	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100
পরিসংখ্যা	7	11	k	9	13

শ্রেণি অন্তর	পরিসংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$f_i x_i$	$u_i = \frac{x_i - 50}{20}$	$f_i u_i$
0 - 20	7	10	70	–2	–14
20 - 40	11	30	330	–1	–11
40 - 60	k	50 = a	50k	0	0
60 - 80	9	70	630	1	9
80 - 100	13	90	1170	2	26
মোট	$\sum f_i = 40+k$		$\sum f_i x_i = 2200+50k$		$\sum f_i u_i = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2200+50k}{40+k}$

শর্তানুসারে, $\frac{2200+50k}{40+k} = 54$

বা, $2200 + 50k = 2160 + 54k$

বা, $50k - 54k = 2160 - 2200$

বা, $-4k = -40$

$\therefore$ $k = 10$

অন্যভাবে,

যৌগিক গড় $= a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$54 = 50 + \frac{10}{40+k} \times 20$

বা, $4 = \frac{200}{40+k}$

বা, $40+k = 50$

$\therefore$ $k = 10$

প্রয়োগ : 9. যদি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার যৌগিক গড় 25 হয়, তবে k-এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

শ্রেণি	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
পরিসংখ্যা	5	k	15	16	6

প্রয়োগ : 10. মারিয়া তাদের গ্রামের অঙ্কন প্রতিযোগিতায় কে কত নম্বর পেয়েছে তার একটি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করেছে। তালিকাটি হলো:

নম্বর	0 অথবা 0-এর বেশি	10 অথবা 10-এর বেশি	20 অথবা 20-এর বেশি	30 অথবা 30-এর বেশি	40 অথবা 40-এর বেশি	50 অথবা 50-এর বেশি
প্রতিযোগীর সংখ্যা	40	36	22	11	2	0

আমি অঙ্কন প্রতিযোগিতায় প্রাপ্ত নম্বরের যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

প্রথমে বৃহত্তর সূচক ক্রম যৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাটিকে সাধারণ বিভাজন তালিকায় প্রকাশ করি।

দেখছি, 40 জন শিক্ষার্থী 0 বা 0-এর বেশি নম্বর পেয়েছে,

এবং 36 জন শিক্ষার্থী 10 বা 10-এর বেশি নম্বর পেয়েছে,

$\therefore$ 0 থেকে 10-এর মধ্যে নম্বর পেয়েছে (40–36) জন =4 জন শিক্ষার্থী

একইভাবে 10 থেকে 20-এর মধ্যে নম্বর পেয়েছে (36–22) জন =14 জন শিক্ষার্থী

$\therefore$ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাটি হলো :

নম্বর	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
প্রতিযোগীর সংখ্যা	4	14	11	9	2

কল্পিত গড় 25 ধরে ক্রম বিচ্যুতি পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় করি—

শ্রেণি-সীমানা (নম্বর)	প্রতিযোগীর সংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$u_i=\frac{x_i-25}{10}$	$f_i u_i$
0 - 10	4	5	–2	–8
10 - 20	14	15	–1	–14
20 - 30	11	25	0	0
30 - 40	9	35	1	9
40 - 50	2	45	2	4
মোট	$\sum f_i=40$			$\sum f_i u_i=-9$

নির্ণেয় যৌগিক গড় $=25+10\times\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = 25+10\left(\frac{-9}{40}\right) = 25-2.25 = 22.75$

$\therefore$ 40 জন প্রতিযোগীর প্রাপ্ত নম্বরের গড় 22.75

প্রয়োগ : 11. আমি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার যৌগিক গড় নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমা	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79
পরিসংখ্যা	12	20	14	6	5	3

প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার শ্রেণিগুলি শ্রেণি-অন্তর্ভুক্ত।

তাই প্রথমে পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার শ্রেণি-অন্তর্ভূত শ্রেণিগুলি শ্রেণি-বহির্ভুক্ত আকারে লিখে যৌগিক গড় নির্ণয় করি। কল্পিত গড় 44.5 ধরি। এখানে শ্রেণি দৈর্ঘ্য (h) = 10

শ্রেণি-সীমা	শ্রেণি-সীমানা	পরিসংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$[u_i=\frac{x_i-a}{h}]$ $u_i=\frac{x_i-44.5}{10}$	$f_i u_i$
20 - 29	19.5 - 29.5	12	24.5	–2	–24
30 - 39	29.5 - 39.5	20	34.5	–1	–20
40 - 49	39.5 - 49.5	14	44.5	0	0
50 - 59	49.5 - 59.5	6	54.5	1	6
60 - 69	59.5 - 69.5	5	64.5	2	10
70 - 79	69.5 - 79.5	3	74.5	3	9
	মোট	$\sum f_i=60$			$\sum f_i u_i=-19$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় $=44.5+h\times\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = 44.5+\left(10\times\frac{-19}{60}\right) = \square$ [নিজে হিসাব করে লিখি]

প্রয়োগ : 12. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার যৌগিক গড় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

শ্রেণি-সীমা	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 -54
পরিসংখ্যা	10	12	15	5	3	5

প্রয়োগ : 13. নীচের তালিকা থেকে একটি বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণির 52 জন ছাত্রের গড় নম্বর প্রত্যক্ষ পদ্ধতি ও কল্পিত গড় পদ্ধতিতে নির্ণয় করি।

ছাত্র সংখ্যা	4	7	10	15	8	5	3
নম্বর	30	33	35	40	43	45	48

ধরি, কল্পিত গড় (a) = 40

নম্বর (x_i)	ছাত্র সংখ্যা (f_i)	$f_i x_i$	($d_i = x_i - a$) $d_i = (x_i - 40)$	$f_i d_i$
30	4	120	–10	–40
33	7	231	–7	–49
35	10	350	–5	–50
40=a	15	600	0	0
43	8	344	3	24
45	5	225	5	25
48	3	144	8	24
মোট	$\sum f_i = 52$	$\sum f_i x_i = 2014$		$\sum f_i d_i = -66$

প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে গড় নম্বর $= \frac{2014}{52} = 38.73$ (প্রায়)

কল্পিত গড় পদ্ধতিতে, গড় নম্বর $= a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$= 40 + \frac{-66}{52}$

$= 40 - \frac{66}{52}$

$= (40 - 1.27)$ (প্রায়)

$= 38.73$ (প্রায়)

কষে দেখি 26.1

1. আমি আমার 40 জন বন্ধুর বয়স নীচের ছকে লিখেছি,

বয়স (বছর)	15	16	17	18	19	20
বন্ধুর সংখ্যা	4	7	10	10	5	4

আমি আমার বন্ধুদের গড় বয়স প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে নির্ণয় করি।

2. গ্রামের 50 টি পরিবারের সদস্য সংখ্যা নীচের তালিকায় লিখেছি।

সদস্য সংখ্যা	2	3	4	5	6	7
পরিবারের সংখ্যা	6	8	14	15	4	3

ওই 50 টি পরিবারের গড় সদস্য সংখ্যা কল্পিত গড় পদ্ধতিতে লিখি।

3. যদি নীচের প্রদত্ত তথ্যের যৌগিক গড় 20.6 হয়, তবে a-এর মান নির্ণয় করি :

চল (x_i)	10	15	a	25	35
পরিসংখ্যা (f_i)	3	10	25	7	5

4. যদি নীচের প্রদত্ত তথ্যের যৌগিক গড় 15 হয়, তবে p-এর মান হিসাব করে লিখি :

চল	5	10	15	20	25
পরিসংখ্যা	6	p	6	10	5

5. রহমতচাচা তার 50 টি বাক্সে বিভিন্ন সংখ্যায় আম ভরে পাইকারি বাজারে নিয়ে যাবেন। কতগুলি বাক্সে কতগুলি আম রাখলেন তার তথ্য নীচের ছকে লিখলাম।

আমের সংখ্যা	50 - 52	52 - 54	54 - 56	56 - 58	58 - 60
বাক্সের সংখ্যা	6	14	16	9	5

আমি ওই 50টি বাক্সে গড় আমের সংখ্যা হিসাব করে লিখি। (যে-কোনো পদ্ধতিতে)

6. মহিদুল পাড়ার হাসপাতালের 100 জন রোগীর বয়স নীচের ছকে লিখল। ওই 100 জন রোগীর গড় বয়স হিসাব করে লিখি। (যে-কোনো পদ্ধতিতে)

বয়স (বছরে)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
রোগীর সংখ্যা	12	8	22	20	18	20

7. প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে নীচের তথ্যের গড় নির্ণয় করি।

(i)

শ্রেণি-সীমানা	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
পরিসংখ্যা	4	6	10	6	4

(ii)

শ্রেণি-সীমানা	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
পরিসংখ্যা	10	16	20	30	13	11

8. কল্পিত গড় পদ্ধতিতে নীচের তথ্যের গড় নির্ণয় করি।

(i)

শ্রেণি-সীমানা	0 - 40	40 - 80	80 - 120	120 - 160	160 - 200
পরিসংখ্যা	12	20	25	20	13

(ii)

শ্রেণি-সীমানা	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75
পরিসংখ্যা	4	10	8	12	6

9. ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতিতে নীচের তথ্যের গড় নির্ণয় করি।

(i)

শ্রেণি-সীমানা	0 - 30	30 - 60	60 - 90	90 - 120	120 - 150
পরিসংখ্যা	12	15	20	25	8

(ii)

শ্রেণি-সীমানা	0 - 14	14 - 28	28 - 42	42 - 56	56 - 70
পরিসংখ্যা	7	21	35	11	16

10. যদি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার নম্বরের যৌগিক গড় 24 হয়, তবে p-এর মান নির্ণয় করি।

শ্রেণি-সীমানা (নম্বর)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ছাত্র সংখ্যা	15	20	35	p	10

11. আলোচনা সভায় উপস্থিত ব্যক্তিদের বয়সের তালিকা দেখি ও গড় বয়স নির্ণয় করি।

বয়স (বছর)	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54	55 - 59
রোগীর সংখ্যা	10	12	15	6	4	3

12. নীচের তথ্যের গড় নির্ণয় করি।

শ্রেণি-সীমা	5 - 14	15 - 24	25 - 34	35 - 44	45 - 54	55 - 64
পরিসংখ্যা	3	6	18	20	10	3

13. ছাত্রীদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় করি যদি তাদের প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নিম্নরূপ হয়:

শ্রেণি-সীমা (নম্বর)	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম
ছাত্রী সংখ্যা	5	9	17	29	45

14. নীচের তালিকার 64 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় করি।

শ্রেণি-সীমা (নম্বর)	1 - 4	4 - 9	9 - 16	16 - 17
ছাত্র	6	12	26	20

[সংকেত : যেহেতু প্রত্যেকটি শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য সমান নয়, তাই ক্রমবিচ্যুতি পদ্ধতিতে করতে পারব না। প্রত্যক্ষ পদ্ধতি এবং কল্পিত গড় পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করি]

গতকাল আমরা মোট দশজন বন্ধু সাঁতরাগাছি ঝিলের ধারে অনেকক্ষণ মজা করে সময় কাটিয়েছি। গান, আবৃত্তি ও গল্পের সঙ্গে সঙ্গে পরিযায়ী পাখিদের যাতায়াতও লক্ষ করেছি। আমার বন্ধু মিতা ও সজল কিছু খাবারের ব্যবস্থাও করেছিল।

ওই খাবারের ব্যবস্থা করার জন্যে আমরা যে যার সাধ্যমতো টাকা দিলাম। আমরা দশজনের প্রত্যেকে দিলাম10 টাকা, 15 টাকা,14 টাকা, 20 টাকা,12 টাকা, 18 টাকা, 22 টাকা, 24 টাকা, 100 টাকা ও 200 টাকা।

16 কিন্তু আমরা গড়ে কত টাকা দিলাম হিসাব করে দেখি।

আমরা গড়ে দিলাম $= \frac{10+15+14+20+12+18+22+24+100+200}{10}$ টাকা $= \square$ টাকা

যৌগিক গড় মধ্যগামিতার একটি মাপক।

17 কিন্তু দেখছি যৌগিক গড় 43.5 টাকা। কিন্তু এটি কেন্দ্রীয় অবস্থানের কাছাকাছি নেই।

প্রদত্ত তথ্যের মানগুলির দুই একটি যদি অন্যান্য মানগুলির তুলনায় অত্যধিক বড়ো বা ছোটো হয় তখন অনেকক্ষেত্রে যৌগিক গড় কেন্দ্রীয় অবস্থানের কাছাকাছি থাকে না।

18 তখন এই ধরনের তথ্যের ক্ষেত্রে কোন মধ্যগামিতার মাপক ব্যবহার করব?

ওইসব ক্ষেত্রে মধ্যগামিতার মাপক হিসাবে **মধ্যমা (Median)** ব্যবহার করা হয়।

19 কিন্তু মধ্যমা (Median) কী?

মধ্যমা মধ্যগামিতার অপর একটি মাপক।

প্রদত্ত অবিন্যস্ত রাশিতথ্যকে মানের ঊর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুযায়ী সাজালে তাদের মধ্যমান বা দুটি মধ্যমানের গড়ই হলো রাশিতথ্যের মধ্যমা (Median)।

বুঝেছি, প্রদত্ত তথ্যটি মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

10, 12, 14, 15, $\boxed{18}$, $\boxed{20}$, 22, 24, 100, 200

20 কিন্তু প্রদত্ত তথ্যটি মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজানোর পরে মধ্যমান দুটি সংখ্যা 18 ও 20 পেলাম। রাশিতথ্যের মধ্যমা কীভাবে পাব?

ধরি, x চল/চলরাশির n টি মান $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ মানের ঊর্ধ্বক্রম অনুযায়ী সাজিয়ে পেলাম,

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ [যেখানে, $x_1 < x_2 < x_3 \ldots\ldots < x_n$]

[মানগুলির মধ্যে কয়েকটি পরস্পর সমান হতে পারে।

(i) যদি $\boxed{\text{n অযুগ্ম (Odd)}}$ হয় তাহলে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ -তম মানটিই মধ্যমা।

$\therefore$ মধ্যমা $= x_{\frac{n+1}{2}}$, যখন n অযুগ্ম

(ii) যদি $\boxed{\text{n যুগ্ম (Even)}}$ হয়, কোনো একটি মধ্যমান পাওয়া যাবে না। এক্ষেত্রে $\left(\frac{n}{2}\right)$ -তম এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -তম মান দুইটির গড়কে মধ্যমা হিসাবে ধরা হয়।

$\therefore$ মধ্যমা $= \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$, যখন n যুগ্ম

বুঝেছি, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 22, 24, 100, 200-এর ক্ষেত্রে পদের সংখ্যা = 10

$\therefore$ এক্ষেত্রে মধ্যমা $\left(\frac{10}{2}\right)$ তম ও $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ তম পদের গড়।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = $\frac{18+20}{2}$ = 19

প্রয়োগ : 14. আমি আমার কিছু বন্ধুর ওজন নীচে লিখেছি, তাদের ওজনের মধ্যমা নির্ণয় করি।

32 কিগ্রা., 30 কিগ্রা., 38 কিগ্রা., 40 কিগ্রা., 36 কিগ্রা., 45 কিগ্রা., 50 কিগ্রা., 52 কিগ্রা., 40 কিগ্রা., 65 কিগ্রা., 54 কিগ্রা.

বন্ধুদের ওজন মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

30 কিগ্রা., 32 কিগ্রা., 36 কিগ্রা., 38 কিগ্রা., 40 কিগ্রা., 40 কিগ্রা., 45 কিগ্রা., 50 কিগ্রা., 52 কিগ্রা., 54 কিগ্রা., 65 কিগ্রা.

এখানে, n = 11 অর্থাৎ n অযুগ্ম।

ওজনের মধ্যমা = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ -তম মান = $\left(\frac{11+1}{2}\right)$ -তম মান = 6 -তম মান = 40 কিগ্রা.

প্রয়োগ : 15. আমরা কিছু বন্ধুদের এই মাসে স্কুলে উপস্থিতির দিনসংখ্যা লিখেছি। যেমন, 20 দিন, 25 দিন, 10 দিন, 18 দিন, 21 দিন, 18 দিন, 16 দিন, 22 দিন। আমি বন্ধুদের উপস্থিতির দিনসংখ্যার মধ্যমা নির্ণয় করি।

এই মাসে স্কুলে বন্ধুদের উপস্থিতির দিনসংখ্যা ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,
10 দিন, 16 দিন, 18 দিন, 18 দিন, 20 দিন, 21 দিন, 22 দিন, 25 দিন

এখানে, n = 8 অর্থাৎ n যুগ্ম।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8}{2}\right) \text{-তম মান} + \left(\frac{8}{2}+1\right) \text{-তম মান}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\text{চতুর্থ মান} + \text{পঞ্চম মান}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left[18\text{ দিন} + 20\text{ দিন}\right] = 19\text{ দিন}$

প্রয়োগ : 16. দুটি কবাডি দলের বিভিন্ন ম্যাচে প্রাপ্ত পয়েন্ট নীচে দেওয়া হলো। এদের মধ্যমা নির্ণয় করি।

(i) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

(ii) 6, 7, 8, 8, 9, 10, 15, 15, 16, 17, 19, 25 **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 17. নিয়ামতচাচার দোকানে ছয়রকম দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট 100 টি বল আছে। ওই বলগুলির ব্যাসের দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নরূপ :

ব্যাস (মিমি.)	44	45	46	47	48	49
পরিসংখ্যা (বলের সংখ্যা)	12	15	23	20	15	15

আমি এই 100 টি বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি।

এখানে, n = 100 অর্থাৎ n যুগ্ম।

$\therefore$ মধ্যমা = $\left(\frac{n}{2}\right)$ -তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -তম পর্যবেক্ষণের গড়

= 50-তম ও 51-তম পর্যবেক্ষণের গড়

বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য প্রথমে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

ব্যাসের দৈর্ঘ্য (মিমি.)	বলের সংখ্যা
44	12
45 পর্যন্ত	12+15=27
46 পর্যন্ত	27+23=50
47 পর্যন্ত	50+20=70
48 পর্যন্ত	70+15=85
49 পর্যন্ত	85+15=100

∴ প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার স্তম্ভ যোগ করে পাই,

ব্যাসের দৈর্ঘ্য (মিমি.)	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
44	12	12
45	15	27
46	23	50
47	20	70
48	15	85
49	16	100=n

উপরের ছক থেকে দেখছি, 50 -তম পর্যবেক্ষণ 46

এবং 51-তম পর্যবেক্ষণ 47

∴ মধ্যমা $= \dfrac{46+47}{2} = 46.5$

∴ নিয়ামতচাচার দোকানের 100 টি বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের মধ্যমা 46.5 মিমি.।

বুঝেছি, নিয়ামত চাচার দোকানের 50% বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 46.5 মিলিমিটারের কম এবং 50% বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 46.5 মিলিমিটারের বেশি।

প্রয়োগ : 18. আমি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে তথ্যটির মধ্যমা নির্ণয় করি।

চল (x_i)	25	26	27	28	29	30	31	32	33
পরিসংখ্যা (f_i)	4	2	4	7	6	5	5	4	2

প্রথমে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার একটি ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি:

চল (x_i)	পরিসংখ্যা (f_i)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
25	4	4
26	2	6
27	4	10
28	7	17
29	6	23
30	5	28
31	5	33
32	4	37
33	2	39=n

এখানে, $n=39$ অর্থাৎ n অযুগ্ম।

$\therefore$ মধ্যমা $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ -তম পর্যবেক্ষণ

$= \frac{39+1}{2}$ -তম পর্যবেক্ষণ $= 20$ -তম পর্যবেক্ষণ

উপরের ছক থেকে দেখছি, 18-তম থেকে 23-তম সব পর্যবেক্ষণের একই মান 29.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = 20-তম পদ = 29

প্রয়োগ : 19. আমি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে তথ্যটির মধ্যমা নির্ণয় করি : [নিজে করি]

চল (x_i)	1	2	3	4	5	6
পরিসংখ্যা (f_i)	8	12	16	19	21	24

আমাদের স্কুলের 100 জন শিক্ষার্থীর বুদ্ধ্যাঙ্ক পরীক্ষা (I.Q. test) করা হয়েছে। তার পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি হলো,

বুদ্ধ্যাঙ্ক (x_i)	75 - 85	85 - 95	95 - 105	105 - 115	115 - 125	125 - 135
শিক্ষার্থীর সংখ্যা (f_i)	9	12	27	30	17	5

আমি উপরের ছকের 100 জন শিক্ষার্থীর বুদ্ধ্যাঙ্কের মধ্যমা নির্ণয় করি।

দেখছি, প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি একটি বিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছক।

এই বিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

বুদ্ধ্যাঙ্ক (x_i)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
75 বা 75 -এর থেকে বড়ো কিন্তু 85-এর থেকে ছোটো	9
95-এর থেকে ছোটো	9+12=21
105-এর থেকে ছোটো	21+27=48
115-এর থেকে ছোটো	48+30=78
125-এর থেকে ছোটো	78+17=95
135-এর থেকে ছোটো	95+5=100

$\therefore$ প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা পেলাম,

বুদ্ধ্যাঙ্ক (x_i)	পরিসংখ্যা (f_i)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
75 - 85	9	9
85 - 95	12	21
95 - 105	27	48
105 - 115	30	78
115 - 125	17	95
125 - 135	5	100=n

এখানে, মোট পরিসংখ্যা $=n=100$

আমরা প্রথমে উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের কোন শ্রেণিতে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{n}{2}$-এর সমান বা বড়ো হবে দেখি।

$$\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

∴ 105-115 শ্রেণিটির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 78 যা 50 অপেক্ষা ঠিক বেশি।

(21) কিন্তু এই 105-115 শ্রেণিটিকে উপরের পরিসংখ্যা বিভাজনের কী বলা হয়?

105-115 শ্রেণিটি প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের **মধ্যমা শ্রেণি (Median Class)**।

কিন্তু প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে তথ্যটির মধ্যমা কীভাবে নির্ণয় করব?

মধ্যমা শ্রেণিটি নির্বাচনের পরে আমরা নীচের সূত্রটি প্রয়োগ করে মধ্যমা নির্ণয় করব।

$$\text{মধ্যমা} = \ell + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

যেখানে, ℓ = মধ্যমা শ্রেণির নিম্ন শ্রেনি-সীমানা, n = পর্যবেক্ষণ সংখ্যা, f = মধ্যমা শ্রেণির পরিসংখ্যা

cf = মধ্যমা শ্রেণির ঠিক আগের শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা, h = মধ্যমা শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য

বুঝেছি, নির্ণেয় মধ্যমা $= \ell + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$ [এখানে, ℓ=105, n=100, cf=48, f=30, h=10]

$$= 105 + \left[\frac{\frac{100}{2} - 48}{30}\right] \times 10$$

$$= 105 + \frac{50-48}{30} \times 10$$

$$= 105 + 0.66 = 105.66$$

বুঝেছি, অর্ধেক সংখ্যক শিক্ষার্থীর বুদ্ধ্যাঙ্ক 105.66-এর কম এবং অর্ধেক সংখ্যক শিক্ষার্থীর বুদ্ধ্যাঙ্ক 105.66-এর বেশি।

প্রয়োগ : 20. আমাদের গ্রামের 45 জন ছাত্রীদের হাতের কাজের উপরে কিছু নম্বর দেওয়া হয়েছে। সেই নম্বরের তালিকাটি নীচের ছকে লিখলাম।

নম্বর (x_i)	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
ছাত্রী সংখ্যা (f_i)	4	5	7	8	7	5	6	3

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা নির্ণয় করি।

প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের শ্রেণিগুলি শ্রেণি অন্তর্ভুক্ত গঠনে আছে।

∴ প্রথমে ছকটি শ্রেণি বহির্ভূত গঠনে লিখি এবং ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা লিখি।

নম্বর (x_i)	–0.5-4.5	4.5-9.5	9.5-14.5	14.5-19.5	19.5-24.5	24.5-29.5	29.5-34.5	34.5-39.5
ছাত্রী সংখ্যা (f_i)	4	5	7	8	7	5	6	3
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)	4	9	16	24	31	36	42	45=n

এখানে $n=45$, $\therefore \frac{n}{2}=22.5$

22.5 -এর থেকে ঠিক বেশি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 24 এবং অনুরূপ শ্রেণি (14.5-19.5)

$\therefore$ মধ্যমা শ্রেণি (Median class) = (14.5 - 19.5)

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= \ell + \left[\frac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right] \times h$ [এখানে, $\ell=14.5, n=45, f=8, cf=16, h=5$]

$= 14.5 + \left[\frac{\frac{45}{2}-16}{8}\right] \times 5$

$= 14.5 + 4.06$

$= 18.56$

$\therefore$ অর্ধেক সংখ্যক ছাত্রী 18.56-এর কম নম্বর পেয়েছে এবং অর্ধেক সংখ্যাক ছাত্রী 18.56-এর বেশি নম্বর পেয়েছে।

প্রয়োগ : 21. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক দেখি এবং মধ্যমা নির্ণয় করি : **[নিজে করি]**

শ্রেণি অন্তর	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
পরিসংখ্যা	8	10	24	16	15	7

প্রয়োগ : 22. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে তথ্যটির মধ্যমা নির্ণয় করি :

প্রাপ্ত নম্বর	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম
শিক্ষার্থী সংখ্যা	8	15	29	42	60	70

প্রদত্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ছক থেকে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি পাই,

প্রাপ্ত নম্বর (x_i)	পরিসংখ্যা (f_i) [শিক্ষার্থীর সংখ্যা]	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
10-এর কম	8	8
10 - 20	7	15
20 - 30	14	29
30 - 40	13	42
40 - 50	18	60
50 - 60	10	70=n

$n=70$, $\therefore \frac{n}{2}=35$

35-এর থেকে ঠিক বেশি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (30-40) শ্রেণির মধ্যে আছে।

সুতরাং, মধ্যমা শ্রেণিটি হলো (30-40)

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= \ell + \left[\frac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right] \times h$ [এখানে, $\ell=30, n=70, cf=\boxed{}, f=13, h=10$]

$= \boxed{}$ [নিজে করি]

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা 34.6

প্রয়োগ : 23. নীচের তথ্যের মধ্যমা 525 হলে, x ও y-এর মান নির্ণয় করি, যখন পরিসংখ্যার সমষ্টি 100

শ্রেণি অন্তর	পরিসংখ্যা
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

প্রদত্ত তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক) বিভাজন তালিকা তৈরি করি—

শ্রেণি অন্তর	পরিসংখ্যা (f_i)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	7 + x
300 - 400	12	19 + x
400 - 500	17	36 + x
500 - 600	20	56 + x
600 - 700	y	56 + x + y
700 - 800	9	65 + x + y
800 - 900	7	72 + x + y
900 - 1000	4	76 + x + y = n

যেহেতু $n=100$, সুতরাং $76+x+y=100$ $\therefore x+y=24$ ——— (i)

আবার , মধ্যমা = 525

$\therefore$ মধ্যমার শ্রেণিটি 500-600

$\therefore 525 = \ell + \left[\dfrac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right] \times h$ $[\ell=500, n=100, cf=36+x, f=20, h=100]$

বা, $525 = 500 + \left[\dfrac{50-(36+x)}{20}\right] \times 100$

বা, $525 - 500 = (14-x)5$

বা, $5(14-x) = 25$

বা, $14-x = 5$ $\therefore x = 9$

(i) থেকে পাই, $x+y=24$

বা, $y = 24-x = 24-9 = 15$ $\therefore x = 9$ এবং $y = 15$

প্রয়োগ : 24. যদি নীচের তথ্যের মধ্যমা 28.5 হয়, এবং পরিসংখ্যার সমষ্টি 60 হয়, তাহলে x ও y-এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

শ্রেণি অন্তর	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
পরিসংখ্যা	5	x	20	15	y	5

প্রয়োগ : 25. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা নির্ণয় করি।

প্রাপ্ত নম্বর	0-10	10-30	30-60	60-70	70-90
ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	15	25	30	4	10

প্রাপ্ত নম্বর (x_i)	ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
0 - 10	15	15
10 - 30	25	15+25 = 40
30 - 60	30	40+30 = 70
60 - 70	4	70+4 = 74
70 - 90	10	74+10 = 84 = n

$n = 84, \quad \therefore \frac{n}{2} = 42$

42-এর থেকে ঠিক বেশি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (30-60) শ্রেণির মধ্যে আছে।

কিন্তু এখানে দেখছি সব শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য সমান নয়। তাহলে শ্রেণি দৈর্ঘ্য কত নেব?

যেহেতু, h= মধ্যমা শ্রেণির দৈর্ঘ্য, তাই সব শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য সমান না হলেও মধ্যমা শ্রেণির দৈর্ঘ্য নেব।

$\therefore$ মধ্যমা $= \ell + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h \quad [\because \ell = 30, \frac{n}{2} = 42, cf = 40, f = 30, h = 30]$

$= 30 + \left[\frac{42-40}{30}\right] \times 30 \quad = 30 + 2 \quad = 32$ নম্বর

অর্থাৎ, অর্ধেক সংখ্যক ছাত্র-ছাত্রী 32-এর কম নম্বর পেয়েছে এবং অর্ধেক সংখ্যক ছাত্র-ছাত্রী 32-এর বেশি নম্বর পেয়েছে।

কষে দেখি 26.2

1. মধুবাবুর দোকানের গত সপ্তাহের প্রতিদিনের বিক্রয়লব্ধ অর্থ (টাকায়) হলো, 107, 210, 92, 52, 113, 75, 195; বিক্রয়লব্ধ অর্থের মধ্যমা নির্ণয় করি।
2. কিছু পশুর বয়স (বছরে) হলো, 6, 10, 5, 4, 9, 11, 20, 18; বয়সের মধ্যমা নির্ণয় করি।
3. 14 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর হলো, 42, 51, 56, 45, 62, 59, 50, 52, 55, 64, 45, 54, 58, 60; প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যমা নির্ণয় করি।
4. আজ পাড়ার ক্রিকেট খেলায় আমাদের স্কোর হলো,

   7 9 10 11 11 8 7 7 10 6 9
   7 9 9 6 6 8 8 9 8 7 8

   ক্রিকেট খেলায় আমাদের স্কোরের মধ্যমা নির্ণয় করি।
5. নীচের 70 জন ছাত্রের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে ওজনের মধ্যমা নির্ণয় করি।

ওজন (কিগ্রা.)	43	44	45	46	47	48	49	50
ছাত্র সংখ্যা	4	6	8	14	12	10	11	5

6. নলের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের (মিমি.) পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে ব্যাসের দৈর্ঘের মধ্যমা নির্ণয় করি।

ব্যাসের দৈর্ঘ্য (মিমি.)	18	19	20	21	22	23	24	25
পরিসংখ্যা	3	4	10	15	25	13	6	4

7. মধ্যমা নির্ণয় করি :

x	0	1	2	3	4	5	6
f	7	44	35	16	9	4	1

8. আমাদের 40 জন শিক্ষার্থীর প্রতি সপ্তাহে টিফিন খরচের (টাকায়) পরিসংখ্যা হলো,

টিফিন খরচ (টাকায়)	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
শিক্ষার্থী	3	5	6	9	7	8	2

টিফিন খরচের মধ্যমা নির্ণয় করি।

9. নীচের তথ্য থেকে ছাত্রদের উচ্চতার মধ্যমা নির্ণয় করি :

উচ্চতা (সেমি.)	135-140	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165	165-170
ছাত্রদের সংখ্যা	6	10	19	22	20	16	7

10. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে তথ্যটির মধ্যমা নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমানা	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
পরিসংখ্যা	4	7	10	15	10	8	5

11. নীচের তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমানা	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
পরিসংখ্যা	5	6	15	10	5	4	3	2

12. নীচের তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমা	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35
পরিসংখ্যা	2	3	6	7	5	4	3

13. নীচের তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমা	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100	101-110
পরিসংখ্যা	4	10	15	20	15	4

14. নীচের তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি :

নম্বর	ছাত্রীদের সংখ্যা
10-এর কম	12
20-এর কম	22
30-এর কম	40
40-এর কম	60
50-এর কম	72
60-এর কম	87
70-এর কম	102
80-এর কম	111
90-এর কম	120

15. নীচের তথ্যের মধ্যমা 32 হলে, x ও y-এর মান নির্ণয় করি যখন পরিসংখ্যার সমষ্টি 100;

শ্রেণি-সীমানা	পরিসংখ্যা
0-10	10
10-20	x
20-30	25
30-40	30
40-50	y
50-60	10

আজ আমাদের স্কুলের বিজ্ঞানের পরীক্ষাগারে অনেকগুলি নানান আকারের গাছের পাতা সংগ্রহ করে আনা হয়েছে। আমাদের দাদা ও দিদিরা সেই পাতাগুলি পর্যবেক্ষণ করবে।

আমরা কিছু বন্ধুরা ঠিক করেছি ওই পরীক্ষাগারের কিছু গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মেপে গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করব।

গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি হলো,

গাছের পাতার দৈর্ঘ্য (মিমি.) (প্রায়)	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190
পাতার সংখ্যা	4	6	10	14	6	6	4

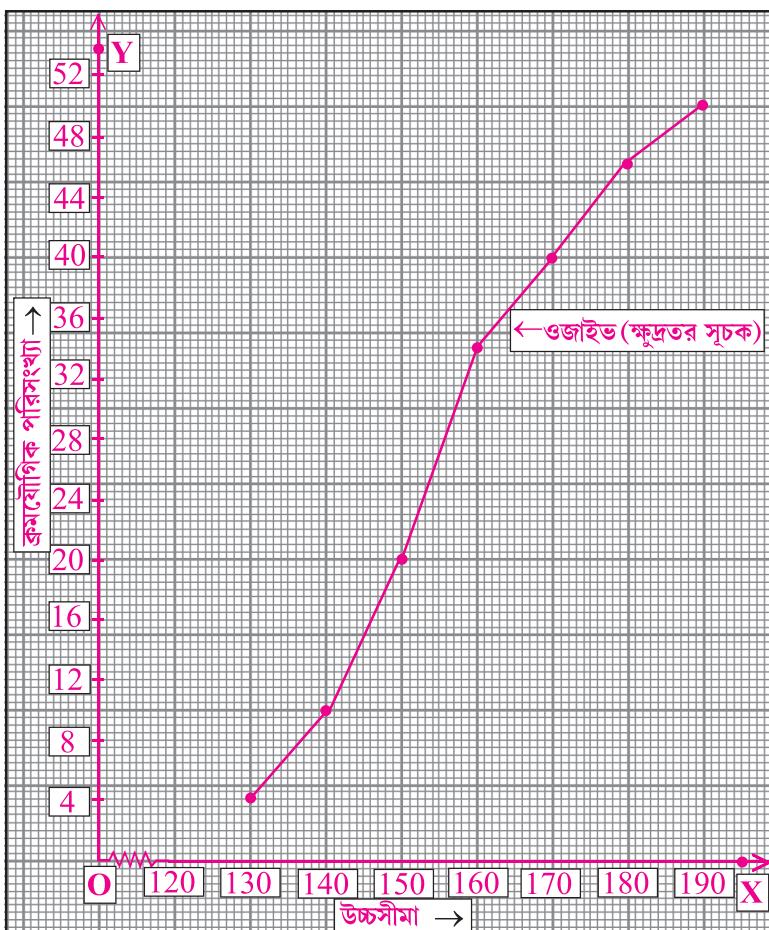
আমি গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মিমি. (প্রায়) (x_i)	ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
130-এর কম	4
140-এর কম	10
150-এর কম	20
160-এর কম	34
170-এর কম	40
180-এর কম	46
190-এর কম	50

উপরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার ছক থেকে দেখছি 130, 140, 150, ... 190 যথাক্রমে শ্রেণি-সীমাগুলির উচ্চসীমা।

কিন্তু উপরের ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ছকটির লেখচিত্র অঙ্কন কি সম্ভব?

উভয় অক্ষের একটি নির্দিষ্ট স্কেল ধরে প্রতিটি শ্রেণির উচ্চসীমাকে অনুভূমিক রেখা অর্থাৎ x-অক্ষ বরাবর এবং তাদের অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাকে উল্লম্ব রেখা বা y-অক্ষ বরাবর নির্দেশ করা হয়। তবে উভয় অক্ষের মাপের স্কেল প্রয়োজনে আলাদাও নেওয়া যায়।

বুঝেছি, উপরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের (130, 4), (140, 10), (150, 20), (160, 34), (170, 40), (180, 46), (190, 50) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে স্কেল ছাড়া খালি হাতে (free hand) বিন্দুগুলি যুক্ত করে কী পাই দেখি। x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 মিমি. এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 টি গাছের পাতা ধরে বিন্দুগুলি স্থাপন করলাম এবং বিন্দুগুলি যুক্ত করে একটি বক্ররেখা পেলাম।

22 এইভাবে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার যে লেখচিত্র পেলাম তাকে কী বলা হয়?

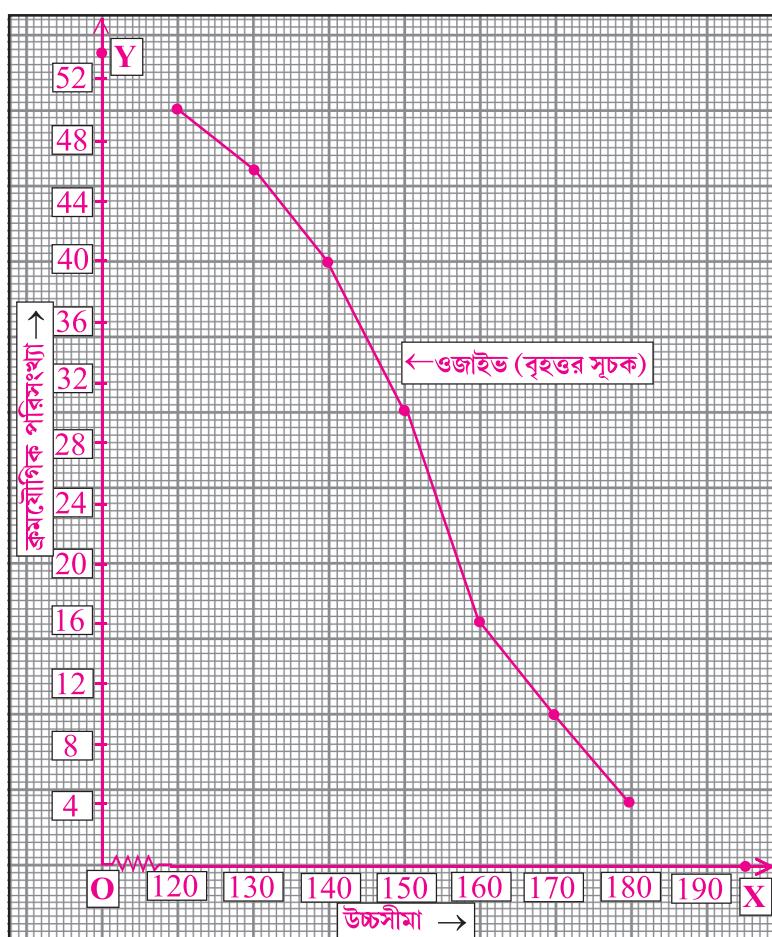
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার লেখচিত্র বক্ররেখাকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার বক্ররেখা (Cumulative frequency curve) বা ওজাইভ (ক্ষুদ্রতর সূচক) (Ogive of the Less than type) বলা হয়।

গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নির্ণয় করি।

গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মিমি. (প্রায়) (x_i)	বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
120 বা 120-এর বেশি	50
130 বা 130-এর বেশি	46
140 বা 140-এর বেশি	40
150 বা 150-এর বেশি	30
160 বা 160-এর বেশি	16
170 বা 170-এর বেশি	10
180 বা 180-এর বেশি	4

বৃহত্তর সূচক যৌগিক পরিসংখ্যার ছক থেকে দেখছি 120, 130, 140, 150, 160, 170 ও 180 যথাক্রমে শ্রেণিগুলির নিম্ন-সীমা।

কিন্তু বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার লেখচিত্র কীভাবে আঁকব?

উভয় অক্ষের একটি নির্দিষ্ট স্কেল ধরে প্রতিটি শ্রেণির নিম্ন-সীমাকে অনুভূমিক রেখা অর্থাৎ x-অক্ষ বরাবর এবং তাদের অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাকে উল্লম্ব রেখা বা y-অক্ষ বরাবর নির্দেশ করা হয়। [এক্ষেত্রেও উভয় অক্ষের পরিমাপের স্কেল আলাদাও নেওয়া যায়]

আমি উপরের বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার লেখচিত্র অঙ্কনের চেষ্টা করি ও কী পাই দেখি।

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 মিমি. এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2টি বাহুর দৈর্ঘ্য = গাছের 1টি পাতা ধরে (120, 50), (130, 46), (140, 40), (150, 30), (160, 16), (170, 10) ও (180, 4) বিন্দুগুলি স্থাপন করে ও যুক্ত করে একটি বক্ররেখা পেলাম।

প্রাপ্ত বক্ররেখাটি বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার বক্ররেখা [Cumulative frequency curve (of more than type)] বা ওজাইভ (বৃহত্তর সূচক) [Ogive (of more than type)]

দেখছি, দুই ধরনের ওজাইভ একই তথ্যের পরিসংখ্যা বিভাজনকে বোঝাচ্ছে।

কিন্তু যে-কোনো একটি ওজাইভ থেকে মধ্যমার মান পাব কিনা দেখি।

গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মিমি. (প্রায়)	ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
130-এর কম	4
140-এর কম	10
150-এর কম	20
160-এর কম	34
170-এর কম	40
180-এর কম	46
190-এর কম	50

এখানে পাতার সংখ্যা n = 50

$\therefore \frac{n}{2} = 25$

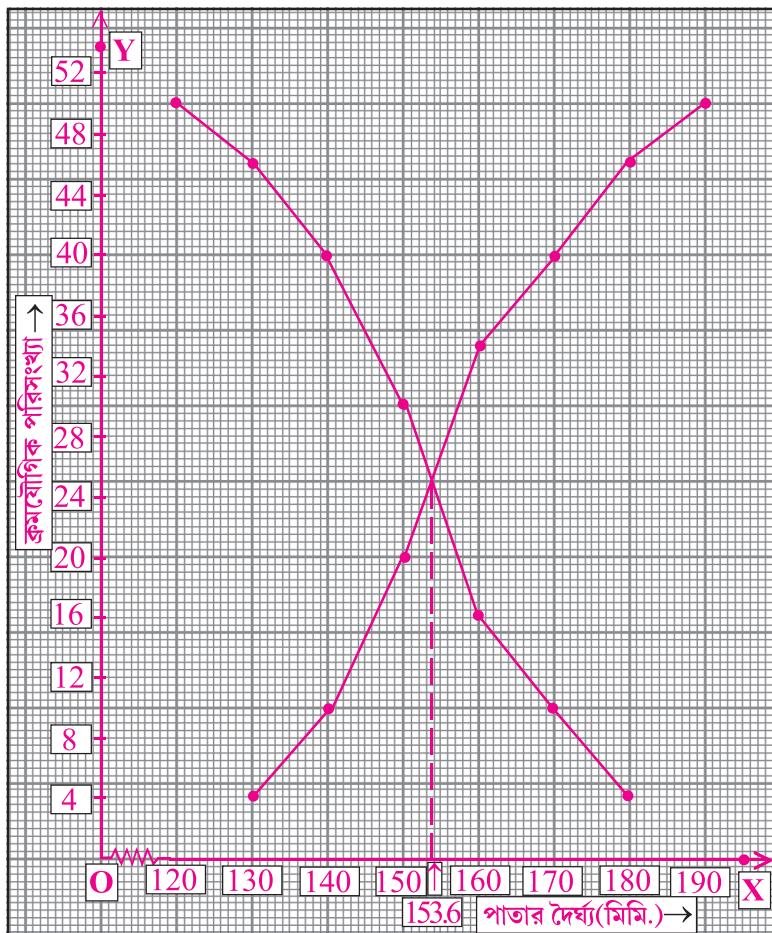
$\therefore$ ওজাইভের (ক্ষুদ্রতর সূচক) y-অক্ষে (0, 25) বিন্দুটি নির্ণয় করে ওই বিন্দু দিয়ে x-অক্ষের একটি সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যা ওজাইভকে P বিন্দুতে ছেদ করল।

P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল।

এই M বিন্দুর ভূজের মানই নির্ণেয় মধ্যমা।

$\therefore$ মধ্যমা = 153.6 মিমি.

আমার বন্ধু আনোয়ারা তার খাতায় একই ছক কাগজে গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যার দুই ধরনের ওজাইভ এঁকেছে।

কিন্তু আনোয়ারার আঁকা দুই ধরনের ওজাইভ থেকে মধ্যমার মান কীভাবে পাব?

ওজাইভ দুটির ছেদবিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর লম্ব টানলে, x অক্ষ ও লম্বের ছেদবিন্দুর ভুজই হলো মধ্যমা।

দেখছি, দুই ধরনের ওজাইভ দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল।

M বিন্দুর ভূজ 153.6 মিমি.(প্রায়) হলো মধ্যমা।

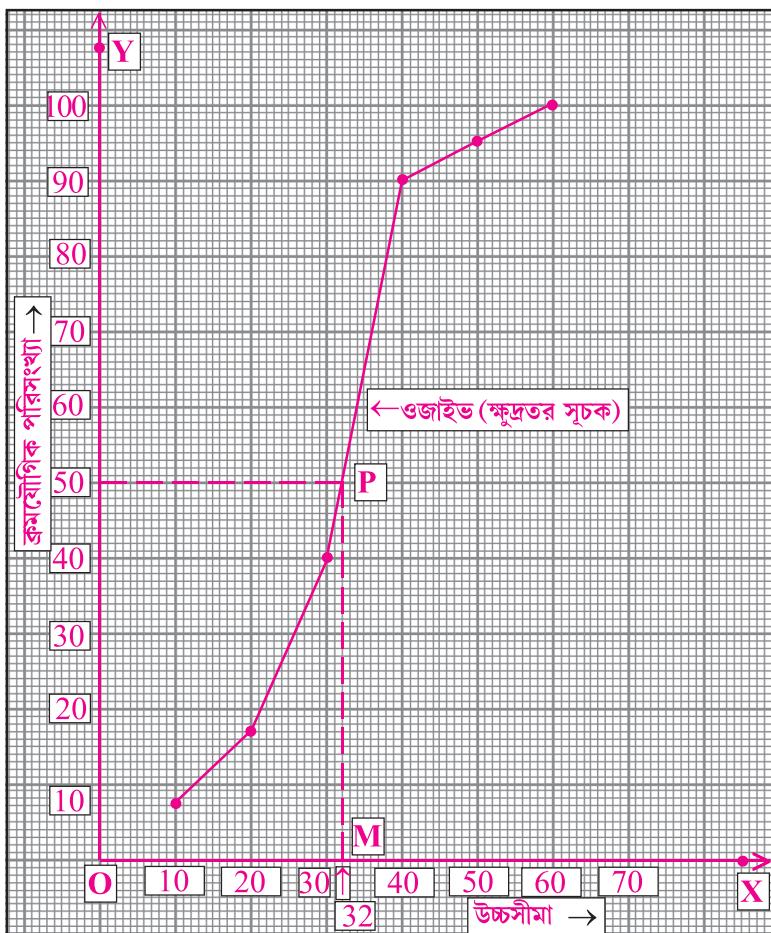
প্রয়োগ : 26. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের ওজাইভ অঙ্কন করি এবং সেই ওজাইভ থেকে মধ্যমা নির্ণয় করি।

শ্রেণি	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
পরিসংখ্যা	7	10	23	50	6	4

প্রথমে ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার ছক তৈরি করি।

শ্রেণি	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম
ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	7	17	40	90	96	100

ছক কাগজের x অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক এবং y-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (10, 7), (20, 17), (30, 40), (40, 90) (50, 96) এবং (60, 100) বিন্দুগুলি স্থাপন করে যুক্ত করলাম এবং নির্ণেয় ওজাইভ (ক্ষুদ্রতর সূচক) পেলাম। এখানে মোট পরিসংখ্যা (n) = 100

$\therefore \frac{n}{2} = 50$

$\therefore$ y-অক্ষের (0, 50) বিন্দু দিয়ে x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা ওজাইভকে P বিন্দুতে ছেদ করল।
P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল।
দেখছি, M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (32, 0)
$\therefore$ ওজাইভ থেকে পেলাম, মধ্যমা = 32

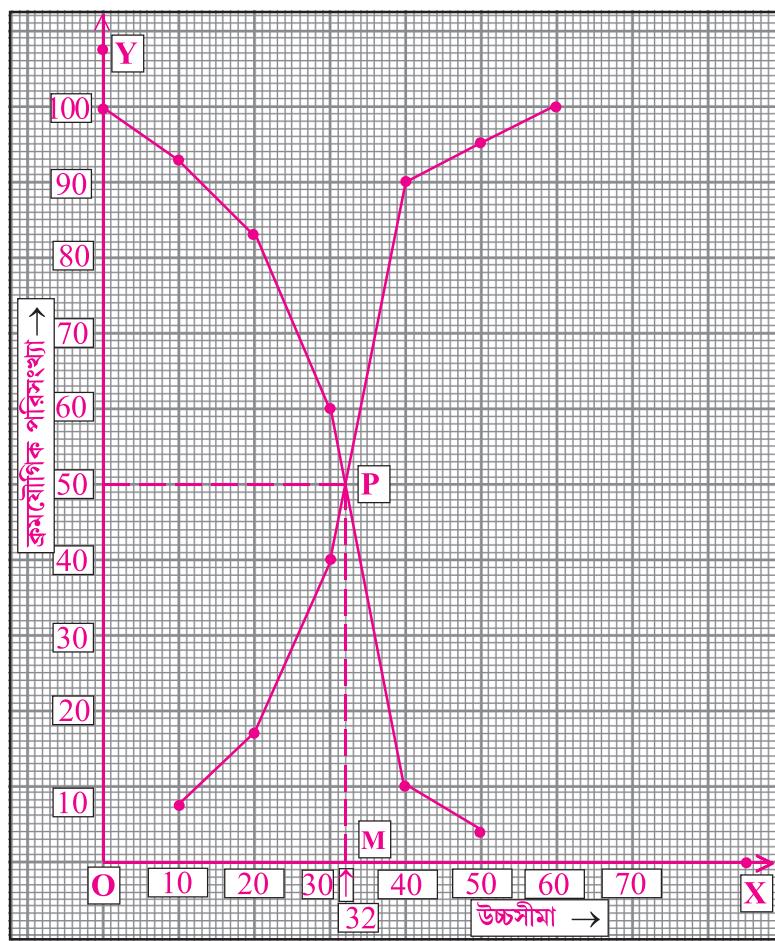
অন্যভাবে : প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ও বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার ছক তৈরি করি।

শ্রেণি	পরিসংখ্যা
0-10	7
10-20	10
20-30	23
30-40	50
40-50	6
50-60	4

শ্রেণি	বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 বা 0-এর বেশি	100
10 বা 10-এর বেশি	93
20 বা 20-এর বেশি	83
30 বা 30-এর বেশি	60
40 বা 40-এর বেশি	10
50 বা 50-এর বেশি	4

শ্রেণি	ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
10-এর কম	7
20-এর কম	17
30-এর কম	40
40-এর কম	90
50-এর কম	96
60-এর কম	100

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে, বৃহত্তর সূচক ও ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ অঙ্কন করলাম।

[বৃহত্তর সূচক ওজাইভ অঙ্কনের জন্য (0, 100), (10, 93), (20, 83), (30, 60), (40, 10), (50, 4) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে যুক্ত করলাম]

বৃহত্তর সূচক ওজাইভ ও ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল।

দেখছি, M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (32, 0)

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = 32

সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করে যাচাই করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 27. একটি মেডিকেলের প্রবেশিকা পরীক্ষায় 200 জন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি হলো,

প্রাপ্ত নম্বর	400-450	450-500	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
পরীক্ষার্থীর সংখ্যা	20	30	28	26	24	22	18	32

ওজাইভ অঙ্কন করি ও তার সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করি। সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করে যাচাই করি।

প্রথমে প্রদত্ত তথ্যের ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি নির্ণয় করি।

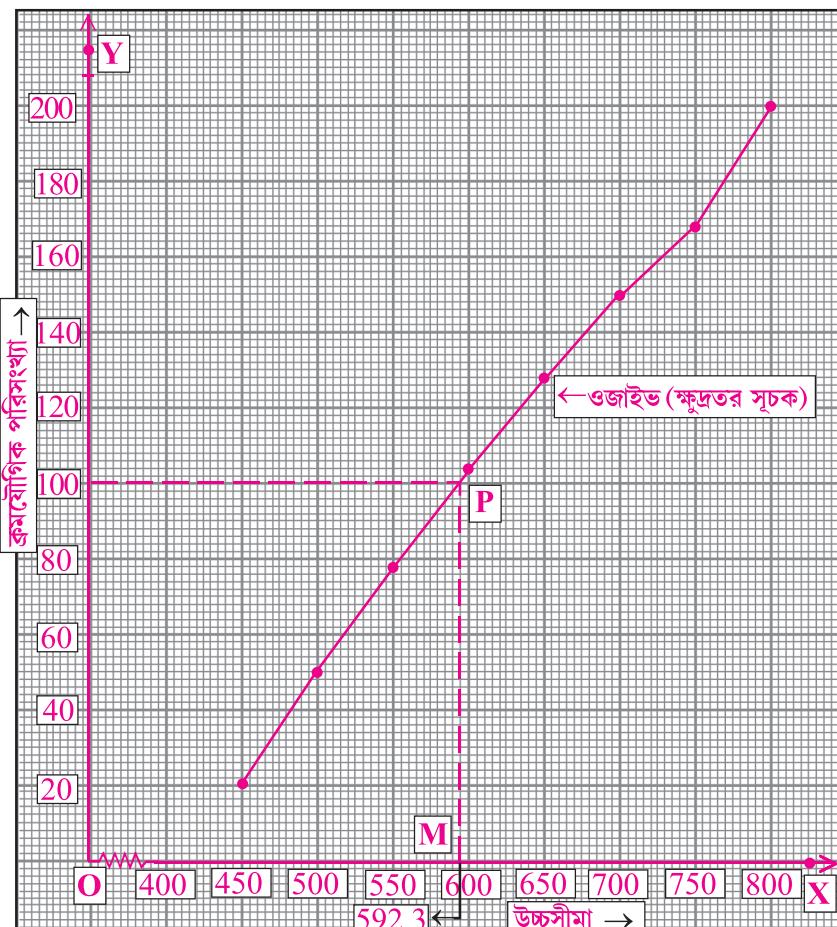
প্রাপ্ত নম্বর	450-এর কম	500-এর কম	550-এর কম	600-এর কম	650-এর কম	700-এর কম	750-এর কম	800-এর কম
ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	20	50	78	104	128	150	168	200

x-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 5 নম্বর এবং y অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 জন পরীক্ষার্থী ধরে (450, 20), (500, 50), (550,78), (600,104), (650,128),(700,150), (750, 168) ও (800,200) বিন্দুগুলি স্থাপন করে ও যুক্ত করে ওজাইভ (ক্ষুদ্রতর সূচক) পেলাম।

এখানে মোট পরীক্ষার্থী (n) = 200 জন

$\therefore \frac{n}{2} = 100$

$\therefore$ (0, 100) বিন্দু দিয়ে x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা ওজাইভকে P বিন্দুতে ছেদ করল। P বিন্দু থেকে OX-এর উপর PM লম্ব টানি যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করে। M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (592.3)

$\therefore$ মধ্যমা = 592.3

আমি অন্যভাবে বৃহত্তর সূচক ওজাইভ ও ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ এঁকে ও তাদের ছেদবিন্দুর সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করি। [নিজে করি]

সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা,

$$\text{মধ্যমা} = \ell + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 550 + \frac{100-78}{26} \times 50$$

$$= 550 + \frac{22 \times 50}{26}$$

$$= 550 + \frac{550}{13} = 550 + 42.3 = 592.3$$

প্রয়োগ : 28. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার বৃহত্তর সূচক ও ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ অঙ্কন করি ও মধ্যমা নির্ণয় করি। [নিজে করি]

শ্রেণি	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85
পরিসংখ্যা	2	8	12	24	34	16	4

কষে দেখি 26.3

1. আমাদের গ্রামের 100 টি দোকানের দৈনিক লাভের (টাকায়) পরিমাণের ছকটি হলো,

প্রতি দোকানের লাভ (টাকায়)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
দোকানের সংখ্যা	10	16	28	22	18	6

প্রদত্ত তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক) তালিকা তৈরি করে ছক কাগজে ওজাইভ অঙ্কন করি।

2. নিবেদিতাদের ক্লাসের 35 জন শিক্ষার্থীর ওজনের তথ্য হলো,

ওজন (কিগ্রা)	38-এর কম	40-এর কম	42-এর কম	44-এর কম	46-এর কম	48-এর কম	50-এর কম	52-এর কম
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	0	4	6	9	12	28	32	35

প্রদত্ত তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক) তালিকা তৈরি করে ছক কাগজে ওজাইভ অঙ্কন করি এবং লেখচিত্র থেকে মধ্যমা নির্ণয় করি। সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করে যাচাই করি।

3.

শ্রেণি	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
পরিসংখ্যা	4	10	15	8	3	5

প্রদত্ত তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (বৃহত্তর সূচক) তালিকা তৈরি করে ছক কাগজে ওজাইভ অঙ্কন করি।

4.

শ্রেণি	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
পরিসংখ্যা	12	14	8	6	10

প্রদত্ত তথ্যের একই অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ ও বৃহত্তর সূচক ওজাইভ ছক কাগজে অঙ্কন করে মধ্যমা নির্ণয় করি।

আজ 5 সেপ্টেম্বর অর্থাৎ শিক্ষকদিবস। প্রতি বছরের মতো এই বছরেও আমরা দিনটি বিশেষভাবে পালন করব। এবছরে আমরা দশম শ্রেণির ছাত্রছাত্রীরা ঠিক করেছি যে, আমাদের পারকরে আসা শ্রেণিগুলির ছাত্রছাত্রীদের কাছে যাব ও শিক্ষক-শিক্ষিকাদের উপস্থিতিতে ওদের ক্লাস নেব। অর্থাৎ গান, নাচ, আবৃত্তি, আঁকা, অভিনয়, কুইজ ইত্যাদি বিভিন্ন মজার খেলার মাধ্যমে দিনটি আনন্দে কাটাব।

আমরা ষষ্ঠ শ্রেণির 36 জন ছাত্রছাত্রীদের সমান তিনটি দলে ভাগ করে প্রথম দলের প্রত্যেককে 10 টি মজার ধাঁধার উত্তর লিখতে বললাম।

23 প্রথম দলের 12 জনের প্রত্যেকে যতগুলি সঠিক উত্তর লিখল দেখি।

প্রথম দলের প্রত্যেকে যতগুলি সঠিক উত্তর দিয়েছে তার সংখ্যা হলো,

4, 6, 5, 4, 7, 2, 3, 4, 2, 4, 5, 4

উপরের সঠিক উত্তরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক গঠন করি,

সঠিক উত্তরের সংখ্যা (x_i)	2	3	4	5	6	7
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা (f_i)	2	1	5	2	1	1

উপরের ছক থেকে দেখছি, "4টি সঠিক উত্তর দিয়েছে" — এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা সবচেয়ে বেশি। অর্থাৎ, 4-এর পরিসংখ্যা সবচেয়ে বেশি।

24 উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে যে পর্যবেক্ষণটি সবচেয়ে বেশি বার আছে অর্থাৎ যে পর্যবেক্ষণটির সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা সেই পর্যবেক্ষণটিকে কী বলা হয়?

কোনো তথ্যের মধ্যে যে পর্যবেক্ষণটির পরিসংখ্যা সবচেয়ে বেশি সেই পর্যবেক্ষণটিকে ওই তথ্যের ভুয়িষ্ঠক বা সংখ্যাগুরুমান (Mode) বলা হয়।

সংখ্যাগুরুমান মধ্যগামিতার আর একটি মাপক। এটি খুব সহজে পরিমাপ করা যায়। জামা, জুতো ইত্যাদির দোকানে সাধারণত সংখ্যাগুরুমান ব্যবহার করা হয়। কারণ বেশির ভাগ জনসাধারণের চাহিদা অনুযায়ী জামা, কাপড় ও জুতো তৈরি করা হয়। যেমন একটি বিশেষ কোম্পানির ক্ষেত্রে মেয়েদের জুতোর সাইজ 5 এর চাহিদা বেশি। অর্থাৎ উপরের তালিকা থেকে বুঝলাম 4 হল প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরু মান।

ষষ্ঠ শ্রেণির দ্বিতীয় দলের 12 জন ছাত্রছাত্রীকে অন্য 10টি মজার ধাঁধা দিলাম। তাদের সঠিক উত্তরের সংখ্যা হলো,

2, 4, 3, 5, 2, 5, 8, 2, 5, 9, 5, 2

আমি উপরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

সঠিক উত্তরের সংখ্যা (x_i)	2	3	4	5	8	9
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা (f_i)	4	1	1	4	1	1

উপরের ছক থেকে দেখছি, 2 টি সঠিক উত্তর দিয়েছে 4 জন ছাত্রছাত্রী। এবং 5 টি সঠিক উত্তর দিয়েছে 4 জন ছাত্রছাত্রী।

25 কিন্তু এক্ষেত্রে প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান কী হবে?

প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 2 টি।

∴ সংখ্যাগুরুমান 2 ও 5

26 কিন্তু যে সকল তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 2 টি, তাদের কী বলা হয়?

যে তথ্যের সংখ্যাগুরু মান 1 টি তাকে এক ভুয়িষ্ঠক বা এক সংখ্যাগুরুমান সংবলিত (Unimodal) এবং যে তথ্যের সংখ্যাগুরু মান 2টি তাকে দ্বি-ভুয়িষ্ঠক বা দুই সংখ্যাগুরুমান সংবলিত (Bimodal) তথ্য বলা হয়।

ষষ্ঠ শ্রেণির তৃতীয় দলের 12 জন ছাত্রছাত্রী অন্য 10 টি মজার ধাঁধাঁর যতগুলি সঠিক উত্তর দিল সেই সংখ্যাগুলি হলো,

4, 5, 6, 7, 6, 7, 5, 4, 5, 4, 6, 7

আমি উপরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করি।

সঠিক উত্তরের সংখ্যা (x_i)	4	5	6	7
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা (f_i)	3	3	3	3

উপরের ছকে 4, 5, 6 ও 7 প্রত্যেকে 3 বার করে আছে।

∴ প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 4, 5, 6 ও 7; এক্ষেত্রে তথ্যের সবকটি সংখ্যাই সংখ্যাগুরুমান, সুতরাং, বলা হয়ে থাকে প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান নেই।

অর্থাৎ তথ্যটি চতুর্ভুয়িষ্ঠক (Tetramodal)। সুতরাং কোনো তথ্যের অনেকগুলি পর্যবেক্ষণের সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা সমান হলে, সেই তথ্যটিকে বহুভুয়িষ্ঠক (Multimodal) তথ্য বলে।

প্রয়োগ : 29. দিনের শেষে আমরা 10 জন বন্ধু সামান্য কিছু খাওয়া দাওয়া করার জন্য নিজেদের মধ্যে চাঁদা তুললাম। আমরা দিলাম,

16 টাকা, 15 টাকা, 11 টাকা, 12 টাকা, 15 টাকা, 10 টাকা, 15 টাকা, 10 টাকা, 15 টাকা, 10 টাকা

আমাদের চাঁদা (টাকায়) দেওয়ার তথ্যটি মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

10, 10, 10, 11, 12, 15, 15, 15, 15, 16

∴ প্রদত্ত তথ্যে সবচেয়ে বেশিবার আছে (অর্থাৎ সবচেয়ে বেশি পরিসংখ্যা) ☐ **[নিজে লিখি]**

∴ প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 15.

প্রয়োগ : 30. আমি নীচের তথ্যগুলির সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

(i) 2, 3, 5, 6, 2, 4, 2, 8, 9, 4, 5, 4, 7, 4, 4

(ii) 11, 27, 18, 26, 13, 12, 9, 15, 4, 9

(iii) 102, 104, 117, 102, 118, 104, 120, 104, 122, 102

(iv) 5, 9, 18, 27, 15, 5, 8, 10, 16, 5, 7, 5

(i) প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুলি মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে লিখে পাই,

2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9

দেখছি, 4 সংখ্যাটি সবচেয়ে বেশিবার আছে।

∴ তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান = 4

(ii), (iii) ও (iv) -এর তথ্যগুলির সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 31. আমাদের শ্রেণির 100 জন ছাত্রছাত্রীর গত মাসে উপস্থিতির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাটি হলো,

উপস্থিতির দিনসংখ্যা	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা	8	28	34	18	12

উপস্থিতির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

27 কিন্তু বিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে শুধুমাত্র পরিসংখ্যা দেখে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে কীভাবে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করব?

বিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার ক্ষেত্রে প্রথমে কোন শ্রেণির পরিসংখ্যা সবচেয়ে বেশি সেটি নির্ণয় করব।

28 যে শ্রেণির পরিসংখ্যা সবচেয়ে বেশি তাকে কী বলা হয়?

সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণি [Modal class] বলা হয়।

বুঝেছি, উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণি (14-18)

29 কিন্তু সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণি নির্ণয়ের সাহায্যে তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান কীভাবে পাব?

তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান ওই সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণির মধ্যেই থাকে এবং নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান পাব নীচের সূত্রের সাহায্যে,

নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান $= \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

এখানে, ℓ = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির নিম্ন সীমানা।

h = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য।

f_1 = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির পরিসংখ্যা।

f_0 = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির ঠিক পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা।

f_2 = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির ঠিক পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা।

বুঝেছি, 100 জন ছাত্রছাত্রীর গতমাসের উপস্থিতির তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান,

$= \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$ [এখানে, $\ell = 14,\ f_1 = 34,\ f_0 = 28,\ f_2 = 18,\ h = 4$]

$= 14 + \left(\frac{34-28}{2\times34-28-18}\right) \times 4$

$= 14 + \frac{6\times4}{22} = 14 + \frac{12}{11} = 15.09$ (দিন)[প্রায়]

কিন্তু আয়তলেখ-এর সাহায্যে উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের থেকে তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান কীভাবে পাব দেখি,

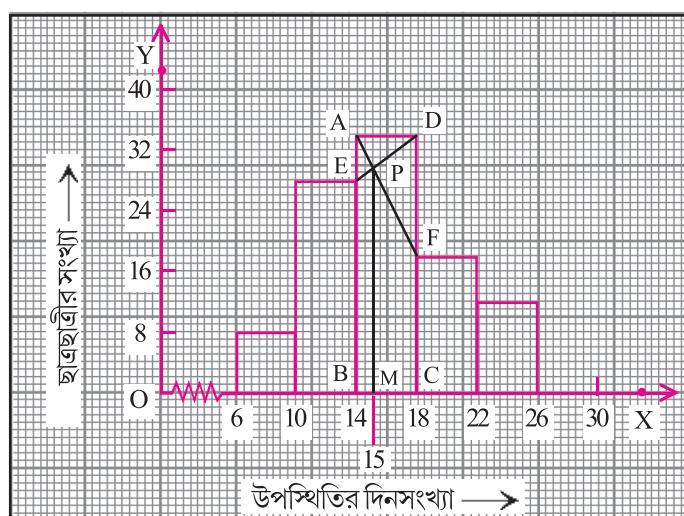
[এটি মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নহে]

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি আয়তলেখের মাধ্যমে প্রথমে প্রকাশ করলাম। সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণির আয়তক্ষেত্র ABCD (পাশের চিত্রে)

AF ও ED যুক্ত করলাম যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করল।

x-অক্ষের উপর P বিন্দু থেকে PM লম্ব অঙ্কন করলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল। M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (15, 0)

∴ নির্ণেয় সংখ্যাগুরু মান = 15 (প্রায়)

∴ আয়তলেখের সাহায্যে উপরের পরিসংখ্যা বিভাজনের দ্বারা প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান প্রায় একই পেলাম।

প্রয়োগ : 32. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের দ্বারা প্রদত্ত তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

দ্রব্যের আকারের নম্বর	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32
পরিসংখ্যা	9	10	18	14	10	6	3

প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে সর্বাধিক পরিসংখ্যা 18

∴ সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণি (12-16)

∴ তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান $= \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$ [এখানে, $\ell = 12,\ h = 4,\ f_1 = 18,\ f_0 = 10,\ f_2 = 14$]

$= 12 + \left(\frac{18-10}{2\times18-10-14}\right) \times 4$

$= 12 + \frac{8}{36-24} \times 4$

$= 12 + \frac{8\times4}{12} \quad = 12 + \frac{8}{3} \quad = 14.66$ নম্বর[প্রায়]

∴ নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান = 14.66 নম্বর[প্রায়]

প্রয়োগ : 33. নীচের শ্রেণি-বিন্যাসিত পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি: [নিজে করি]

শ্রেণি	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
পরিসংখ্যা	2	6	12	24	21	12	3

প্রয়োগ : 34. আমাদের পাড়ার উন্নয়ন কমিটির 200 জন সদস্যদের বয়সের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি হলো,

বয়স (বছরে)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
সদস্য সংখ্যা	30	38	70	42	20

আমি উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের সাহায্যে তথ্যটির যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

বয়স (বছরে)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	পরিসংখ্যা (সদস্য সংখ্যা f_i)	ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	$u_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i u_i$
20 - 30	25	30	30	−2	−60
30 - 40	35	38	68	−1	−38
40 - 50	45	70	138	0	0
50 - 60	55	42	180	1	42
60 - 70	65	20	200	2	40
মোট		$\sum f_i = 200$			$\sum f_i u_i = -16$

ধরি, কল্পিত গড় = 45

নির্ণেয় যৌগিক গড় (Arithmetic Mean) $= A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= \left\{45 + \left(\frac{-16}{200}\right) \times 10\right\}$ বছর

$= \left(45 - \frac{4}{5}\right)$ বছর

$= 44.2$ বছর

$n = 200 \quad \therefore \frac{n}{2} = 100$

$\therefore$ (40-50) শ্রেণির মধ্যে মধ্যমা আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= \ell + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 40 + \frac{\frac{200}{2} - 68}{70} \times 10 = 40 + \frac{32}{7} = 40 + 4.57 = 44.57$ বছর[প্রায়]

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে দেখছি,

সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণি (40-50)

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান $= \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 40 + \frac{70 - 38}{2 \times 70 - 38 - 42} \times 10 = 40 + \frac{32}{60} \times 10 = 45.33$ বছর[প্রায়]

প্রয়োগ : 35. নীচের প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

মান	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম	70-এর কম	80-এর কম
পরিসংখ্যা	4	16	40	76	96	112	120	125

প্রথমে প্রদত্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি থেকে পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

শ্রেণি সীমানা (মান)	পরিসংখ্যা
10 -এর কম	4
10 - 20	$16 - 4 = 12$
20 - 30	$40 - 16 = 24$
30 - 40	$76 - 40 = 36$
40 - 50	$96 - 76 = 20$
50 - 60	$112 - 96 = 16$
60 - 70	$120 - 112 = 8$
70 - 80	$125 - 120 = 5$

সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণিটি হলো (30-40)

$\therefore$ সংখ্যাগুরুমান $= \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 30 + \frac{36 - 24}{2 \times 36 - 24 - 20} \times 10$

$= 30 + \frac{12}{72 - 44} \times 10$

$= 30 + \frac{12}{28} \times 10 = 30 + \frac{30}{7}$

$= 30 + 4.29$

$= 34.29$[প্রায়]

[$\because$ h সংখ্যাগুরু মান সংবলিত শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য, অর্থাৎ সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের সময় সকল শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য সমান নাও হতে পারে। তাই 10-এর কম এই ক্ষেত্রে (0-10) নেওয়া হয় না। 10-এর কমই লেখা হয়।]

মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়।

যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমানের মধ্যে বিশেষ ক্ষেত্রে একটি প্রায়োগিক সম্পর্ক আছে। সেটি হলো,

যৌগিক গড় – সংখ্যাগুরুমান = 3 (যৌগিক গড় – মধ্যমা)

$\therefore$ সংখ্যাগুরুমান = 3 × মধ্যমা – 2 × যৌগিক গড়

কষে দেখি 26.4

1. আমাদের 16 জন বন্ধুর প্রতিদিন স্কুলে যাতায়াত ও অন্যান্য খরচের জন্য প্রাপ্ত টাকার পরিমাণ,
15, 16, 17, 18, 17, 19, 17, 15, 15, 10, 17, 16, 15, 16, 18, 11
আমাদের বন্ধুদের প্রতিদিন পাওয়া অর্থের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

2. নীচে আমাদের শ্রেণির কিছু ছাত্রছাত্রীদের উচ্চতা (সেমি.) হলো,
131, 130, 130, 132, 131, 133, 131, 134, 131, 132, 132, 131, 133,
130, 132, 130, 133, 135, 131, 135, 131, 135, 130, 132, 135, 134, 133
ছাত্রছাত্রীদের উচ্চতার সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

3. নীচের তথ্যের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।
(i) 8, 5, 4, 6, 7, 4, 4, 3, 5, 4, 5, 4, 4, 5, 5, 4, 3,
3, 5, 4, 6, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 2, 3, 4
(ii) 15, 11, 10, 8, 15, 18, 17, 15, 10, 19, 10, 11,
10, 8, 19, 15, 10, 18, 15, 3, 16, 14, 17, 2

4. আমাদের পাড়ার একটি জুতোর দোকানে একটি বিশেষ কোম্পানির জুতো বিক্রির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা হলো,

সাইজ (x_i)	2	3	4	5	6	7	8	9
পরিসংখ্যা (f_i)	3	4	5	3	5	4	3	2

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

5. একটি প্রবেশিকা পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীর বয়সের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

বয়স (বছরে)	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26
পরীক্ষার্থীর সংখ্যা	45	75	38	22	20

6. শ্রেণির একটি পর্যায়ক্রমিক পরীক্ষায় 80 জন ছাত্রছাত্রীর প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা দেখি ও সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

নম্বর	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা	2	6	10	16	22	11	8	5

7. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

শ্রেণি	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
পরিসংখ্যা	5	12	18	28	17	12	8

8. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

শ্রেণি	45-54	55-64	65-74	75-84	85-94	95-104
পরিসংখ্যা	8	13	19	32	12	6

[সংকেত : যেহেতু সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি-সীমানা নেওয়া হয়, তাই শ্রেণি-সীমাকে শ্রেণি-সীমানায় পরিণত করতে হবে।]

9. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) একটি পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা যে লেখচিত্রের সাহায্যে পাওয়া যায় তা হলো, (a) পরিসংখ্যা রেখা (b) পরিসংখ্যা বহুভুজ (c) আয়তলেখ (d) ওজাইভ

(ii) 6, 7, x, 8, y, 14 সংখ্যাগুলির গড় 9 হলে, (a) $x+y=21$ (b) $x+y=19$ (c) $x-y=21$ (d) $x-y=19$

(iii) 30, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40 তথ্যে 35 না থাকলে মধ্যমা বৃদ্ধি পায় (a) 2 (b) 1.5 (c) 1 (d) 0.5

(iv) 16, 15, 17, 16, 15, x, 19, 17, 14 তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 15 হলে x-এর মান (a) 15 (b) 16 (c) 17 (d) 19

(v) ঊর্ধ্বক্রমানুসারে সাজানো 8, 9, 12, 17, x+2, x+4, 30, 31, 34, 39 তথ্যের মধ্যমা 24 হলে, x-এর মান (a) 22 (b) 21 (c) 20 (d) 24

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) 2, 3, 9, 10, 9, 3, 9 তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 10

(ii) 3, 14, 18, 20, 5 তথ্যের মধ্যমা 18

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) যৌগিক গড়, মধ্যমা, সংখ্যাগুরুমান হলো ________ প্রবণতার মাপক।

(ii) $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ এর গড় $\overline{x}$ হলে, $ax_1, ax_2, ax_3 \ldots\ldots ax_n$-এর গড় ________, যেখানে $a \neq 0$

(iii) ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতিতে বিন্যস্ত রাশিতথ্যের যৌগিক গড় নির্ণয়ের সময় সকল শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য ________।

10. **সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :**

(i)

শ্রেণি	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
পরিসংখ্যা	4	15	3	20	14	7	14

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের মধ্যমা শ্রেণির উর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা এবং সংখ্যাগুরুমান শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি-সীমানার অন্তরফল নির্ণয় করি।

(ii) 150 জন অ্যাথলিট 100 মিটার হার্ডল রেস যত সেকেন্ডে সম্পূর্ণ করে তার একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক নীচে দেওয়া আছে।

সময় (সেকেন্ডে)	13.8-14	14-14.2	14.2-14.4	14.4-14.6	14.6-14.8	14.8-15
অ্যাথলিটের সংখ্যা	2	4	5	71	48	20

14.6 সেকেন্ডের কম সময়ে কতজন অ্যাথলিট 100 মিটার দৌড় সম্পন্ন করে নির্ণয় করি।

(iii) একটি পরিসংখ্যা বিভাজনের গড় 8.1, $\sum f_i x_i = 132 + 5k$ এবং $\sum f_i = 20$ হলে, k-এর মান নির্ণয় করি।

(iv) যদি $u_i = \frac{x_i - 25}{10}$, $\sum f_i u_i = 20$ এবং $\sum f_i = 100$ হয়, তাহলে $\overline{x}$-এর মান নির্ণয় করি।

(v)

নম্বর	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা	3	12	27	57	75	80

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে সংখ্যাগুরুমান শ্রেণিটি লিখি।

মিলিয়ে দেখি (Let's Match)

অধ্যায় - 1

নিজে করি :

প্রয়োগ : 1. (iv) দ্বিঘাত সমীকরণ নয়। (v) দ্বিঘাত সমীকরণ নয়।

4. $x^2+2x-24=0$, প্রস্থ = x মিটার

কষে দেখি-1.1 [Page : 4]

1. (i), (iii) 2. (i) 3. x^3 4. (i) 2 (ii) 1 (iii) $2x^2+9=0$ (iv) $6x^2+13x+8=0$; 6, 13, 8

5. (i) $x^2+x-42=0$; যেখানে, x একটি সংখ্যা।

(ii) $x^2-36=0$; যেখানে, $2x-1$ ও $2x+1$ ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যা।

(iii) $x^2+x-156=0$; যেখানে, x ও $x+1$ ক্রমিক সংখ্যা।

6. (i) $x^2+3x-108=0$; যেখানে, প্রস্থ = x মিটার।

(ii) $x^2+4x-320=0$; যেখানে, x কিগ্রা. চিনির মূল্য 80 টাকা।

(iii) $x^2+5x-750=0$; যেখানে, প্রথমে ট্রেনটির সমবেগ x কিমি./ঘন্টা

(iv) $x^2+100x-33600=0$; যেখানে, ক্রয়মূল্য x টাকা।

(v) $5x^2-21x-20=0$; যেখানে, স্থির জলে নৌকার বেগ x কিমি./ঘন্টা

(vi) $x^2-x-6=0$; যেখানে, মহিম একা x ঘন্টায় কাজটি সম্পূর্ণ করে।

(vii) $x^2-5x+6=0$; যেখানে, দশক স্থানীয় অঙ্কটি x

(viii) $2x^2+85x-225=0$; যেখানে রাস্তাটি x মিটার চওড়া।

নিজে করি :

প্রয়োগ : 8. –4 13. $\frac{a+b}{ab}$ ও $\frac{2}{a+b}$ 15. $x=-9$ এবং $x=9$

কষে দেখি-1.2 [Page : 10]

1. (i) না (ii) না (iii) না (iv) হ্যাঁ 2. (i) $-\frac{1}{6}$ (ii) $2a^2$ 3. $a=3, b=-6$

4. (i) $y=-6$ এবং $y=6$ (ii) $x=3$ এবং $x=-3$ (iii) $x=-6$ এবং $x=22$

(iv) $x=-3$ এবং $x=3$ (v) $x=-6$ এবং $x=6$ (vi) $x=-\frac{1}{5}$ এবং $x=\frac{1}{2}$

(vii) $x=\frac{1}{2}$ এবং $x=2$ (viii) $x=0$ এবং $x=\frac{2}{3}$ (ix) $x=-9$ এবং $x=7$

(x) $x=-4$ এবং $x=3$ (xi) $x=-1$ এবং $x=1$ (xii) $x=0$ এবং $x=1$

(xiii) $x=-7$ এবং $x=0$ (xiv) $x=-\frac{68}{9}$ এবং $x=3$ (xv) $x=6$ এবং $x=9$

(xvi) $x=-a$ এবং $x=-b$ (xvii) $x=2a$ এবং $x=3a$ (xviii) $x=-(a+b)$ এবং $x=a$

(xix) $x=-2$ এবং $x=7$ (xx) $x=0$ এবং $x=\frac{2ab-bc-ca}{a+b-2c}$

(xxi) $x=\sqrt{3}$ এবং $x=2$

নিজে করি :

প্রয়োগ : 18. 8 অথবা 9

কষে দেখি-1.3 [Page : 13]

1. 6 এবং 9 **2.** 15 মিটার **3.** 3 **4.** 20 কিমি./ঘন্টা **5.** দৈর্ঘ্য = 50 মিটার, প্রস্থ = 40 মিটার
6. 5 অথবা 9 **7.** 20 মিনিট এবং 25 মিনিট **8.** 6 দিন **9.** 30 টাকা
10. **(A)** (i) b (ii) c (iii) b (iv) a (v) b **(B)** (i) মিথ্যা, (ii) মিথ্যা
(C) (i) রৈখিক (ii) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (iii) 0 ও 6
11. (i) $a = -4$ (ii) 3 (iii) 1 (iv) $\frac{1}{x} - x = \frac{9}{20}$; যেখানে x প্রকৃত ভগ্নাংশ (v) $a=1, b=12$

নিজে করি :

প্রয়োগ : **26.** 11 ও 13 **30.** (v) -1 ও $\frac{1}{2}$ (vi) 1 ও $\frac{7}{2}$ (vii) 1 ও $\sqrt{2}$

কষে দেখি-1.4 [Page : 22]

1. (i) না। যেহেতু একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নয়। (ii) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। (iii) –2
2. (i) -4 ও $\frac{1}{3}$ (ii) -1 ও -1 (iii) $\frac{1}{8}$ ও $\frac{3}{2}$ (iv) -1 ও $\frac{1}{3}$ (v) বাস্তব বীজ নেই।
(vi) $-\frac{1}{2}$ ও $\frac{3}{5}$ (vii) বাস্তব বীজ নেই (viii) $\frac{3-\sqrt{2}}{5}$ ও $\frac{3+\sqrt{2}}{5}$ (ix) $-\frac{7}{8}$ ও $\frac{3}{2}$
3. (i) 10 সেমি., 24 সেমি. ও 26 সেমি. (ii) 3 (iii) 9 মিটার/সেকেন্ড (iv) 9 মিটার (v) 10
(vi) 18 (vii) $1\frac{3}{5}$ কিমি./ঘন্টা (viii) 60 কিমি./ঘন্টা (ix) 80 টাকা

নিজে করি :

প্রয়োগ : **31.** (iv) বাস্তব ও অসমান **33.** $\frac{25}{2}$ **36.** (ii) সমষ্টি = $\frac{9}{4}$, গুণফল = –25 **38.** 3
41. $\frac{3abc-b^3}{c^3}$

কষে দেখি-1.5 [Page : 29]

1. (i) বাস্তব ও অসমান। (ii) বাস্তব ও সমান। (iii) কোনো বাস্তব বীজ নেই। (iv) কোনো বাস্তব বীজ নেই।
2. (i) ± 14 (ii) $\frac{25}{24}$ (iii) 16 (iv) $\frac{9}{8}$ (v) 2 ও $\frac{1}{2}$ (vi) $-\frac{1}{2}$ ও 1
3. (i) $x^2 - 6x + 8 = 0$ (ii) $x^2 + 7x + 12 = 0$ (iii) $x^2 + x - 12 = 0$ (iv) $x^2 - 2x - 15 = 0$
4. –3 **8.** (i) $\frac{34}{25}$ (ii) $-\frac{98}{125}$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{98}{75}$ **10.** $x^2 + px + 1 = 0$ **11.** $x^2 + x + 1 = 0$
12. **(A)** (i) c (ii) c (iii) a (iv) d (v) c **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) 2:3 (ii) a (iii) 0
13. (i) $x^2 - 14x + 24 = 0$ (ii) $-\frac{2}{3}$ (iii) ± 8 (iv) $-\frac{1}{2}$ (v) 12

অধ্যায় - 2

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** 30 টাকা, 81 টাকা **4.** 1200 টাকা **5.** 1500 টাকা, 1700 টাকা
10. 93.75 টাকা, 593.75 টাকা; 0.01 টাকা, 146.01 টাকা; 456.50 টাকা, 5021.50 টাকা
13. 400 টাকা, 7300 টাকা **16.** 840 টাকা, 10,000 টাকা **19.** $3\frac{1}{2}$ বছর, 2 বছর **23.** (i) 5 (ii) 2
26. 400 টাকা, 8 **30.** 90,000 টাকা, 97,500 টাকা **32.** 6087.50 টাকা
34. 3,00,000 টাকা, 2,00,000 টাকা, 1,20,000 টাকা

কষে দেখি-2 [Page : 46]

1. 7200 টাকা **2.** 48 টাকা **3.** 1060 টাকা **4.** 3584 টাকা **5.** 8000 টাকা **6.** 37800 টাকা
7. $16\frac{2}{3}$ বছর **8.** $6\frac{1}{4}$ **9.** 170 টাকা **10.** $6\frac{1}{4}$ **11.** $3\frac{1}{2}$ বছর **12.** 5 বছর **13.** 5000 টাকা, 6
14. 3:4 **15.** $9\frac{1}{2}$ **16.** ব্যাঙ্কে 60000 টাকা এবং পোস্টঅফিসে 40000 টাকা
17. 6000 টাকা এবং 4000 টাকা **18.** 20837.50 টাকা **19.** 9 বছর **20.** 80,000 টাকা এবং 60,000 টাকা
21. **(A)** (i) c (ii) c (iii) b (iv) c (v) b **(B)** (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) উত্তমর্ণ
(ii) $\frac{prt}{100}$ (iii) $12\frac{1}{2}$% **22.** (i) 16 (ii) 24000 টাকা (iii) 8 (iv) $6\frac{2}{3}$ (v) 240 টাকার

অধ্যায় - 3

কষে দেখি-3.1 [Page : 52]

1. AO, CO, PO, QO **2.** (i) অসংখ্য (ii) ব্যাস (iii) বৃত্তাংশে (iv) কেন্দ্র (v) সমান (vi) ব্যাসার্ধ
(vii) বড়ো **4.** (i) সত্য (ii) সত্য (iii) সত্য (iv) সত্য (v) মিথ্যা (vi) মিথ্যা (vii) মিথ্যা (viii) সত্য

নিজে করি :

প্রয়োগ : **6.** 30 সেমি. **8.** 7 সেমি.

কষে দেখি-3.2 [Page : 65]

1. 3 সেমি. **2.** 24 সেমি. **3.** 5.8 সেমি. **4.** 3 সেমি. **5.** 30 সেমি. **6.** 3.25 সেমি. **10.** 13 সেমি.
16. **(A)** (i) c (ii) b (iii) b (iv) a (v) b **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য (iii) মিথ্যা
(C) (i) 1 : 1 (ii) কেন্দ্রগামী **17.** (i) 16 সেমি. (ii) 9.6 সেমি. (iii) 6 সেমি. (iv) 8 সেমি.
(v) 10 সেমি.

অধ্যায় - 4

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** 1440 বর্গ সেমি. **4.** 864 বর্গ সেমি. **7.** 9 মিটার **10.** 640 বর্গ সেমি., কর্ণের দৈর্ঘ্য $8\sqrt{6}$ সেমি.
18. 9 ঘণ্টা

কষে দেখি-4 [Page : 74]

2. তলগুলি — ABCD, EFGH, ADFE, BCGH, ABHE, DCGF,
ধারগুলি — AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, DF, BH, CG.
শীর্ষবিন্দুগুলি — A, B, C, D, E, F, G, H.

3. $5\sqrt{2}$ মিটার **4.** 512 ঘন মিটার **5.** 150 মিটার **6.** 96 বর্গ সেমি. **7.** 125 ঘন সেমি.
8. 216 ঘন সেমি. **9.** 6 সেমি. **10.** 8:1 **11.** 352 বর্গ সেমি. **12.** 200 গ্রাম **13.** 75
14. 75 সেমি. **15.** 18 লিটার **16.** 26.25 ঘন সেমি., 1.5 সেমি. **17.** 2 ডেসিমি. **18.** $1\frac{5}{59}$ মিটার
19. 2 মিটার **20.** দৈর্ঘ্য 20 ডেসিমি. ও প্রস্থ 15 ডেসিমি., রাখা যাবে না, যেহেতু পাত্রের আয়তন
1500 লিটার। **21.** 1 মিটার, 8 ডেসিমি. **22.** 5 ডেসিমি., 775 টাকা 50 পয়সা
23. 7 ঘণ্টা 24 মিনিট, 5 ডেসিমি. **24.** **(A)** (i) b (ii) b (iii) d (iv) c (v) d **(B)** (i) মিথ্যা
(ii) সত্য **(C)** (i) 4টি (ii) $\sqrt{2}$ (iii) ঘনক **25.** (i) 6 (ii) 3.5 (iii) 125 (iv) 6 সেমি.
(v) 96 বর্গ মি.

অধ্যায় - 5

নিজে করি :

প্রয়োগ : **4.** y : x **6.** 14 ও 21 **9.** 1 : $p^2q^2r^2$ **11.** 24 : 35 **13.** 20 : 36 : 45 **17.** 50 : 19 **19.** 247 : 778 **21.** 9

কষে দেখি-5.1 [Page : 82]

1. (i) 2 : 9, লঘু অনুপাত (ii) 3 : 5, লঘু অনুপাত (iii) 1 : 1, সাম্যানুপাত (iv) 20 : 1, গুরু অনুপাত

2. (i) 1000p : q (ii) একই এককে আনলে (iii) সাম্যানুপাত (iv) 1 : abc (v) y^2 : xz (vi) 1 : xyz

3. (i) 36 : 77 (ii) 1 : 1 **4.** (i) 48 : 49 (ii) 16 : 35 (iii) 3 : 4 : 6 (iv) 8 : 12 : 21

5. (i) 9 : 10 (iii) 86 **6.** (i) 40 : 19 (ii) 9 : 4

8. (i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{bm-an}{m-n}$ (iii) 1

নিজে করি :

প্রয়োগ : **25.** সমানুপাত আছে **26.** সমানুপাতে আছে **29.** সমানুপাতী **31.** 84 **33.** 20 **34.** 5 : 10 : : 6 : 12; 6 : 5 : : 12 : 10; 10 : 5 : : 12 : 6 **36.** 3 **38.** না। যেহেতু, 3+10 = 6+7 **40.** 48 টাকা **42.** 16 pq^3 **44.** 1.5 **46.** xyz

কষে দেখি-5.2 [Page : 87]

1. (i) 12 (ii) 75 **2.** (i) $\frac{3}{20}$ (ii) 22.8 কিগ্রা. (iii) $\frac{yz^3}{x}$ (iv) $p^3 + q^3$ **3.** (i) 20 (ii) 1.5 (iii) $\frac{q^2r^2}{p^3}$ (iv) $(x+y)^4(x-y)^2$ **4.** (i) 20 (ii) 4.5 (iii) x^2y^2 (iv) x^2-y^2
5. পরস্পর বিপরীত সম্পর্ক **6.** 2 **7.** 162 **8.** 3 **9.** 6 **10.** $\frac{qr-ps}{q+r-p-s}$

কষে দেখি-5.3 [Page : 97]

6. (vi) 2 **12.** **(A)** (i) a (ii) c (iii) c (iv) c (v) d **(B)** (i) সত্য (ii) সত্য
(C) (i) 4 (ii) $12\frac{1}{2}$ (iii) –6 **13.** (i) 11 (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) 17 : 7 (iv) x = 8, y = 18 (v) 3 : 2

অধ্যায় - 6

নিজে করি :

প্রয়োগ : **3.** 1102.50 টাকা **5.** 1576.25 টাকা **7.** 102.50 টাকা **10.** 2300 টাকা **12.** 34719.24 **14.** 3200 টাকা **19.** 6000 টাকা, 7% **21.** 8% **23.** 2 বছর

কষে দেখি-6.1 [Page : 112]

1. 5886.13 টাকা (প্রায়) **2.** 6298.56 টাকা **3.** 247.20 টাকা **4.** 8850.87 টাকা **5.** 90405 টাকা **6.** 15000 টাকা **7.** 8,000 টাকা **8.** 25,000 টাকা **9.** 25,000 টাকা **10.** 67.50 টাকা **11.** 76.25 টাকা

12. 16,000 টাকা **13.** 30,000 টাকা **14.** 933.60 টাকা **15.** 565 টাকা **16.** 1250 টাকা, 4% **17.** 70,000 টাকা, 6% **18.** 489.60 টাকা **19.** 480.57 টাকা (প্রায়) **20.** 8% **21.** 2 বছর **22.** 10% **23.** 2 বছর **24.** 3 বছর **25.** 252.20 টাকা, 1852.20 টাকা

নিজে করি :

প্রয়োগ : 27. 102900 টাকা **29.** 506250

কষে দেখি-6.2 [Page : 117]

1. 10609 **2.** 84896640 **3.** 72900 টাকা **4.** 3200 জন **5.** 12000 **6.** 532.4 কুই. **7.** 20 মিটার **8.** 3429.50 টাকা **9.** 58.32 কিগ্রা. **10.** 3000 **11.** 1536 **12.** 131220 টাকা **13.** 75 **14.** 33750 **15.** 40960 **16. (A)** (i) c (ii) b (iii) b (iv) d (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) সমান (ii) সমহার (iii) হ্রাস **17.** (i) 5 (ii) 2n (iii) 6000 টাকা (iv) $v\left(1-\frac{r}{100}\right)^{-n}$ (v) $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}$

অধ্যায় - 7

নিজে করি : 7.1 1. বৃত্তস্থ, $\overset{\frown}{AQB}$ **2.** ST, $\angle SLT$, $\overset{\frown}{SNT}$

নিজে করি : 7.2 3. (a) (i) কেন্দ্রস্থ (ii) $\angle APB$ (iii) AQB, বৃত্তস্থ (iv) APB, নয় (v) $\angle ADB$, $\overset{\frown}{AQB}$ **(b)** (i) $\angle ACB$, $\angle ADB$ (ii) $\angle ACB$, $\angle ADB$, নয়

নিজে করি :

প্রয়োগ : 5. (i) $x=60$ (ii) $y=120$

কষে দেখি-7.1 [Page : 126]

1. $65^\circ, 25^\circ$ **2.** 125° **3.** 144° **4.** $55^\circ, 110^\circ$ **5.** 160° **14. (A)** (i) d (ii) a (iii) b (iv) c (v) c **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) অর্ধেক (ii) সমান (iii) 120° **15.** (i) $x=40, y=80$ (ii) 40° (iii) 120° (iv) 5 সেমি. (v) 40°

নিজে করি :

প্রয়োগ : 8. (ii) $x=60$

কষে দেখি-7.2 [Page : 132]

1. $40^\circ, 60^\circ, 180^\circ$ **2.** $\angle BAC = 45^\circ, \angle APC = 45^\circ$ **12. (A)** (i) d (ii) d (iii) c (iv) b (v) d **(B)** (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) সমান (ii) সমবৃত্তস্থ (iii) সমান **13.** (i) $\angle CDE = 30^\circ$ (ii) 78° (iii) 80° (iv) 64° (v) 4 সেমি.

কষে দেখি-7.3 [Page : 138]

1. (ii) **10. (A)** (i) d (ii) c (iii) d (iv) c (v) c **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) সমকোণ (ii) স্থূলকোণ (iii) সমকৌণিক **11.** (i) 4 সেমি. (ii) 2.5 সেমি. (iii) 2r সেমি. (iv) 30° (v) 60°

অধ্যায় - 8

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** 616 বর্গ মি. **4.** 187 বর্গ ডেকামি. **6.** 6.4 ডেসিমি., 28.05 টাকা
11. 2.541 ঘন ডেসিমি., 12.705 কিগ্রা. **13.** 188.65 ঘন সেমি. **16.** 360 সেমি.

কষে দেখি-8 [Page : 146]

1. (i) 3 (ii) 1;2 **3.** 18 সেমি. **4.** 1232 ঘন ডেসিমি.; 1100 টাকা **5.** 325 গ্রাম **6.** 4.05 ডেসিমি.
7. 6.468 লিটার **8.** 2310 কিলোলিটার **9.** 3.2 সেমি. **10.** 14 মিটার, 6 মিটার **11.** 180 সেমি.
12. 5.6 ডেসিমি., 25 ডেসিমি. **13.** 5829.12 টাকা **14.** 5 ডেসিমি. **15.** 7 ডেসিমি.
16. 15840 লিটার; 21120 লিটার **17.** (i) 277.2 ঘন ডেসিমি. (ii) 55.44 ঘন ডেসিমি. **18.** 168 টি
19. **(A)** (i) c (ii) b (iii) b (iv) c (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) ℓb (ii) 5 (iii) 4
20. (i) 7 মিটার (ii) 2 (iii) 396 ঘন সেমি. (iv) 9:32 (v) $62\frac{1}{2}$% হ্রাস

অধ্যায় - 9

নিজে করি :

প্রয়োগ : **4.** $\sqrt{48}, \sqrt{27}, \sqrt{75}$ **6.** $3\sqrt{2}, -\sqrt{2}$, শুদ্ধ করণী **9.** $4\sqrt{3}$ **11.** $21+5\sqrt{5}$

কষে দেখি-9.1 [Page : 153]

1. (i) $5\sqrt{7}$ (ii) $8\sqrt{7}$ (iii) $6\sqrt{3}$ (iv) $5\sqrt{5}$ (v) $5\sqrt{119}$ **5.** $5\sqrt{3}-\sqrt{2}$
6. (a) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (b) $4-2\sqrt{3}$ (c) $4+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ (d) $15-4\sqrt{11}$ (e) $\sqrt{7}-10$
(f) $5+\sqrt{3}$ ও $5-\sqrt{3}$ [অন্য উত্তরও হবে]

নিজে করি :

প্রয়োগ : **16.** $6\sqrt{2}+2\sqrt{14}-2\sqrt{10}-3-\sqrt{7}+\sqrt{5}$ **18.** $\sqrt{7}, k\sqrt{7}$ (k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা)
20. $7+\sqrt{3}, -7-\sqrt{3}$ **22.** $\sqrt{15}-\sqrt{3}, \sqrt{3}-\sqrt{15}$ **25.** (i) $2-\sqrt{3}$ (ii) $5+\sqrt{2}$
(iii) $-\sqrt{5}-7$ (iv) $6-\sqrt{11}$ (v) $-\sqrt{5}$ **28.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{42}}{2}$ **30.** (i) $14+8\sqrt{3}$
(ii) $4+\sqrt{15}$

কষে দেখি-9.2 [Page : 157]

1. (a) 3 (b) $\sqrt{2}$ (c) $15\sqrt{15}$ (d) 3 (e) $\pm\sqrt{23}$ **2.** (a) $7\sqrt{2}$ (b) 12 (c) 15
(d) $3\sqrt{2}+\sqrt{10}$ (e) -1 (f) $24+8\sqrt{6}+2\sqrt{15}+3\sqrt{10}$ (g) 4 **3.** (a) 5 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{3}$
(d) $2-\sqrt{5}$ (e) $\sqrt{14}$ (f) $2+\sqrt{3}$ **4.** $9+4\sqrt{5}$; $-2+\sqrt{7}$
5. (i) $-\sqrt{5}+\sqrt{2}$; $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (ii) $13-\sqrt{6}$; $-13+\sqrt{6}$ (iii) $-\sqrt{8}-3$; $\sqrt{8}+3$
(iv) $\sqrt{17}+\sqrt{15}$; $-\sqrt{17}-\sqrt{15}$ **6.** (i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{5}(\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{30})$ (iii) $2+\sqrt{3}$
(iv) $\frac{1}{4}(3\sqrt{7}+\sqrt{35}+3\sqrt{3}+\sqrt{15})$ (v) $\frac{1}{19}(6\sqrt{10}+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+1)$ (vi) $5+2\sqrt{6}$
7. (i) $6+\sqrt{10}-3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ (ii) $-(4+\sqrt{6})$ (iii) $\sqrt{3}$

8. (i) $-\frac{(5+2\sqrt{5})}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}(9\sqrt{2}-8\sqrt{5})$

নিজে করি :

প্রয়োগ : **32.** $\frac{2}{5}$ **34.** $6\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ **36.** $2\sqrt{2}, 18\sqrt{3}, 4\sqrt{6}$

কষে দেখি-9.3 [Page : 161]

1. (a) (i) 1 (ii) 0 **2.** (a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (b) 0 (c) $4\sqrt{6}$ (d) 0 **3.** 0

4. (i) $2\sqrt{6}$ (ii) $2\sqrt{7}$ (iii) 26 (iv) $50\sqrt{7}$ **5.** $(4x^2-2), x=\pm2$

6. (i) $1\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{5\sqrt{5}}{27}$ (iii) $1\frac{5}{8}$ (iv) $\frac{9\sqrt{5}}{20}$

7. (a) (i) $2\sqrt{3}$ (ii) 14 (iii) $30\sqrt{3}$ (iv) 2 (b) 37 **9.** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

10. **(A)** (i) c (ii) a (iii) b (iv) a (v) b **(B)** (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) অমূলদ (ii) $-\sqrt{3}-5$ (iii) অনুবন্ধী

11. (i) 6 (ii) $\sqrt{10}+\sqrt{8}$ (iii) $a+\sqrt{b}$ ও $a-\sqrt{b}$ [যেখানে a মূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{b}$ শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী] (iv) $2\sqrt{2}$ (v) 1

অধ্যায় - 10

কষে দেখি-10 [Page : 169]

1. $\angle SQP = 65^\circ, \angle RSP = 70^\circ$ **2.** 35° **3.** $40^\circ, 25^\circ$ **17.** **(A)** (i) c (ii) c (iii) d (iv) c (v) d **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) সমবৃত্তস্থ (ii) আয়তাকার (iii) সমবৃত্তস্থ

18. (i) $x = 60$ (ii) $\angle QBC = 100^\circ, \angle BCP = 96^\circ$ (iii) $\angle DPC = 40^\circ, \angle BQC = 20^\circ$ (iv) $\angle BED = 80^\circ$ (v) $\angle BED = 20^\circ$

অধ্যায় - 11

নিজে করি : 11 **1.** জ্যা **2.** কেন্দ্র **3.** সমান **4.** ব্যাসার্ধ

অধ্যায় - 12

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** 1540 টাকা **4.** $1437\frac{1}{3}$ ঘন সেমি. **7.** 10.5 সেমি. **10.** 1:4

কষে দেখি-12 [Page : 183]

1. 1386 বর্গ সেমি. **2.** 2.8 সেমি. **3.** $179\frac{2}{3}$ ঘন সেমি. **4.** $11498\frac{2}{3}$ ঘন সেমি. **5.** 1:9 **6.** 9 সেমি. **7.** 38.808 ঘন সেমি; 55.44 বর্গ সেমি. **8.** 8টি **9.** 6 সেমি. **10.** 970 টাকা 20 পয়সা **11.** 36:25

12. $1 : (2\sqrt{2}-1)$ **13.** 2460.92 বর্গ সেমি. **14.** 512টি **15.** **(A)** (i) a (ii) b (iii) c (iv) a (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) গোলক (ii) 1 (iii) 12

16. (i) 4.5 একক (ii) 6 সেমি. (iii) $2 : \sqrt{3}$ (iv) 36π (v) 125

অধ্যায় - 13

নিজে করি :

প্রয়োগ : **4.** $\frac{9}{2}$, $y = \frac{9}{2}\sqrt{x}$, $x = \frac{256}{81}$ **5.** হ্যাঁ, $x \propto \frac{1}{y}$ **10.** $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা **19.** $5\frac{2}{5}$ দিন **27.** 8 টি

কষে দেখি-13 [Page : 195]

1. $A \propto B, \frac{5}{2}$ **2.** $x \propto \frac{1}{y}$ **3.** (i) 168 কিমি. (ii) 6 টি (iii) 10 জন **4.** (i) $x=4$ (ii) 2 (iii) $x = \frac{3y}{10z}$, 9 **5.** (iii) $a \propto \frac{1}{d}$ (iv) ভেদ ধ্রুবক তিনটির গুণফল 1 **8.** 5 দিন **9.** 3 মিটার

10. $y = 2x - \frac{3}{x}$ **12.** 16250 টাকা **13.** 5 : 9 **14.** 15

16. **(A)** (i) d (ii) d (iii) b (iv) b (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) z (ii) y^n (iii) x

17. (i) $y^2 = 4ax$ (ii) 1 (iii) সরলভেদে (v) 8 : 27

অধ্যায় - 14

নিজে করি :

প্রয়োগ :

2. সুলেখা পাবে 3500 টাকা, জয়নাল পাবে 3150 টাকা এবং শিবু পাবে 4900 টাকা **5.** 14100 টাকা,15900 টাকা ও 13200 টাকা **8.** মনীষা দেবেন 2300 টাকা এবং রজত দেবেন 4600 টাকা

10. নিবেদিতা পাবে 3250 টাকা এবং উমা পাবে 2925 টাকা।

কষে দেখি-14 [Page : 202]

1. আমার লভ্যাংশ 6,300 টাকা ও মালার লভ্যাংশ 10,500 টাকা

2. প্রিয়ম, সুপ্রিয়া ও বুলুকে যথাক্রমে 900 টাকা, 600 টাকা ও 1500 টাকা লোকসানের পরিমাণ হিসাবে দিতে হবে।

3. মাসুদের লভ্যাংশ 5000 টাকা ও শোভার লভ্যাংশ 7500 টাকা

4. তিনবন্ধুকে যথাক্রমে 500 টাকা, 600 টাকা ও 700 টাকা দিতে হবে,

5. দীপুর লভ্যাংশ 4700 টাকা, রাবেয়ার লভ্যাংশ 4400 টাকা ও মেঘার লভ্যাংশ 5300 টাকা

6. তিন বন্ধু লভ্যাংশ থেকে যথাক্রমে 2240 টাকা, 2800 টাকা এবং 3360 টাকা পাবেন

7. তিন বন্ধুর হাতে যথাক্রমে 3600 টাকা, 4800 টাকা এবং 3000 টাকা থাকবে; 6:8:5

8. তিন বন্ধু পাবেন যথাক্রমে 10560 টাকা, 10274 টাকা ও 8426 টাকা

9. প্রদীপবাবু পাবেন 12956 টাকা ও আমিনাবিবি পাবেন 14760 টাকা

10. নিয়ামতচাচা লাভ পাবেন 10000 টাকা করবীদিদি লাভ পাবেন 9000টাকা

11. শ্রীকান্ত পাবেন 15660 টাকা, সৈফুদ্দিন পাবেন 19575 টাকা ও পিটার পাবেন 3915 টাকা।

12. 5 মাস পরে

13. তিনজন মৃৎশিল্পী পেয়েছিলেন যথাক্রমে 36500 টাকা, 35000 টাকা ও 39500 টাকা

14. 6800 টাকা **15.** পূজা পাবে 2550 টাকা, উত্তম পাবে 2610 টাকা, মেহের পাবে 300 টাকা

16. **(A)** (i) b (ii) a (iii) c (iv) a (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা **(C)** (i) দুই (ii) সরল (iii) মিশ্র

17. (i) 1500 টাকা (ii) 8:12:15 (iii) 4000 টাকা (iv) 480 টাকা (v) 4000

অধ্যায় - 15

কষে দেখি-15.1 [Page : 209]

1. 48°

নিজে করি : 15.1 1. 12 সেমি. 2. 5 সেমি. 3. $\angle APB = 60^{\circ}$, $\angle APO = 30^{\circ}$

কষে দেখি-15.2 [Page : 218]

1. 15 সেমি. 2. 60° 11. **(A)** (i) a (ii) d (iii) a (iv) d (v) c **(B)** (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) ছেদক (ii) 4 (iii) তির্যক 12. (i) 30° (ii) 14 (iii) 2 সেমি. (iv) 4 সেমি. (v) 12 সেমি.

অধ্যায় - 16

নিজে করি : **প্রয়োগ :** 2. $9\frac{3}{7}$ বর্গ মি. 4. $1178\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি. 6. 1100 বর্গ সেমি. 8. 25 সেমি. 10. 577.5 ঘন ডেসিমি. 14. 6:25

কষে দেখি-16 [Page : 227]

1. 1131.43 বর্গ সেমি. (প্রায়), 1838.57 বর্গ সেমি. (প্রায়) 2. (i) 1.232 ঘন মি. (ii) 1617 ঘন মিটার 3. $1571\frac{3}{7}$ বর্গ সেমি., $2828\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি., $6285\frac{5}{7}$ ঘন সেমি. 4. $452\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি.; $402\frac{2}{7}$ ঘন সেমি. 5. 13 সেমি. 6. 38.5 বর্গ মি. 7. 866.25 টাকা 8. 12 সেমি.; $314\frac{2}{7}$ ঘন সেমি. 9. 4 মি., $37\frac{5}{7}$ ঘন মি., 211.20 টাকা 10. 15 মিটার 11. 14 সেমি.; 17.5 সেমি. 12. 74.18 ঘন মি. (প্রায়); 80.54 বর্গ মি.(প্রায়) 13. **(A)** (i) c (ii) d (iii) a (iv) d (v) b **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) BC (ii) $\frac{3V}{A}$ (iii) 3 : 1 14. (i) 5 সেমি. (ii) 2:1 (iii) 3; (iv) $\frac{1}{9}$ (v) 9:8

অধ্যায় - 18

কষে দেখি-18.1 [Page : 235]

1. (i) সদৃশ (ii) সদৃশ (iii) সমবাহু (iv) সমান, সমানুপাতী
2. (i) সত্য (ii) মিথ্যা (iii) সত্য (iv) সত্য (v) মিথ্যা

নিজে করি : **প্রয়োগ :** 2. 6 সেমি.

কষে দেখি-18.2 [Page : 244]

1. (i) 6 একক (ii) 9 একক (iii) 4 একক 2. (i) না (ii) হ্যাঁ 11. **(A)** (i) b (ii) c (iii) d (iv) a (v) d **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) সমানুপাতে (ii) সমান (iii) সমানুপাতে 12. (i) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (ii) 3 : 5 (iii) x = 9 (iv) $x = \frac{15}{4}, y = \frac{16}{3}$ (v) $\frac{3}{1}$

কষে দেখি-18.3 [Page : 253]

1. প্রথম জোড়া সদৃশ 2. $\angle A = 40^{\circ}$ 3. 42 মিটার

নিজে করি : **প্রয়োগ :** 21. 10.8 সেমি.

কষে দেখি-18.4 [Page : 259]

1. 12.8 সেমি. 2. BD = 8 সেমি., $AB = 4\sqrt{5}$ সেমি. 7. **(A)** (i) c (ii) b (iii) c (iv) a (v) d **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য (iii) মিথ্যা **(C)** (i) অনুরূপ (ii) 5.4 8. (i) 12 সেমি. ii) 40 সেমি. (iii) 16 সেমি. (iv) 8 সেমি. (v) 50°

অধ্যায় - 19

নিজে করি :

প্রয়োগ : **3.** 7 সেমি.

কষে দেখি-19 [Page : 265]

1. 693 কিগ্রা. **2.** 20 সেমি. **3.** 5 সেমি. **4.** 3:4 **5.** 4096 টি **6.** 60 টি **7.** 19404 ঘনসেমি. **8.** 3:4 **9.** 8টি; 4.851 ঘনডেসিমি. **10.** 50.4 সেমি. **11.** 12 ডেসিমি. **12.** 14 সেমি. **13.** 2.1 ডেসিমি **14.** 1:2:3 **15.** $30\frac{1}{3}$ সেমি. **16.** 3.08 ঘন মি. 0.84 ঘনমি. **17.** **(A)** (i) a (ii) b (iii) b (iv) d (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা **(C)** (i) চোঙের (ii) চোঙের (iii) সমান

18. (i) 5 সেমি. (ii) 1 : 2 (iii) 3 : 1 : 2 (iv) $1 : \sqrt{3}$ (v) 2 : 1

অধ্যায় - 20

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** $\frac{\pi}{6}$ **7.** $\frac{\pi}{8}$ **12.** $\frac{5}{2}$ রেডিয়ান **16.** $62^{\circ}\,32'\,33''$ বা $\frac{35\pi}{44}$ **18.** $94^{\circ}\,27'\,24''$

কষে দেখি-20 [Page : 276]

1. (i) $13^{\circ}\,52'$ **(ii)** $1^{\circ}\,45'\,12''$ **(iii)** $6'\ 15''$ **(iv)** $27^{\circ}\,5'$ **(v)** $72^{\circ}\,2'\,24''$

2. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{3\pi}{4}$ (iii) $-\frac{5\pi}{6}$ (iv) $\frac{2\pi}{5}$ (v) $\frac{\pi}{8}$ (vi) $-\frac{25\pi}{72}$ (vii) $\frac{47}{160}\pi$ (viii) $\frac{6041\pi}{27000}$

3. $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$ **4.** $81^{\circ}, 9^{\circ}$ **5.** $100^{\circ}, \frac{5\pi}{9}$ **6.** $75^{\circ}, 60^{\circ}\,;\ \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{3}$ **7.** $\frac{4\pi}{9}$ **8.** $\frac{\pi}{16}$ **9.** $75^{\circ}, \frac{5\pi}{12}$

10. ঘড়ির কাঁটার দিকে 2বার পূর্ণ আবর্তন করেছে এবং তারপরে 195° কোণ উৎপন্ন করেছে।

11. $\angle ABD = \frac{\pi}{8}, \angle BAD = \frac{3\pi}{8}, \angle CBD = \frac{\pi}{8}, \angle BCD = \frac{3\pi}{8}$ **12.** $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ **13.** $60^{\circ}, \frac{\pi}{3}$

14. **(A)** (i) d (ii) d (iii) b (iv) b (v) a **(B)** (i) সত্য (i) মিথ্যা **(C)** (i) ধ্রুবক (ii) $57^{\circ}\,16'\,22''$ (প্রায়) (iii) $\frac{5\pi}{8}$ **15.** (i) $\frac{\pi}{180}$ (ii) $26^{\circ}\,24'\,45''$ (iii) $\frac{5\pi}{18}$ (iv) 200 সেমি. (v) $\frac{\pi}{6}$

অধ্যায় - 22

কষে দেখি-22 [Page : 289]

1. (i) এর ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে। **2.** 21 মিটার **3.** 16 সেমি. **15.** **(A)** (i) c (ii) c (iii) b (iv) b (v) c **(B)** (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) সমষ্টির (ii) 8 (iii) 5 **16.** (i) 90° (ii) 26 সেমি. (iii) $5\sqrt{3}$ সেমি. (iv) 90° (v) 2.4 সেমি.

অধ্যায় - 23

নিজে করি :

প্রয়োগ : **3.** 15°

কষে দেখি-23.1 [Page : 295]

1. $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}$ **2.** $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, \frac{7}{24}, \frac{25}{7}$ **3.** $\frac{21}{29}, \frac{20}{29}, \frac{20}{29}, \frac{21}{29}$

4. $\sin\theta = \frac{24}{25}$, $\tan\theta = \frac{24}{7}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{25}{24}$, $\sec\theta = \frac{25}{7}$, $\cot\theta = \frac{7}{24}$

5. $\tan\theta = \frac{1}{2}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **7.** $\cos A = \frac{8}{17}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{17}{15}$ **8.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা (iii) মিথ্যা (iv) সত্য (v) মিথ্যা (vi) সত্য

নিজে করি :

প্রয়োগ : **9.** 60 **12.** $45^{\circ}, 45^{\circ}$

কষে দেখি-23.2 [Page : 302]

1. 3 **2.** $\angle ACB = 60^{\circ}$, $\angle BAC = 30^{\circ}$ **3.** BC = 10 সেমি., AB = $10\sqrt{3}$ সেমি.

4. PQ=QR=3 মি. **5.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 0 (iii) 1 (iv) $3\frac{1}{3}$ (v) $\frac{6+\sqrt{6}}{3}$ (vi) 0 (vii) 0

(viii) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ (ix) 1 **7.** (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $2\frac{2}{3}$ (iii) $\pm\frac{1}{2}$ **8.** $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ **11.** $0^{\circ}, 60^{\circ}$

নিজে করি :

প্রয়োগ : **23.** না **26.** $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$ **28.** $\frac{7}{5}$ **34.** $\frac{1}{2}$

36. $4x^2 + 25y^2 = 9$ **38.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **41.** 2

কষে দেখি-23.3 [Page : 311]

1. (i) $\frac{5}{7}$ (iii) 2 **2.** (i) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\sqrt{2}+1$ (iii) 0 (iv) 0 (v) $\frac{17}{13}$ (vi) $\sqrt{2}$ (vii) $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (viii) $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

(ix) $\frac{4}{3}$ (x) $\frac{1}{2}$ (xi) $\frac{3}{2}$ (xii) 1 (xiii) $\frac{4}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ অথবা, $\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (xiv) $\frac{13}{12}$

4. (i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **5.** (i) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ii) $25x^2 - y^2 = 9$

6. (i) $\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}, \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$ **9.** **(A)** (i) c (ii) a (iii) c (iv) d (v) c

(B) (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) 4 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

10. (i) $4, 30^{\circ}$ (ii) 0 (iii) 12 (iv) 1 (v) 45°

অধ্যায় - 24

নিজে করি : প্রয়োগ : 2. 1 13. $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$

কষে দেখি-24 [Page : 316]

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 1 12. (A) (i) b (ii) c (iii) c (iv) b (v) a (B) (i) সত্য (ii) মিথ্যা (C) (i) $\sqrt{3}$ (ii) 1 (iii) cos B 13. (i) 1 (ii) 9° (iii) 3 (iv) 1 (v) 9°

অধ্যায় - 25

নিজে করি : প্রয়োগ : 2. $20\sqrt{3}$ মিটার 5. 30° 10. 40 মিটার

কষে দেখি-25 [Page : 325]

1. $20\sqrt{3}$ মিটার 2. $3\sqrt{3}$ মিটার 3. $75\sqrt{3}$ মিটার 4. 21 মিটার 5. 8 মিটার, 24 মিটার 6. (i) $4\sqrt{3}$ মিটার (ii) $2\sqrt{3}$ মিটার (iii) $2(3+\sqrt{3})$ মিটার (iv) 6 মিটার 7. 20.784 মিটার 8. 7.098 মিটার 9. $19\sqrt{3}$ মিটার 10. 450 মিটার, $150\sqrt{3}$ মিটার 11. 64 মিটার, $16\sqrt{3}$ মিটার 12. $125\sqrt{3}$ মিটার, $125\sqrt{2}$ মিটার, প্রথম ক্ষেত্রে 13. 2180 মিটার 14. 17.19 মিটার (প্রায়) 15. 30° 16. 81.96 মিটার (প্রায়) 17. $25\sqrt{3}$ মিটার 18. 42 ডেসিমিটার, $42\sqrt{3}$ ডেসিমিটার 19. 6 কিমি./ঘণ্টা 20. 11.83 মিটার/সেকেন্ড (প্রায়) 21. $200(\sqrt{3}+1)$মিটার 22. 60মিটার, $15\sqrt{3}$ মিটার 23. (i) $250\sqrt{3}$ মিটার (ii) $500\sqrt{3}$ মিটার 24. (A) (i) b (ii) a (iii) c (iv) c (v) a (B) (i) মিথ্যা (ii) সত্য (C) (i) হ্রাস (ii) সমান (iii) বেশি 25. (i) 30 মিটার (ii) 60° (iii) 45° (iv) 15° (v) 30°

অধ্যায় - 26

নিজে করি : প্রয়োগ : 9. 18 12. 36.4

কষে দেখি-26.1 [Page : 340]

1. 17.43 বছর (প্রায়) 2. 4.24 3. 20 4. 8 5. 54.72 6. 43.4 বছর 7. (i) 25 (ii) 40.3 8. (i) 100.89 (প্রায়) (ii) 51.5 9. (i) 75.75 (ii) 36.24 (প্রায়) 10. 20 11. 41.1 বছর 12. 35.67 (প্রায়) 13. 31.67 (প্রায়) 14. 11.69 (প্রায়)

নিজে করি : প্রয়োগ : 16. (i) 10 (ii) 12.5 19. 4 21. 29.17 (প্রায়) 24. $x=8, y=7$

কষে দেখি-26.2 [Page : 349]

1. 107 টাকা 2. 9.5 বছর 3. 54.5 4. 8 5. 47 কিগ্রা 6. 22 মিমি. 7. 2 8. 53.33 টাকা (প্রায়) 9. 153.41 সেমি. (প্রায়) 10. 35.67 (প্রায়) 11. 19.67 (প্রায়) 12. 18.36 (প্রায়) 13. 83 14. 40 15. $x=9, y=16$

নিজে করি : প্রয়োগ : 28. 70.59 (প্রায়)

কষে দেখি-26.3 [Page : 358]

2. 46.69 (প্রায়) 4. 138.57 (প্রায়)

নিজে করি : প্রয়োগ : 30. (ii) 9 (iii) 102, 104 (iv) 5 33. 14.4

কষে দেখি-26.4 [Page : 364]

1. 15 টাকা, 17 টাকা 2. 131 সেমি. 3. (i) 4 (ii) 10, 15 4. 4,6 5. 18.90 বছর (প্রায়) 6. 21.76 (প্রায়) 7. 17.38 (প্রায়) 8. 78.44 (প্রায়) 9. (A) (i) d (ii) b (iii) d (iv) a (v) b (B) (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা (C)(i)কেন্দ্রীয় (ii) $a.\bar{x}$ (iii) সমান 10.(i)20 (ii)82 (iii)6 (iv)27 (v) 30–40

গণিতের পরিভাষান্তর (Terminology of Mathematics)

বাংলা	English
অর্ধবৃত্ত	Semicircle
অধমর্ণ বা দেনাদার	Debtor
অধিবৃত্তাংশ	Major Segment
অধিচাপ	Major Arc
অনুপাত	Ratio
অন্তর্বৃত্ত	Incircle
অর্ধগোলক	Hemisphere
অংশীদারি কারবার	Partnership Business
অবিন্যস্ত তথ্য	Ungrouped Data
অবনতি কোণ	Angle of Depression
আয়তঘন	Rectangular Parallelopiped or cuboid
আয়তন	Volume
আকার	Size
আকৃতি	Shape
আয়তলেখ	Histogram
আসল	Capital/Principal
উত্তমর্ণ বা পাওনাদার	Creditor
উচ্চতা	Height
উত্তরপদ	Consequent
উপচাপ	Minor Arc
উন্নতি কোণ	Angle of Elevation
উপবৃত্তাংশ	Minor Segment
উপপাদ্য	Theorem
এককেন্দ্রীয় বৃত্ত	Concentric Circles
একান্তর প্রক্রিয়া	Alternendo
কর্ণ	Diagonal
কল্পিত গড়	Assumed Mean
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	Cumulative Frequency
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা	Cumulative frequency curve or ogive
ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি	Step-deviation method
কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ	Measures of Central tendency
গুরুঅনুপাত	Ratio of Greater Inequality
গড়	Mean
গোলক	Sphere
ঘনক	Cube
চক্রবৃদ্ধি সুদ	Compound Interest
চাপ	Arc
ছোটোবৃত্তকলা	Minor Sector
তল	Surface
তির্যক উচ্চতা	Slant Height
ত্রিকোণমিতি	Trigonometry
দ্বিঘাত সমীকরণ	Quadratic Equation
দ্বিঘাত করণী	Quadratic Surd
দৈর্ঘ্য	Length
দৃষ্টিরেখা	Line of Sight
নমুনা	Sample
নিরূপক	Discriminant
পরিধি	Circumference
প্রস্থ	Breadth
প্রান্তিকী	Edge
পূর্বপদ	Antecedent
পরিসংখ্যা	Frequency
পরিসংখ্যা বহুভুজ	Frequency Polygon
পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা	Frequency Distribution Table
পূরক কোণ	Complementry Angle
পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল	Area of the Lateral Surface
বহুপদী সংখ্যামালা	Polynominal
বক্রতলের ক্ষেত্রফল	Area of the Curved Surface
বীজ	Root
বৃত্ত	Circle
বৃত্তাকার ক্ষেত্র	Circular Region
বৃত্তচাপ	Arc
বৃত্তাংশ	Segment

বৃত্তকলা - Sector
বড়ো বৃত্তকলা - Major sector
বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ - Cyclic Quadrilateral
ব্যাস - Diameter
ব্যাসার্ধ - Radius
বিপরীত অনুপাত - Inverse Ratio
বৈষম্যানুপাত - Ratio of inequality
বিপরীত বা ব্যস্তপ্রক্রিয়া - Invertendo
ব্যস্তভেদ - Inverse variation
বৃত্তের ছেদক - Secant
বৃত্তীয় পদ্ধতি - Circular system
বিন্যস্ত তথ্য - Grouped data
বহুভূয়িষ্ঠক - Multimodal
ভূমি - Base
ভূমির ক্ষেত্রফল - Area of the Base
ভাগ প্রক্রিয়া - Dividendo
ভেদ - Variation
ভেদ ধ্রুবক - Variation constant
ভারযুক্ত গড় - Weighted mean
মাত্রা - Dimension
মূলধন - Capital/Principal
মধ্যসমানুপাতী - Mean Proportional
মধ্যমা - Median
যৌগিক অনুপাত বা মিশ্র অনুপাত - Compound ratio or Mixed ratio
যোগ প্রক্রিয়া - Componendo
যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া - Componendo and Dividendo
যৌগিক ভেদ - Joint variation
যৌগিক গড় - Arithmetic mean
রাশিবিজ্ঞান - Statistics
লঘু অনুপাত - Ratio of Less Inequality
লম্ববৃত্তাকার চোঙ - Right circular cylinder
লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু - Right circular cone
লভ্যাংশ বণ্টন - Distribution of profit
শীর্ষবিন্দু - Vertex
শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু - Apex
শ্রেণি সীমা - Class limit
শ্রেণি সীমানা - Class boundary
শ্রেণিমধ্যক - Mid value of the class
ষষ্টিক পদ্ধতি - Sexagesimal system
সমাধান - Solution
সরল সুদ - Simple interest
সর্বসম বৃত্ত - Equal circles
সমবৃত্তস্থ - Concyclic
সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম - Isosceles Trapezium
সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল - Whole surface area
সমানুপাত - Proportion
সমহার বৃদ্ধি - Uniform rate of growth
সমহার হ্রাস বা অপচয় - Uniform rate of decrease or depreciation
সংযোজন প্রক্রিয়া - Addendo
সংখ্যাগুরুমান বা ভূয়িষ্ঠক - Mode
সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণি - Modal class
সম্পাদ্য - Construction
স্পর্শক - Tangent
স্পর্শবিন্দু - Point of contact
সদৃশ - Similar
সদৃশতা - Similarity
সদৃশকোণী - Equiangular
সাম্যানুপাত - Ratio of Equality
সাংখ্যমান - Numerical value
সবৃদ্ধিমূল - Amount
সুদ - Interest
সুদের হার - Rate of Interest

শিখন পরামর্শ

- জাতীয় পাঠক্রম রূপরেখা (NCF) - 2005-এর পরামর্শ এই যে শিক্ষার্থী যেন তার বিদ্যালয় জীবন ও বিদ্যালয়ের বাইরের জীবনের সঙ্গে সর্বদা সংযোগ ঘটাতে পারে। এই নথি নির্দেশ করে যে শিক্ষার্থীর শিক্ষা যেন কেবলমাত্র বই থেকে না হয়। শুধুমাত্র বই থেকে শিক্ষা হলে শিক্ষার্থীর শিক্ষায় বিদ্যালয়, বাড়ি এবং সমাজ থেকে শিক্ষার ভেতর একটি ফাঁকের সৃষ্টি হয়। জাতীয় পাঠক্রম রূপরেখার এই মূল দৃষ্টিভঙ্গির উপর ভিত্তি করেই বর্তমান পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি ও পাঠ্যবই তৈরি করা হয়। এই নথি আরও পরামর্শ দেয় যে শিক্ষার্থীর শিক্ষা যেন বিষয়কেন্দ্রিক না হয়। বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে যতটা সম্ভব সে যেন সম্পর্ক খুঁজে পায়।
- আশা করা যায়, শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যখন এই পাঠ্যবইটি ব্যবহার করবেন যতটা সম্ভব এই নীতি ও নীচের পরামর্শ অনুধাবন করবেন।
- বর্তমানে শিক্ষা শিক্ষার্থীকেন্দ্রিক। শিক্ষিকা/শিক্ষক সহায়ক মাত্র। অর্থাৎ শিক্ষার্থী যে জন্মের পর থেকেই বাড়ি, পরিবেশ, সমাজ থেকে অনেক কিছুই শিখে ফেলে সেটা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা খেয়াল রাখবেন। কোনো বিষয় জানানোর আগে সেই বিষয়ে শিক্ষার্থীর পূর্বে অর্জিত জ্ঞানের দিকে খেয়াল রেখে সহায়তা করবেন। শিক্ষার্থীর চিন্তা বা যুক্তি কোনোভাবে যাতে আটকে না যায়, সে যেন মুক্ত চিন্তায় যেতে পারে সেদিকে সর্বদা খেয়াল রাখবেন।
- পাঠ্যবই শিক্ষার্থীর শিক্ষার একটি সহায়ক মাত্র। একমাত্র সহায়ক নয়। শিক্ষার্থীর শিক্ষা যাতে আনন্দদায়ক হয়ে ওঠে তার জন্য বিভিন্ন শিখন সম্ভারের সাহায্য নেওয়া প্রয়োজন এবং প্রয়োজনে শিক্ষার্থীর চাহিদামতো বিভিন্ন সমস্যা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা শ্রেণিকক্ষে তৈরি করে দেবেন যাতে শিক্ষার্থীর শ্রেণি অনুযায়ী কোনো অধ্যায়ের জ্ঞান অসম্পূর্ণ না থাকে।
- গণিত শিক্ষায়, শিক্ষার্থীর যেন মূর্ত বস্তুর ধারণা থেকে বিমূর্তের ধারণা জন্মায়। তা না হলে শিক্ষার্থীর কাছে গণিত বিষয় একটি ভয়ের কারণ হয়ে ওঠে।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন যে অধ্যায়ে সম্ভব শিক্ষার্থীর পরিচিত পরিবেশ থেকে কিছু বাস্তব সমস্যা তৈরি করে গণিতের কোনো অধ্যায় শুরু করেন। তারপর সম্ভব হলে সক্রিয়তাভিত্তিক কাজের (Activity) মাধ্যমে সেই অধ্যায় সম্পর্কে শিক্ষার্থীর মনে যুক্তিপূর্ণ ধারণার জন্ম দেন। শিক্ষার্থীর চিন্তা ও যুক্তির স্বচ্ছতা আসার পরেই যেন সে বিমূর্ত বিষয় নিয়ে কাজ করে।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন লক্ষ রাখেন শিক্ষার্থী পাঠ্যবইটি থেকে নিজে নিজেই কতদূর পর্যন্ত কোনো একটি অধ্যায় শিখতে পারে। যখন সে ওই অধ্যায়ের কোনো একটি অংশ শিখতে বাধাপ্রাপ্ত হয় তখনই তাঁরা যেন ধীরে ধীরে সহায়তা করেন, যাতে সে সমস্যাটি সমাধানের পথ নিজেই খুঁজে পায়।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা কোনো অধ্যায় সম্পর্কে প্রথমে শিক্ষার্থীর কাছে এমনভাবে গল্প বলবেন যাতে শিক্ষার্থী প্রথমে কিছু বুঝতে না পারে যে তাকে কিছু শেখানো হচ্ছে।
- দলগত শিক্ষণ শিক্ষার্থীর পক্ষে শিখনে যথেষ্ট সহায়ক হয়। শিক্ষিকা/শিক্ষক শ্রেণিকক্ষে সেদিকটি খেয়াল রাখবেন।
- বর্তমান শিক্ষায় শিক্ষার্থীকে পাঠদান বা কিছু তথ্য জানানো নয়, শিক্ষার্থী যাতে জ্ঞান গঠন করতে পারে সেদিকে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা লক্ষ রাখবেন। শিক্ষার্থী জ্ঞান গঠন করতে পারলেই সে ধীরে ধীরে অনেক বিষয়ের মধ্যে গণিত খুঁজতে চাইবে এবং গণিত বিষয়টি তার কাছে আনন্দদায়ক হয়ে উঠবে।
- শিক্ষার্থী যাতে মনে মনে তাড়াতাড়ি কোনো অঙ্ক করতে পারে (মানসাঙ্ক) সেদিকে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন যথেষ্ট খেয়াল রাখেন। গণিতের প্রতিটি অধ্যায় থেকেই শিক্ষার্থী যদি মানসাঙ্ক করতে শেখে তাহলে শিক্ষার্থীর চিন্তা, যুক্তি ও গণনা করার ক্ষমতা তাড়াতাড়ি তৈরি হয়।
- শিক্ষার্থী গণিতের কোনো অধ্যায় শেখার সময় শিক্ষিকা/শিক্ষকরা ওই অধ্যায়ের উপর এমনভাবে যদি একটি তালিকা তৈরি করেন যাতে ওই অধ্যায় থেকে শিক্ষার্থীর শিখনের যতগুলি সম্ভাবনা থাকে সবগুলিই সে শেখে। যেমন, একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে —

  1) দ্বিঘাত সংখ্যামালার ধারণা।
  2) দ্বিঘাত সমীকরণের ধারণা।
  3) দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ - এর ধারণা।

4) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে $a \neq 0$ লেখা হয় কেন তার ধারণা।

5) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে $a = 0$ হলে সমীকরণটি কি ধরনের সমীকরণ হবে তার ধারণা।

6) উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের ধারণা।

7) দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান সর্বদা কটি হবে তার ধারণা।

8) দ্বিঘাত সমীকরণে বীজের ধারণা।

9) শ্রীধর আচার্যের সূত্রের ধারণা।

10) নিরূপকের মান শূন্য বা শূন্যের বড়ো হলে বীজদ্বয়ের প্রকৃতি সম্বন্ধে ধারণা।

11) দুটি বীজ জানা থাকলে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠনের ধারণা।

- যে-কোনো অধ্যায়ের কিছু Open ended প্রশ্ন থাকা প্রয়োজন।

a) একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ স্বাভাবিক সংখ্যা ধরে সমীকরণটি গঠন করো।

b) মূলধনের অনুপাত 3:2:5 হলে মোট লাভের একটি মান লেখো।

c) একটি আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার পরিমাপ অমূলদ সংখ্যা লিখে আয়তন নির্ণয় কর যেটি মূলদ সংখ্যা।

d) তিনটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য লেখো যাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বাহুর উপর অবস্থিত।

- এরকম সম্ভাবনা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা নিজেরা আরও তৈরি করলে তাঁদের পক্ষে শিক্ষার্থীর আরহিত জ্ঞান মৌলিক কিনা বুঝতে সুবিধা হবে।

- গণিতের কোনো প্রক্রিয়া শিক্ষার্থী যেন না বুঝে মুখস্থ করে না নেয়। প্রত্যেকটি প্রক্রিয়া যেন সে যুক্তি দিয়ে বুঝতে পারে কেন হয়। শিক্ষিকা/শিক্ষকরা সেদিকে যেন যথেষ্ট খেয়াল রাখেন।

- শ্রেণিকক্ষে শিক্ষিকা/শিক্ষকের দেওয়া কোনো সমস্যা কোনো শিক্ষার্থী তাড়াতাড়ি সমাধান করে যেন চুপ করে বসে না থাকে। যে শিক্ষার্থী তাড়াতাড়ি অধ্যায়টি বুঝে এগিয়ে যাচ্ছে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা তাকে আরও কঠিন থেকে কঠিনতর যুক্তি নির্ভর সমস্যা দিয়ে এগিয়ে দেবেন। আর যে ধীরে ধীরে এগোচ্ছে তাকে ধীরে ধীরে যুক্তির বিকাশ ঘটিয়ে ওই অধ্যায়ের যে সামর্থ্য কাম্য সেটায় পৌঁছোতে সাহায্য করবেন।

1. সর্বভারতীয় বোর্ড এবং কাউন্সিলের পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচির মধ্যে সামঞ্জস্য রাখার জন্য দশম শ্রেণিরও পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচিতে পরিবর্তন করা হয়েছে।

2. একাদশ শ্রেণির গণিতের পাঠ্যসূচির সাঙ্গে সামঞ্জস্য রাখার জন্য দশম শ্রেণির গণিতে কিছু নতুন অধ্যায় সংযুক্ত করা হয়েছে।

3. দশম শ্রেণির 'গণিত প্রকাশ' বইয়ে পাটিগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি, ত্রিকোণমিতি এবং রাশিবিজ্ঞান অধ্যায়গুলি আলাদাভাবে নেই। কারণ, পাটিগণিতের একটি অধ্যায়ের সঙ্গে বীজগণিতের একটি অধ্যায় বা জ্যামিতির একটি অধ্যায়ের সঙ্গে পরিমিতির একটি অধ্যায় পরস্পরযুক্ত। যেমন চক্রবৃদ্ধি সুদের সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান জানা প্রয়োজন। ত্রিকোণমিতির ক্ষেত্রে জ্যামিতিক চিত্রের সদৃশতা জানা প্রয়োজন।

   অর্থাৎ শিক্ষার্থীরা যেন কোনো সূত্র মুখস্থ বিদ্যার (Rote Learning) উপর নির্ভর না করে কেন হয় জেনে প্রয়োগ করতে পারে।

   তাই গণিতের বিভিন্ন শাখার অধ্যায়গুলি পাঠ্যপুস্তকে সেভাবে সাজানো হয়েছে।

4. পাঠ্যপুস্তকে প্রতিটি অধ্যায়ের প্রথমে না দিয়ে শেষে অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন এবং সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। কারণ শিক্ষার্থীদের যাতে বড়ো সমস্যা সমাধান করতে গিয়ে অধ্যায়টি সম্বন্ধে ধারণা সম্পূর্ণ হয় এবং তারপর ওই ধরনের সমস্যা যাতে তারা খুব তাড়াতাড়ি করতে পারে।

5. শ্রেণিকক্ষের ও বাস্তবের সমস্যা বুঝে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা নিজেরাই শিক্ষার্থীর যুক্তিপূর্ণ আনন্দদায়ক শিক্ষার জন্য পাঠ্যবইটিকে কেমন করে আরও ভালোভাবে ব্যবহার করা যাবে সেটিরও পরামর্শ জানাবেন যাতে ভবিষ্যতে পাঠ্যবইটি নিখুঁত ও সর্বাঙ্গীণ সুন্দর হয়।

পাঠ পরিকল্পনা

মাস	অধ্যায়
January	1 একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equations with one variable) 2 সরল সুদকষা (Simple Interest) 3 বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য (Theorems related to circle)
February	4 আয়তঘন (Rectangular Parallelopiped or Cuboid) 5 অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion) 6 চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস (Compound Interest and Uniform Rate of Increase or Decrease)
March	7 বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য (Theorems related to Angles in a Circle) 8 লম্ব বৃত্তাকার চোঙ (Right Circular Cylinder) 9 দ্বিঘাত করণী (Quadratic Surd) 10 বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য (Theorems related to Cyclic Quadrilateral)
April	11 সম্পাদ্য : ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন (Construction : Construction of circumcircle and incircle of a triangle) 12 গোলক (Sphere) 13 ভেদ (Variation) 14 অংশীদারি কারবার (Partnership Business) 15 বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য (Theorems related to Tangent to a Circle)
May & June	16 লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু (Right Circular Cone) 17 সম্পাদ্য : বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন (Construction : Construction of Tangent to a circle) 18 সদৃশতা (Similarity)
July	19 বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যা (Real life Problems related to different Solid Objects) 20 ত্রিকোণমিতি : কোণ পরিমাপের ধারণা (Trigonometry : Concept of measurement of angle) 21 সম্পাদ্য : মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় (Construction : Determination of Mean Proportional) 22 পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Pythagoras Theorem)
August	23 ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ও ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি (Trigonometric Ratios and Trigonometric Identities) 24 পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Complementrary angle)
September & October	25 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব (Application of Trigonometric Ratios : Heights & Distances) 26 রাশিবিজ্ঞান : গড়, মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান (Statistics : Mean , Median , Ogive , Mode)

প্রথম পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়ন

নমুনা প্রশ্নপত্র

সময়: 1 ঘণ্টা 30 মিনিট **পূর্ণমান : 40**

1. **সঠিক উত্তর নির্বাচন করো:** **1×6=6**

(i) বার্ষিক একই সুদের হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদ সমান হয়

(a) 1 বছরে (b) 2 বছরে (c) 3 বছরে (d) 4 বছরে

(ii) 5 বছরে আসল ও সরল সুদের অনুপাত 10:3 হলে, বর্ষিক শতকরা সরল সুদের হার

(a) 3 (b) 30 (c) 6 (d) 12

(iii) নীচের কোনটি দ্বিঘাত সমীকরণ নয়

(a) $2x-3x^2 = 3x^2+5$ (b) $(2x+3)^2 = 2(x^2-5)$

(c) $(\sqrt{3}x+2)^2 = 3x^2-7$ (d) $(x-2)^2 = 5x^2+2x-3$

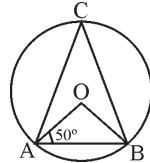
(iv) যদি $4x^2+6kx+9=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হয়, তবে k-এর মান

(a) 2 অথবা 0 (b) –2 অথবা 0 (c) 2 অথবা –2 (d) কেবলমাত্র 0

(v) পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle OAB=50^\circ$ এবং C বৃত্তের উপরে কোনো একটি বিন্দু হলে, $\angle ACB$-এর মান

(a) 50° (b) 40° (c) 80° (d) 100°

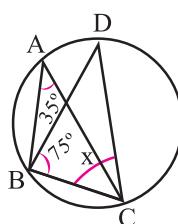
(vi) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। $\angle AOB=70^\circ$ হলে, $\angle COD$-এর মান

(a) 110° (b) 70° (c) 35° (d) 80°

2. **নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও:** **2×5=10**

(i) বার্ষিক 10% সরলসুদে কত বছরে সুদ আসলের $\frac{3}{5}$ অংশ হবে?

(ii) $p:q = 5:7$ এবং $p-q = -4$ হলে, $(3p-2q)$-এর মান কত?

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। যদি AB=10 সেমি., CD=24 সেমি. এবং AB ও CD জ্যা দুটির দূরত্ব 17 সেমি. হয়, তবে ওই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(iv) পাশের চিত্রে x-এর মান নির্ণয় করো।

(v) একটি ঘনকের আয়তন 512 ঘন সেমি. হলে, ওই ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

3. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত বছরে 1,00,000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 1,33,100 টাকা হবে?

অথবা

একটি গাছের উচ্চতা প্রতি বছর 20% হারে বৃদ্ধি পায়। গাছটির বর্তমান উচ্চতা 28.8 মিটার হলে, 2 বছর আগে গাছটির উচ্চতা কত ছিল নির্ণয় করো। **5**

4. **সমাধান করো : [যে-কোনো একটি]** **3×1=3**

(i) $(2x+1)+\frac{3}{2x+1}=4,\ (x\neq-\frac{1}{2})$

(ii) $\frac{1}{(x-2)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-6)}+\frac{1}{(x-6)(x-8)}+\frac{1}{3}=0,\ (x\neq 2, 4, 6, 8)$

5. সুলতা একটি সমকোণী ত্রিভুজ এঁকেছে যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 13 সেমি. এবং অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর 7 সেমি.। সুলতার আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। **4**

অথবা

যদি দুই অঙ্কের একটি ধনাত্মক সংখ্যাকে উহার এককের ঘরের অঙ্ক দিয়ে গুণ করলে গুণফল 189 হয় এবং দশকের ঘরের অঙ্ক এককের ঘরের অঙ্কের দ্বিগুণ হয়, তবে এককের ঘরের অঙ্কটি নির্ণয় করো।

6. a, b, c ও d ক্রমিক সমানুপাতী হলে, প্রমাণ কর যে, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

অথবা

$a=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ এবং $ab=1$ হলে, $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো। **3**

7. প্রমাণ করো যে, কোনো বৃত্তের একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ ওই চাপের দ্বারা গঠিত যে-কোনো বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

অথবা

প্রমাণ করো যে, ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ওই সরলরেখা জ্যা-এর উপর লম্ব হবে। **5**

8. 21 ডেসিমি. দীর্ঘ, 11 ডেসিমি. প্রশস্ত এবং 6 ডেসিমি. গভীর একটি চৌবাচ্চা অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। এখন ওই চৌবাচ্চায় যদি 21 সেমি. ব্যাস এবং 20 সেমি. উচ্চতার 100টি লোহার নিরেট চোঙ সম্পূর্ণ ডুবিয়ে দেওয়া হয়, তবে জলতল কত ডেসিমি. উঠে আসবে?

অথবা

একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3:1; চোঙটির আয়তন 1029π ঘন সেমি. হলে, চোঙটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত? **4**

মিলিয়ে দেখি

1. (i) a (ii) c (iii) c (iv) c (v) b (vi) b **2.** (i) 6 বছর (ii) 2 (iii) 13 সেমি. (iv) 70° (v) 384 বর্গ সেমি. **3.** 3 বছর অথবা, 20 মিটার **4.** (i) x=0 এবং x=1 (ii) x=5 এবং x=5 **5.** 12 সেমি. ও 5 সেমি. অথবা, 3 **6.** অথবা, 7 **8.** 3 ডেসিমি. অথবা, 1232 বর্গ সেমি.

দ্বিতীয় পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়ন

নমুনা প্রশ্নপত্র

সময় :1 ঘণ্টা 30 মিনিট **পূর্ণমান : 40**

1. সঠিক উত্তর নির্বাচন করো: **1×7=7**

(i) $5x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি

(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$

(ii) সমীর 4000 টাকা 3 মাসের জন্য এবং অমিতা 3000 টাকা 5 মাসের জন্য একটি ব্যবসায়ে নিয়োজিত করল। লভ্যাংশ সমীর ও অমিতার মধ্যে যে অনুপাতে বণ্টিত হবে তা হলো,

(a) 4 : 3 (b) 3 : 4 (c) 4 : 5 (d) 5 : 4

(iii) $x \propto \frac{1}{y}$ এবং $y = \frac{2}{5}$ যখন $x = 5$; $x = \frac{1}{6}$ হলে, y-এর মান

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 6 (c) 12 (d) 18

(iv) পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। $\angle ADC = 140^\circ$ এবং $\angle CAB = x^\circ$ হলে, x-এর মান

(a) 80 (b) 40 (c) 50 (d) 30

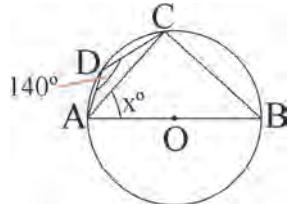
(v) যদি দিনের কোনো এক সময়ে একটি স্তম্ভ ও একটি 20 মিটার লম্বা উল্লম্ব লাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 50 মিটার ও 10 মিটার হয়, তবে ওই স্তম্ভের উচ্চতা

(a) 120মি. (b) 250মি. (c) 25মি. (d) 100মি.

(vi) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 15 সেমি. এবং ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 16 সেমি. হলে, শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল

(a) 120π বর্গ সেমি. (b) 240π বর্গ সেমি. (c) 136π বর্গ সেমি. (d) 130π বর্গ সেমি.

(vii) একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 147π বর্গ সেমি. হলে, ওই অর্ধগোলকের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

(a) 14 সেমি. (b) 7 সেমি. (c) 21 সেমি. (d) 7.5 সেমি.

2. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও: **2×4=8**

(i) $A \propto \frac{1}{C}$ এবং $C \propto \frac{1}{B}$ হলে, A এবং B-এর মধ্যে ভেদ সম্পর্ক নির্ণয় করো।

(ii) শূন্যস্থান পূরণ করো :

(a) একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করলে সরলরেখাটিকে বৃত্তের ________ বলে।

(b) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 4 সেমি. ও 5 সেমি.। বৃত্তদুটি পরস্পর বহিঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব ________ সেমি.।

(iii) একটি গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল S এবং আয়তন V হলে, $\frac{S^3}{V^2}$ -এর মান π-এর সাপেক্ষে কত তা লেখো।

(iv) একটি শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল তার ভূমির ক্ষেত্রফলের $\sqrt{5}$ গুণ। শঙ্কুটির উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় করো।

3. শোভা, মামুদ ও রাবেয়া যথাক্রমে 3000 টাকা, 3500 টাকা ও 2500 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যবসা আরম্ভ করল। তারা ঠিক করল যে মোট লাভের $\frac{1}{3}$ অংশ তারা নিজেদের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে নেবে এবং লাভের অবশিষ্ট অংশ তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করবে। যদি বছরের শেষে 810 টাকা লাভ হয়, তাহলে প্রত্যেকের লাভের পরিমাণ কত হবে? **5**

অথবা

শাকিল ও মহুয়া যথাক্রমে 30,000 টাকা ও 50,000 টাকা মূলধন দিয়ে যৌথভাবে একটি ব্যবসা আরম্ভ করল। 6 মাস পরে শাকিল আরও 40,000 টাকা ব্যবসায় লগ্নি করল, কিন্তু মহুয়া ব্যক্তিগত প্রয়োজনে 10,000 টাকা তুলে নিল। বছরের শেষে যদি 19,000 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তাহলে কে, কত টাকা লাভ পাবে?

4. $a \propto b$ এবং $b \propto c$ হলে, দেখাও যে, $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \propto abc\,(a^3+b^3+c^3)$ **3**

অথবা

সমাধান করো : $\frac{x-2}{x+2} + 6\left(\frac{x-2}{x-6}\right) = 1, (x \neq -2, 6)$

5. প্রমাণ করো যে, যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে তাহলে স্পর্শবিন্দুটি তাদের কেন্দ্র দুটির সংযোজক সরলরেখাংশের উপর অবস্থিত হবে। **5**

অথবা

প্রমাণ করো যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের ওপর লম্ব অঙ্কন করলে যে দুটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাদের প্রত্যেকটি মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ এবং তারা নিজেরাও পরস্পর সদৃশ।

6. ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BAC = 1$ সমকোণ। অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব। প্রমাণ করো যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta ACD} = \frac{BC^2}{AC^2}$ **3**

7. একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6.8 সেমি. এবং ওই বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির মান 60° ও 75°; ওই ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করো। [শুধুমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিতে হবে] **5**

অথবা

2.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। বৃত্তের বাইরে P এমন একটি বিন্দু যার O বিন্দু থেকে দূরত্ব 5 সেমি.; P বিন্দু থেকে ওই বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করো। [শুধুমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিতে হবে]

8. 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি তামার নিরেট গোলক গলিয়ে একটি বড়ো নিরেট গোলক তৈরি করা হলো। বড়ো গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত হবে? **4**

অথবা

ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার বিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির তাঁবু তৈরি করতে প্রতি বর্গ মিটার 3.50 টাকা হিসাবে মোট কত খরচ হবে তা নির্ণয় করো?

মিলিয়ে দেখি

1. (i) d (ii) c (iii) c (iv) c (v) d (vi) c (vii) b **2.** (i) $A \propto B$ (ii) a. ছেদক b. 9 সেমি. (iii) 36π (iv) 2:1 **3.** 270 টাকা, 300 টাকা ও 240 টাকা অথবা, শাকিল পাবে 10,000 টাকা ও মহুয়া পাবে 9,000 টাকা **4.** অথবা, $x=0$ এবং $x=\frac{2}{3}$ **8.** 6 সেমি. অথবা, 1716 টাকা

তৃতীয় পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়ন

নমুনা প্রশ্নপত্র

সময় : 3 ঘণ্টা **পূর্ণমান : 90**

1.A. নীচের প্রশ্নগুলির সঠিক উত্তর নির্বাচন করো (সবগুলি প্রশ্নের উত্তর দাও) **1×6=6**

(i) বার্ষিক a% সরল সুদের হারে b টাকার c মাসের সুদ

(a) $\frac{abc}{1200}$ টাকা (b) $\frac{abc}{100}$ টাকা (c) $\frac{abc}{200}$ টাকা (d) $\frac{abc}{120}$ টাকা

(ii) $kx^2 - 5x + k = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান ও বাস্তব হবে যদি k-এর মান হয়

(a) ± 5 (b) $\pm \frac{5}{2}$ (c) $\pm \frac{2}{5}$ (d) ± 2

(iii) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$ হলে, $\sin(\alpha - \beta)$-এর মান

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iv) O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শক PA অঙ্কন করা হলো। PA = 4 সেমি. এবং OP = 5 সেমি. হলে, বৃত্তটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হবে

(a) 5 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 6 সেমি. (d) 8 সেমি.

(v) দুটি ঘনকের আয়তনের অনুপাত 8 : 125 হলে, ঘনক দুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 2 : 5 (b) 4 : 25 (c) 4 : 5 (d) 2 : 25

(vi) 8, 15, 10, 11, 7, 9, 11, 13, 16 -এর মধ্যমা

(a) 15 (b) 10 (c) 11.5 (d) 11

B. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির শূন্যস্থান পূরণ কর (যেকোনো পাঁচটি) **1×5=5**

(i) p টাকার 6 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 2r% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে n বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $p(1+\frac{r}{__})^{2n}$ টাকা। [illegible]

(ii) a-এর 50% = b-এর 20% = c-এর 25% হলে a : b : c = 2 : 5 : __________

(iii) $\alpha=90^\circ$ এবং $\beta=30^\circ$ হলে, Sin $(\alpha - \beta)$ এর মান __________

(iv) একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করলে সরলরেখাটিকে __________ বলা হয়।

(v) একটি নিরেট অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হলে, তার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল __________ বর্গএকক।

(vi) যে তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 2 টি তাকে __________ ভূয়িষ্টক তথ্য বলা হয়।

C. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির সত্য না মিথ্যা লেখো (যেকোনো পাঁচটি) **1×5=5**

(i) একটি অংশীদারি ব্যবসায় আনোয়ার, অমল ও ডেভিডের নিয়োজিত মূলধনের অনুপাত 3:2:5 হলে, তাদের মধ্যে লভ্যাংশ বন্টিত হবে যথাক্রমে 5:2:3 অনুপাতে।

(ii) A, B-এর সাথে সরলভেদে আছে। B, C-এর সাথে সরলভেদে আছে। সুতরাং, A, C-এর সাথে সরলভেদে আছে।

(iii) $\alpha + \beta = 90^\circ$ হলে, $\text{Sin}^2\alpha + \text{Sin}^2\beta = 1$

(iv) ABC ও DEF ত্রিভুজ দুটির $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle F$ এবং $\angle C = \angle E$ হলে, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

(v) দুটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2 : 3 হলো, তাদের সমগ্রস্থলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 4 : 9

(vi) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা লেখচিত্র থেকে কোনো তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করা যায়।

2. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও: (যেকোনো দশটি) $2\times10=20$

(i) বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকার 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ 615 টাকা হলে, আসল নির্ণয় করো।

(ii) একটি জিনিসের মূল্য প্রতিবছর 10% হারে হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। জিনিসটির বর্তমানমূল্য 182 টাকা হলে। 2 বছর পূর্বে জিনিসটির দাম কত ছিল তা নির্ণয় করো।

(iii) x ও y দুটি চলরাশি। তাদের সম্পর্কিত মানগুলি হলো :

$x = 6, y = 9; x = 4, y = 6; x = 12, y = 18; x = 3.6, y = 5.4;$ x ও y -এর মধ্যে কীরূপ ভেদ সম্পর্ক আছে তা যুক্তিসহ নির্ণয় করো।

(iv) $x^2 + 8x + 2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ α ও β হলে, $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(v) একই দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি চোঙ ও একটি গোলকের ঘনফল সমান হলে, চোঙের ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার অনুপাত নির্ণয় করো।

(vi) একটি নিরেট অর্ধগোলকের আয়তন 144π ঘনসেমি হলে, এর ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত?

(vii) 17 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের একটি জ্যা-এর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব 8 সেমি.। জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(viii) একটি বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AOC ব্যাস। B বৃত্তের উপর যেকোনো একটি বিন্দু এবং $\angle ACB=50^\circ$; AT বৃত্তের A বিন্দু স্পর্শক যেখানে B ও T বিন্দু AC ব্যাসের একই পার্শ্বে অবস্থিত। $\angle BAT$-এর মান নির্ণয় কর।

(ix) ABC ত্রিভুজে BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। AD : DB = 5 : 4 হলে, AE : AC কত?

(x) $\tan\theta.\tan2\theta = 1$ হলে, $\cos2\theta$-এর মান কত?

(xi) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 সেমি.। ওই বৃত্তে 66 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দ্বারা ধৃত কেন্দ্রীয় কোণটির বৃত্তীয় মান কত?

(xii)

x_i	3	5	8	9	11	13
f_i	6	8	5	p	8	4

উপরের তথ্যের যৌগিক গড় 8 হলে, p-এর মান নির্ণয় করো।

3. বার্ষিক কত হার সুদে 2 বছরে 60,000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 69,984 টাকা হবে? **5**

অথবা

বছরের প্রথমে অরুণ ও অজয় যথাক্রমে 24,000 টাকা ও 30,000 টাকা দিয়ে যৌথভাবে ব্যবসা শুরু করে। কিন্তু কয়েক মাস পরে অরুণ আরও 12,000 টাকা ওই ব্যবসায়ে মূলধন দেয়। বছরের শেষে ওই ব্যবসায়ে 14,030 টাকা লাভ হলো এবং অরুণ 7,130 টাকা লভ্যাংশ পেল। অরুণ কত মাস পরে ব্যবসায়ে টাকা দিয়েছিল তা নির্ণয় করো।

4. সমাধান করো : $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$, $[x \neq 0, -(a+b)]$ **3**

অথবা

স্থির জলে একটি নৌকার গতিবেগ 8 কিমি./ঘণ্টা। নৌকাটি 5 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 15 কিমি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে 22 কিমি. গেলে, স্রোতের বেগ কত ছিল নির্ণয় করো।

5. সরল করো : $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ **3**

অথবা

যদি 5 জন কৃষক 12 দিনে 10 বিঘা জমির পাট কাটতে পারেন, তবে কতজন কৃষক 18 বিঘা জমির পাট 9 দিনে কাটতে পারবেন তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করো।

6. যদি, $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ **3**

অথবা

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে, দেখাও যে, $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$

7. পিথাগোরাসের উপপাদ্যটি বিবৃত করো ও প্রমাণ করো। **1+4**

অথবা

প্রমাণ করো যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক। **5**

8. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম যার AB || DC; AB-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AE : ED = BF : FC **3**

অথবা

যদি ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB = DC হয়, তবে প্রমাণ করো যে, AC = BD

9. জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{22}$-এর মান নির্ণয় করো। [শুধুমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিতে হবে] **5**

অথবা

একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার ভূমির দৈর্ঘ্য 6.5 সেমি. এবং ওই বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির পরিমাপ 50° ও 75°; ওই ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করো। [শুধুমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিতে হবে]

10. **যে-কোনো 2টি প্রশ্নের উত্তর দাও:** **3×2=6**

(i) x-এর মান নির্ণয় করো :

$(x+1)\cot^2\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\sec^2\frac{\pi}{4} + 4\sin^2\frac{\pi}{6}$

(ii) দেখাও যে, $\operatorname{cosec}^2 22^\circ \cot^2 68^\circ = \sin^2 22^\circ + \sin^2 68^\circ + \cot^2 68^\circ$

(iii) যদি $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x\sin\theta = y\cos\theta$

11. **যে-কোনো 2টি প্রশ্নের উত্তর দাও:** **4×2=8**

(i) একটি অর্ধগোলক ও একটি শঙ্কুর ভূমি সমান ও উচ্চতাও সমান হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত ও বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

(ii) 4.2 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ধারবিশিষ্ট একটি নিরেট কাঠের ঘনক থেকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে যে নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু পাওয়া যাবে, তার আয়তন নির্ণয় করো।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা উহার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। যদি উচ্চতা 6 গুণ হতো, তবে চোঙটির আয়তন 539 ঘন ডেসিমি. বেশি হতো। চোঙটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

12. মিহিরদের পাঁচতলা বাড়ির ছাদের কোনো বিন্দু থেকে দেখলে মনুমেন্টের চূড়ার উন্নতি কোণ ও গোড়ার অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° হয়; বাড়িটির উচ্চতা যদি 16 মিটার হয়, তবে মনুমেন্টের উচ্চতা কত? **5**

অথবা

সূর্যের উন্নতি কোণ যখন 45° থেকে 60°-তে পরিবর্তিত হয়, তখন একটি টেলিগ্রাফ স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য 4 মিটার পরিবর্তিত হয়। উন্নতি কোণ যখন 30° হয়, তখন ওই টেলিগ্রাফ স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

13. **যে-কোনো 2টি প্রশ্নের উত্তর দাও:** **4×2=8**

(i) শাকিলবাবু তার 50টি বাক্সে বিভিন্ন সংখ্যায় আম ভরে পাইকারি বাজারে নিয়ে যাবেন। কতগুলি বাক্সে কতগুলি আম রাখলেন তার তথ্য নীচের ছকে দেওয়া হলো।

আমের সংখ্যা	50 - 52	52 - 54	54 - 56	56 - 58	58 - 60
বাক্সের সংখ্যা	5	14	16	10	5

ওই 50টি বাক্সে গড় আমের সংখ্যা নির্ণয় করো।

(ii) নীচের তথ্য থেকে ছাত্রদের উচ্চতার মধ্যমা নির্ণয় করো:

উচ্চতা (সেমি.)	135-140	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165
ছাত্রদের সংখ্যা	7	12	20	24	20	17

(iii) নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করো:

শ্রেণি	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
পরিসংখ্যা	5	12	18	28	17	12	8

মিলিয়ে দেখি

1. (i) a (ii) c (iii) d (iv) b (v) a (vi) c (vii) c (viii) a (ix) d (x) c (xi) c (xii) b (xiii) b (xiv) c (xv) d **2.** (i) 6000 টাকা (ii) $x \propto y$ (iii) -4 (iv) 3:2 (v) 12 সেমি. (vi) a. মিথ্যা b. সত্য (vii) a. সূক্ষ্মকোণ b. কেন্দ্রগামী (viii) $\frac{1}{2}$ (ix) $\frac{3\pi}{2}$ (x) 10 **3.** 8% অথবা, 5 মাস পরে **4.** $x=-a$ এবং $x=-b$ অথবা, $1\frac{3}{5}$ কিমি./ঘণ্টা **5.** 0 অথবা, 12 জন **10.** (i) 0 **11.** (i) 2:1, $\sqrt{2}:1$
(ii) 19404 ঘন সেমি. (iii) 7 ডেসিমি. **12.** 64 মিটার অথবা, $6(\sqrt{3}+1)$ মিটার
13. (i) 54.84 (ii) 152.29 সেমি. (প্রায়) (iii) 17.38 (প্রায়)